Università di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Coomologia di de Rham dei gruppi di Lie compatti

Candidato:
Davide Gori

Relatore:
Prof. Andrea Maffei

Anno Accademico 2018–2019

Grazie a tutta la mia famiglia
per il costante supporto.

Indice

Introduzione

Lo scopo della tesi è quello di studiare la coomologia di de Rham dei gruppi di Lie compatti. Arriveremo a dimostrare, come risultato finale, che tale coomologia, nel caso in cui il gruppo sia connesso e compatto, è un'algebra esterna graduata con generatori di grado $2d_i - 1$ dove i d_i saranno il grado di specifici polinomi.
Sia G un gruppo di Lie e T un suo toro massimale, riusciremo a descrivere la coomologia di de Rham studiando l'azione del relativo gruppo di Weyl $W = {}^{N(T)}\!/_{T}$ sull'algebra polinomiale $S(\mathfrak{t}^*)$, dove $\mathfrak{t}$ è l'algebra di Lie di T.
W agisce su $\mathfrak{t}$ come un gruppo di riflessione finito, questo facilita lo studio dell'azione in questione. I gruppi di riflessione sono oggetti relativamente facili da studiare e ne esiste una classificazione esaustiva grazie a Coxeter. Nello specifico sarà facile descrivere l'algebra dei polinomi invarianti sotto l'azione di un tale gruppo; il teorema di Chevalley ci garantirà infatti l'esistenza di una base di invarianti, ovvero un insieme di generatori per l'algebra in oggetto, omogenei e algebricamente indipendenti. I gradi dei polinomi ottenuti in questo modo risulteranno proprio i d_i citati prima. Non ci soffermeremo sul calcolo esplicito di essi ma ricordiamo che, grazie al lavoro di Coxeter, questi sono già stati determinati per tutti i gruppi di riflessione.
La trattazione si aprirà con lo studio delle forme invarianti per moltiplicazione nei gruppi di Lie compatti e connessi. Usando il teorema di de Rham e la misura di Haar riusciremo a mostrare che la coomologia delle forme invarianti a sinistra (o a destra) è isomorfa alla coomologia di de Rham. Sfortunatamente questo risultato non ci permetterà una facile descrizione dell'algebra. Affinando il ragionamento considereremo le forme invarianti per moltiplicazione sia a destra che sinistra e, in maniera del tutto analoga, dimostreremo il seguente isomorfismo:

$$H^*(G) \simeq (\wedge \mathfrak{g}^*)^G ,$$

dove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di G e l'azione è quella fornita dalla rappresentazione aggiunta su $\mathfrak{g}$. Tale risultato sarà poi facilmente generalizzabile al caso non connesso.
Useremo l'isomorfismo appena trovato per descrivere i gruppi di coomologia di dimensione bassa. Con questo strumento riusciremo nello specifico a dimostrare che le uniche sfere S^n che possiamo dotare di una struttura di gruppo di Lie sono S^0, S^1 e S^3.
Al fine di ottenere una descrizione più esplicita di $H^*(G)$ con G connesso e compatto, nel quarto capitolo studieremo l'applicazione:

$$\begin{aligned} p : {}^{G}\!/_{T} \times T &\longrightarrow G \\ p : (gT, t) &\mapsto gtg^{-1}. \end{aligned}$$

Lo studio di p definirà un morfismo di algebre graduate in coomologia:

$$p^* : H^*(G) \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right).$$

L'introduzione di un toro massimale e di p ci permetterà di considerare l'azione di W che agisce su T per coniugio e quella su ${}^{G}\!/_{T}$ data da $w \cdot gT = gw^{-1}T$. Sarà quindi possibile definire un'azione di W su ${}^{G}\!/_{T} \times T$ e si vedrà facilmente che $p\left(w\cdot(gT,t)\right)=p\left(gT,t\right)$. Da questo dedurremo che sarà possibile restringere il codominio di p^*:

$$p^*: H^*\left(G\right) \longrightarrow \left[H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right)\right]^W .$$

Il terzo capitolo sarà dedicato allo studio dell'azione dei gruppi di riflessione finiti che, come già detto, servirà per descrivere l'azione di W. Nello specifico ci occuperemo dell'azione di tali gruppi sui polinomi (che chiameremo S), sulle derivazioni (che chiameremo $\mathcal{D}$) e sulle forme: analizzeremo in particolare i relativi spazi invarianti. Tratteremo i teoremi di Chevalley e di Solomon. Quest'ultimo userà la base di invarianti fornita dal teorema di Chevalley per caratterizzare lo spazio invariante delle forme.
Indicando con I^+ l'ideale generato dagli elementi di S^W omogenei di grado positivo, esibiremo dei generatori per

$$\left[{}^{S}\!/_{I^+} \otimes \wedge\mathfrak{t}^*\right]^W ,$$

legati a quelli dell'algebra delle forme polinomiali invarianti.
Infine, grazie agli strumenti sviluppati, studieremo i polinomi armonici $\mathcal{H}$.
I risultati puramente algebrici ottenuti in questo capitolo resteranno inutilizzati in un primo momento, ma risulteranno necessari nella seconda metà del capitolo successivo.
Al fine di descrivere l'azione di W usando la teoria classica delle rappresentazioni, riusciremo a definire delle forme volume sulle tre varietà considerate (ovvero G, T, ${}^{G}\!/_{T}$) definendole grazie all'azione transitiva di moltiplicazione sinistra. Questa costruzione ci permetterà di esprimere facilmente il determinante dell'applicazione p. Tale calcolo sarà utile per due motivi.
Vedremo infatti che un generatore del toro sarà un valore regolare per p: calcolando il numero di controimmagini e notando la positività del determinante in tali punti mostreremo che il grado della mappa p è non nullo. Questo ci fornirà l'iniettività di p^*.
Successivamente, grazie al calcolo del determinante, saremo in grado di dimostrare la formula integrale di Weyl:

$$\int_G f(g)\omega_G = \frac{1}{|W|}\int_{{}^{G}\!/_{T}\times T} f\circ p(gT,t)\det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right)\omega_{{}^{G}\!/_{T}} \wedge \omega_T,$$

dove $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, ω_G, ω_T, $\omega_{{}^{G}\!/_{T}}$ sono le forme menzionate sopra e $\mathfrak{m}$ è un complementare di $\mathfrak{t}$ rispetto ad un prodotto definito positivo $\mathrm{Ad}(G)$-invariante.
Questa formula nel caso in cui f sia di classe si semplifica:

$$\int_G f(g)\omega_G = \frac{1}{|W|}\int_T f(t)\det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right)\omega_T$$

la quale sarà utile per calcolare i caratteri delle rappresentazioni su G. Riusciremo infatti a sfruttare con successo la semplificazione ottenuta nel calcolo dei caratteri, si vedrà che

$$\dim H^*(G) = \dim\left(\wedge\mathfrak{g}^*\right)^G = 2^{\dim T}.$$

Questo risultato sarà il primo passo per dimostrare che p^*, oltre a essere iniettiva, è pure suriettiva, se ristretta in arrivo al sottospazio dei fissati da W, e quindi isomorfismo.
Negli ultimi paragrafi sposteremo l'attenzione sulla descrizione di $\left[H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right)\right]^W$.
Grazie all'isomorfismo dato dalla formula di Künneth potremo spezzare l'insieme d'arrivo:

$$H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right) \simeq H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*\left(T\right),$$

dove il prodotto dell'anello risulterà quello componente per componente perché si mostrerà che il grado del primo fattore al membro di destra è sempre pari.
Studieremo quindi i due fattori separatamente. Per quanto riguarda la coomologia del toro, questa sarà facilmente calcolabile e avremo che $H^*(T) \simeq \wedge \mathfrak{t}^*$ isomorfismo W-equivariante. Rimarrà infine da studiare $H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right)$, a cui sono dedicate le sezioni 4.3 e 4.4.

Useremo la teoria di Morse per descrivere la coomologia singolare di ${}^{G}\!/\!_{T}$. Dimostreremo che la seguente funzione è di Morse:

$$\begin{aligned} f: {}^{G}\!/\!_{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ gT &\mapsto \langle Ad_g(X), X\rangle_G , \end{aligned}$$

dove $X \in \mathfrak{t}$ sarà tale che $\exp X$ sia un generatore del toro. Vedremo che i punti critici sono gli elementi di W e che in tali punti l'Hessiamo ha segnatura negativa pari.
Da questo consegue che $H^i\left({}^{G}\!/\!_{T}, \mathbb{R}\right) = 0$ per i dispari e che quindi, grazie al teorema di de Rham, anche $H^i\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) = 0$ per i dispari.
Usando quanto appena trovato e il teorema del punto fisso di Lefschetz con gli endomorfismi dati dalla moltiplicazione per un elemento di W, riusciremo a calcolare i caratteri della rappresentazione $W \curvearrowright H^*({}^{G}\!/\!_{T})$. Si riuscirà quindi a mostrare immediatamente che W agisce su tale spazio come la rappresentazione regolare.
Grazie alla descrizione di $H^*(T)$ data precedentemente, saremo quindi in grado di calcolare la dimensione di $\left[H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) \otimes H^*(T)\right]^W$ grazie ad un conto di caratteri. Confrontando le dimensioni avremo che:

$$H^*(G) \simeq \left[H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) \otimes H^*(T)\right]^W .$$

Allo scopo di descrivere in maniera esaustiva il membro di destra, mostreremo il teorema di Borel che ci fornirà la seguente descrizione:

$$H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) \simeq \left({}^{S(\mathfrak{t}^*)}\!/\!_{I^+}\right)_{(2)} ,$$

isomorfismo di algebre graduate W-equivariante (dove con $_{(2)}$ si intende che l'isomorfismo è graduato se si raddoppia il grado a destra).
Presa $g_1, \ldots, g_n$ base di invarianti fornita dal teorema di Chevalley e indicati con $\overline{dg_i}$ i dg_i dove i coefficienti polinomiali sono intesi modulo I^+. Mostreremo che vale:

$$H^*(G) \simeq \left[\left({}^{S(\mathfrak{t}^*)}\!/\!_{I^+}\right)_{(2)} \otimes \wedge \mathfrak{t}^*\right]^W ,$$

algebra esterna con generatori $\overline{dg_i}$ di bigrado $(2d_i - 2, 1)$ per $1 \leq i \leq l$.
Come ultima cosa generalizzeremo al caso G compatto:

$$H^*(G) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \left[\left({}^{S(\mathfrak{t}^+)}\!/\!_{I^+}\right)_{(2)} \otimes \wedge \mathfrak{t}^*\right]^W$$

dove k è il numero di componenti connesse.
I risultati studiati sono stati ottenuti primariamente da Chevalley, a cui dobbiamo riconoscere la paternità dell'omonimo teorema e della descrizione dell'algebra coomologica come algebra esterna graduata con generatori di grado $2d_i - 1$.

Capitolo 1

Prime definizioni e richiami

Richiameremo in questo capitolo gli strumenti necessari per comprendere la tesi. La maggior parte delle affermazioni non verrà dimostrata, all'inizio di ogni sezione saranno fornite delle referenze bibliografiche.

1.1 Gruppi di riflessione

Lo scopo di questa sezione è introdurre i gruppi di riflessione e pseudoriflessione, con particolare attenzione al sistema di radici nei primi. Tutto il materiale esposto in questa sezione è reperibile in [Hum90].

Sia K un campo di caratteristica nulla, E uno spazio vettoriale di dimensione finita su K, poniamo:

Definizione 1.1 (Gruppo di Pesudoriflessione)**.** Diciamo che un sottogruppo W di $\mathrm{GL}(E, K)$ è un gruppo di pseudoriflessione se esso è finito e generato da elementi che hanno esattamente $\dim(E) - 1$ autovalori 1: tali elementi si chiamano pseudoriflessioni.

Nel caso particolare in cui E sia uno spazio reale munito di un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito positivo.

Definizione 1.2 (Gruppo di riflessione)**.** Diremo che un gruppo finito $W < O(V)$ è di riflessione se è generato da riflessioni rispetto a iperpiani.

Definizione 1.3. Dato $\alpha \in \mathbb{R}^n$ si definisce H_α l'iperpiano di equazione $\langle \alpha, x \rangle$ e s_α la riflessione rispetto a questo.

Premettiamo un'osservazione che ci introdurrà ai sistemi di radici:

Osservazione 1.1. Sia $w \in W$ e α tale che $s_\alpha \in W$, abbiamo che $w s_\alpha w^{-1} = s_{w\alpha}$.

Questo significa che l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $s_\alpha \in W$ è stabile sotto l'azione di W.

Definizione 1.4 (Sistema di radici)**.** Un sistema di radici è un insieme $\Phi \subset V$ finito, che non contenga vettori nulli e tale che:

- $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$, $\forall \alpha \in \Phi$;
- $s_\alpha \Phi = \Phi$, $\forall \alpha \in \Phi$.

Notiamo subito che ad ogni W gruppo di riflessione è possibile associare un sistema di radici:

$$\Phi = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid s_\alpha \in W \text{ e } |\alpha| = 1\}.$$

In realtà nel definire tale sistema abbiamo libertà nello scegliere la lunghezza delle coppie di radici opposte: non essendo noi interessati a trattare il caso cristallografico, questa scelta non sarà importante.

Definizione 1.5. Fissiamo un vettore $X \in \mathbb{R}^n$, tale che $\langle \alpha, X \rangle \neq 0 \ \forall\, \alpha \in \Phi$, poniamo:

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, X \rangle > 0\},$$

che chiameremo radici positive. In maniera analoga poniamo negative le seguenti:

$$\Phi^- = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, X \rangle < 0\}.$$

Chiaramente Φ^+ e Φ^- non sono univocamente determinati ma dipendono dalla scelta di X.

Definizione 1.6. Definiamo sistema semplice, che indicheremo con Δ, un sottoinsieme di Φ^+, base per $\mathrm{span}(\Phi)$, tale che ogni radice di Φ^+ si scriva come combinazione a coefficienti non negativi delle radici di Δ.

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.1. *Per ogni Φ^+ sistema di radici positivo esiste un unico $\Delta \subset \Phi^+$ sistema semplice. Viceversa se $\Delta \subset \Phi$ è una base per $\mathrm{span}(\Phi)$ tale che ogni radice si scriva come combinazione a coefficienti esclusivamente non negativi o esclusivamente non positivi, allora esiste un'unica scelta di Φ^+ tale che $\Delta \subset \Phi^+$.*

Introduciamo ora la nozione di lunghezza.

Definizione 1.7. Sia $w \in W$ gruppo di riflessione, possiamo scrivere w come prodotto di elementi s_α (cioè riflessioni rispetto alle radici). Poniamo $l(w)$ il numero minimo di fattori necessari alla scrittura.

Concludiamo questa sezione enunciando un teorema che useremo nell'ultimo capitolo.

Teorema 1.2. *Sia $w \in W$, vale che:*

$$w \cdot \Phi^+ \cap \Phi^- = l(w),$$

cioè che il numero di radici positive che vengono mandate in radici negative da w è $l(w)$.

1.2 Richiami di geometria differenziale

Questa sezione sarà dedicata al teorema di de Rham che useremo nel corso della tesi ma non dimostreremo. I teoremi trattati sono dimostrati in [Lee03].

Per la trattazione sarà necessario definire un'orientazione per Δ_k complesso k-dimensionale. Procediamo per induzione. Prendiamo su Δ_0 l'orientazione positiva. Poniamo poi l'orientazione su $\partial\Delta_p$ tale che la mappa di immersione della faccia $F_{0,p} : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$ preservi l'orientazione e estendiamola a Δ_p.
Sia M una varietà liscia, possiamo ora definire la seguente forma bilineare

Definizione 1.8. Sia $\omega \in \Omega^k(M)$ e sia $\sigma : \Delta_k \longrightarrow M$ un complesso liscio (ovvero sia σ liscia), poniamo

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega,$$

dove scegliamo l'orientazione di Δ_k come definito sopra.

Prima di enunciare il teorema principale ricordiamo che

Proposizione 1.3. *Sia $S_\bullet^\infty(M)$ il complesso definito dalle combinazioni formali a coefficienti in $\mathbb{Z}$ delle mappe $\sigma : \Delta_k \longrightarrow M$ regolari. L'inclusione data da $S_\bullet^\infty(M) \longrightarrow S_\bullet(M)$ induce un isomorfismo in omologia:*

$$\Psi : H_i^\infty(M) \longrightarrow H_i(M),$$

dove con $H_i^\infty(M)$ si intende l'omologia del complesso $S_\bullet^\infty(M)$.

Enunciamo ora un primo teorema

Teorema 1.4. *La forma $\langle \omega, \sigma \rangle : H^i(G) \times H_i^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$\langle [\omega], [\sigma] \rangle = \int_\sigma \omega,$$

è ben definita.

Infine richiamiamo il teorema:

Teorema 1.5 (Teorema di de Rham)**.** *La forma $\langle , \rangle$ definisce l'applicazione*

$$\begin{aligned} \aleph : H^i(M) &\longrightarrow H^i(M, \mathbb{R}) \\ [\omega] &\mapsto \left(\left\langle [\omega], \Psi^{-1}(\_) \right\rangle : H_i(M) \longrightarrow \mathbb{R} \right), \end{aligned}$$

la quale risulta un isomorfismo.

1.3 Gruppi di Lie

In questa sezione richiameremo la teoria classica dei gruppi di Lie necessaria per lo sviluppo della tesi. Non verrà fornita una dimostrazione per quasi tutte le proposizioni presenti. Tutto il materiale esposto in questa sezione è reperibile in [Ada69] e [BD03]. Per una più facile consultazione divideremo la sezione in più parti.

1.3.1 Prime definizioni

Definizione 1.9 (Gruppo di Lie)**.** Si dice gruppo di Lie una varietà liscia G dotata di una struttura di gruppo tale che l'operazione $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ e l'inversa ${}^{-1} : G \longrightarrow G$ siano differenziabili.

Sia $L_g : G \longrightarrow G$ il diffeomorfismo dato dalla motiplicazione a sinistra per g.

Definizione 1.10. X campo vettoriale su G è invariante a sinistra (o L-invariante) se $X = (L_g)_* X$

In modo analogo definiamo i campi invarianti a destra.

Definizione 1.11 (Algebra di Lie di G)**.** Definiamo $\mathrm{Lie}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra dotato dell'usuale prodotto bracket $[,]$.

Si vede facilmente che tale prodotto è ben definito e che Lie(G) munito di questo costituisce un'algebra di Lie.

Osservazione 1.2. Si osserva che i campi invarianti a sinistra (o a destra) sono determinati dal loro valore nell'identità. In questo modo possiamo identificare Lie(G) con T_eG (dove e è l'identità del gruppo) e dotare questo della struttura di algebra di Lie.

T_eG inteso come algebra verrà indicato con $\mathfrak{g}$. Definiamo ora:

Definizione 1.12 (Morfismo fra gruppi di Lie)**.** Siano G e H gruppi di Lie, un omomorfismo di gruppi $\phi : G \longrightarrow H$ che sia anche liscio si dice di gruppi di Lie.

Questo induce un morfismo $\phi_* : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ di algebre di Lie.
Possiamo inoltre definire

Definizione 1.13 (Sottogruppo di Lie)**.** $H < G$ si dice sottogruppo di Lie se H ammette una struttura di gruppo di Lie tale che l'inclusione $i : H \longrightarrow G$ sia un morfismo di gruppi di Lie e un'immersione.

Definizione 1.14 (Sottogruppo di Lie regolare)**.** Sia H un sottogruppo di Lie di G, esso si dice regolare se l'inclusione è un embedding.

1.3.2 Sottogruppi a un parametro

I sottogruppi in questione sono fondamentali per lo studio dei gruppi di Lie. Vedremo in questa sottosezione alcuni risultati della teoria classica.

Definizione 1.15 (Sottogruppi a un parametro)**.** Un morfismo $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$ di gruppi di Lie si dice sottogruppo a un parametro.

Si noti che θ è un morfismo e non un sottogruppo; useremo questo termine anche per riferirci, più propriamente, all'immagine $\theta(\mathbb{R})$.
Il sottogruppo risulta a tutti gli effetti una curva, è utile ricavare la seguente formula

Osservazione 1.3 (Derivata del prodotto di curve). Siano $\gamma, \sigma : I \longrightarrow G$ curve da un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, vale che

$$d\,(\gamma \cdot \sigma)\,(t) = (dR_{\sigma(t)})_{\gamma(t)}\gamma'(t) + (dL_{\gamma(t)})_{\sigma(t)}\sigma'(t)$$

Sia $\Phi^t_X : G \longrightarrow G$ il flusso del campo di vettori X al tempo t.

Osservazione 1.4. Dato X un campo vettoriale invariante a destra, l'applicazione $t \mapsto \Phi^t_X(e)$ è un sottogruppo a un parametro.

La seguente sarà di fondamentale importanza nello sviluppo della teoria

Proposizione 1.6. *I sottogruppi a un parametro $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$ sono esprimibili come il flusso $t \mapsto \Phi^t_X$ dove X è il campo vettoriale invariante a destra tale che $X(e) = \theta'(0)$.*

Definiamo ora la mappa esponenziale, di cui faremo largo uso.

Definizione 1.16 (Mappa esponenziale)**.** Sia G un gruppo di Lie, definiamo

$$\begin{aligned} \exp :\ & \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow G \\ & \exp(X) \mapsto \Phi^1_X(e). \end{aligned}$$

La mappa si chiama esponenziale in riferimento al caso $G = GL(n, \mathbb{R})$ nel quale essa corrisponde proprio all'esponenziale di matrici.
Elenchiamo di seguito alcune proprietà dell'esponenziale

Proposizione 1.7. *Sia $X \in \mathrm{Lie}(G)$, si ha che:*

- $\exp : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow G$ *è una mappa liscia;*
- $\forall\, t \in R$, $\exp(tX) = \Phi_X^t(e)$*;*
- $t \mapsto \exp(tX)$ *è un sottogruppo a un parametro e una curva integrale di* X*;*
- $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX)$*;*
- $(d\exp)_0 = Id_{Lie(G)}$ *e questa definisce un diffeomorfismo tra un intorno di* 0 *in* $\mathrm{Lie}(G)$ *e un intorno di* e *in* G*;*
- *Se* G *è connesso e compatto la mappa* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *è suriettiva.*

Vediamo ora un'importante proprietà dell'esponenziale

Teorema 1.8. *Sia* $F : G \longrightarrow H$ *morfismo di gruppi di Lie, si ha che*

$$\exp \circ F_* = F \circ \exp,$$

cioè il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(G) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{Lie}(H) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"] & H. \end{tikzcd}$$

1.3.3 Rappresentazione aggiunta

Lo scopo di questa sottosezione sarà quello di introdurre la rappresentazione aggiunta e presentare alcuni risultati che serviranno in seguito. Diamone la definizione:

Definizione 1.17 (Mappa aggiunta)**.** Sia $C_g : G \longrightarrow G$ tale che $C_g(h) = ghg^{-1}$, definiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g := (dC_g)_e. \end{aligned}$$

Si osservi che Ad è un'omomorfismo di gruppi. Poniamo ora:

Definizione 1.18.

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto (\mathrm{ad}_X : Y \mapsto [X,Y]) \,. \end{aligned}$$

Si noti che ad è un morfismo di algebre di Lie e che vale:

Proposizione 1.9. $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ *è un morfismo di gruppi di Lie e il morfismo fra le rispettive algebre di Lie associate è*

$$(\mathrm{Ad})_* = \mathrm{ad}$$

.

Considerando il diagramma commutativo del teorema 1.8, vale che

Proposizione 1.10. *Il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_*=\mathrm{ad}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & GL(\mathfrak{g}) \end{array}$$

dove l'esponenziale a destra è proprio l'esponenziale di matrici.

Concludiamo ricordando che se $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, vale:

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_g X) \tag{1.1}$$

1.3.4 Tori massimali di gruppi di Lie

Lo scopo di questa sottosezione sarà quello di enunciare i classici risultati riguardanti i tori massimali di un gruppo di Lie compatto. L'organizzazione dei risultati farà riferimento a [Ada69].

Definizione 1.19 (Gruppo monogenico)**.** Un gruppo topologico G si dice monogenico se esiste $g \in G$ tale che $G = \overline{\langle g \rangle}$ (chiusura del sottogruppo generato dall'elemento). In tal caso g si chiama generatore del gruppo.

Definizione 1.20. Definiamo con T^k il toro k dimensionale $\prod_{i=1}^k S^1$ dotato della classica struttura di gruppo di Lie.

Risulta facile osservare che T è monogenico. Possiamo ora definire un toro massimale

Definizione 1.21. Sia G un gruppo di Lie connesso e compatto, definiamo $T \subset G$ sottogruppo di Lie un toro massimale se esso è un toro massimale per la relazione di inclusione.

Da adesso fino alla fine della sezione sottintenderemo che G sia un gruppo di Lie connesso e compatto.

Osservazione 1.5. Valgono i seguenti:

- Un toro massimale esiste sempre ed in particolare per ogni toro contenuto in G ne esiste uno massimale che lo contiene;
- Sia T un toro massimale e A un sottogruppo abeliano tale che $T \subset A$, allora si ha che $T = A$.

Il seguente teorema lega i tori e i gruppi abeliani:

Teorema 1.11. *I tori massimali coincidono con i sottogruppi abeliani massimali.*

Da cui un facile corollario:

Corollario 1.1. I tori massimali hanno se stessi come centro in G.

Consideriamo ora i coniugati gTg^{-1} di un toro, abbiamo il seguente teorema

Teorema 1.12. *Sia $T \subset G$ un toro massimale, ogni elemento $g \in G$ è contenuto in un coniugato di T.*

Ciò ha come conseguenza

Corollario 1.2. Ogni elemento di G giace su un toro massimale e ogni coppia di tori massimali è coniugata. Da questo segue che i tori massimali hanno tutti la stessa dimensione.

Per il resto della sezione intenderemo con T un toro massimale del gruppo G.

Definizione 1.22 (Gruppo di Weyl)**.** Definiamo gruppo di Weyl il seguente

$$W = {}^{N(T)}\!\big/_{Z(T)} = {}^{N(T)}\!\big/_{T}$$

che è un gruppo in quanto T normale in $N(T)$.

Si può dimostrare che W è finito e che induce un'azione $W \curvearrowright T$ data da $wT \cdot t = wtw^{-1}$. Grazie all'isomorfismo dei tori massimali dati dal coniugio, abbiamo che considerando un differente toro massimale si ottiene un gruppo di Weyl isomorfo.
Consideriamo ora l'esponenziale, questo è un rivestimento.

$$\exp : \mathfrak{t} \longrightarrow Tv,$$

Chiameremo reticolo intero di T l'insieme $\exp^{-1}(e)$. T^k può essere pensato come le k-uple $(x_1 \ldots, x_k)$ con $x_k \in {}^{\mathbb{R}}\!/_{\mathbb{Z}}$. Si ha che:

Proposizione 1.13. *I morfismi di gruppo continui $f : T^k \longrightarrow T^1 \simeq {}^{\mathbb{R}}\!/_{\mathbb{Z}}$ sono del tipo*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \pmod 1$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$.

Vale che

Proposizione 1.14. *Dato un morfismo continuo di gruppi $g : T \longrightarrow T^1 \simeq {}^{\mathbb{R}}\!/_{\mathbb{Z}}$ è sempre possibile definire $g \circ \exp : \mathfrak{t} \longrightarrow {}^{\mathbb{R}}\!/_{\mathbb{Z}}$ che si solleva ad un morfismo lineare $\mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{R}$ che assume valori interi sul reticolo intero del toro.*

concludiamo con la seguente osservazione.

Osservazione 1.6. Il reticolo intero è chiaramente un gruppo additivo e exp è un omomorfismo di gruppi.

1.3.5 Rappresentazione aggiunta del toro massimale

Vogliamo ora studiare l'algebra di Lie di G gruppo di Lie connesso e compatto, a tale scopo decomporremo $\mathfrak{g}$ tramite l'azione aggiunta di un toro massimale (che chiameremo T). Definiamo preliminarmente un prodotto $\mathrm{Ad}(G)$-invariante su $\mathfrak{g}$. Sia $\langle , \rangle$ definito positivo su $\mathfrak{g}$, poniamo:

$$\langle v, w \rangle_G = \int_G \langle Ad(g)v, Ad(g)w \rangle \, d\mu,$$

dove μ è la misura di Haar del gruppo G. Differenziando l'espressione $\langle \mathrm{Ad}_g v, \mathrm{Ad}_g w \rangle_G = \langle v, w \rangle_G$ si ottiene:

$$\langle [u, v], w \rangle_G + \langle v, [u, w] \rangle_G = 0, \tag{1.2}$$

relazione che useremo più volte nel corso della tesi. Il prodotto in questione è in particolare $Ad(T)$-invariante e ci permette di ottenere il risultato:

Teorema 1.15. *La rappresentazione*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : T &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ t &\mapsto (\mathrm{Ad}_t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}), \end{aligned}$$

decompone l'algebra in spazi T-invarianti

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{i=1}^{v} \mathfrak{g}_i,$$

con $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ e $\dim \mathfrak{g}_i = 2$. T agisce banalmente su $\mathfrak{t}$. Esiste inoltre un base $X_1, \dots X_{2v}$ di $\mathfrak{m}$ tale che $\{X_i, X_{i+v}\}$ sia una base di $\mathfrak{g}_i$ e l'azione su questa si scriva:

$$\mathrm{Ad}_{t|\mathfrak{g}_i} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta_i(t)) & \sin(2\pi\theta_i(t)) \\ -\sin(2\pi\theta_i(t)) & \cos(2\pi\theta_i(t)) \end{pmatrix},$$

dove $\theta_i : T \longrightarrow {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ è un morfismo di gruppi continuo non nullo.

Definizione 1.23. Possiamo associare a θ_i una forma lineare $\alpha_i : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$\alpha_i = \frac{1}{2\pi} d(\theta_i)_e : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Per la proposizione 1.14 si ha che $\alpha_i(t)$ che assume valori interi sul reticolo intero del toro, come detto nella scorsa sottosezione.

Possiamo quindi definire:

Definizione 1.24. Gli $\pm\alpha_i \in \mathfrak{t}^*$ per $1 \leq i \leq v$, si dicono radici di G.

Osservazione 1.7. Si noti che $\mathfrak{g}_i$ e $\mathfrak{t}$ sono perpendicolari rispetto al prodotto $\langle v, w \rangle_G$ che è $\mathrm{Ad}(G)$-invariante. Nello specifico possiamo scomporre $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus^{\perp} \mathfrak{m}$ dove $\mathfrak{m} = \sum_i^v \mathfrak{g}_i$.

Il gruppo W agisce sul toro massimale T. Sia $wT \in W$ possiamo definire una seconda rappresentazione di T, $\sigma = \mathrm{Ad} \circ C_w$

$$T \xrightarrow{C_w} T \xrightarrow{\mathrm{Ad}} GL(\mathfrak{g}).$$

Si dimostra che:

Teorema 1.16. *Sia $wT \in T$, allora $dC_w = Ad_w : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è un isomorfismo di rappresentazioni tra* Ad *e σ, quindi permuta gli autospazi invarianti e di conseguenza i θ_i. Si ha che W agisce come un gruppo di riflessione sulle rispettive radici $\pm\alpha_i$.*

Grazie alla relazione (1.1) si trova che, dato $X \in \mathfrak{g}$, l'azione corrispondente di wT su $\mathfrak{t}^*$ è la seguente

$$wT \cdot \alpha(X) = \alpha(Ad_{w^{-1}} X).$$

Consideriamo l'azione di T su un modulo irriducibile $\mathfrak{g}_i$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_i) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ T & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}_i), \end{array}$$

dove l'esponenziale a destra è proprio l'esponenziale di matrici. Dato $H \in \mathfrak{t}$, esprimiamo l'applicazione $ad_H : \mathfrak{g}_i \longrightarrow \mathfrak{g}_i$ sulla base $\{X_i, X_{i+v}\}$, questa risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_i(H) \\ -\alpha_i(H) & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando il risultato appena ottenuto e l'equazione 1.2 abbiamo che $\forall H \in \mathfrak{t}$:

$$\langle H, [X_i, X_j] \rangle_G = \langle [H, X_i], X_j \rangle_G = -\alpha_i(H) \langle X_{i+v}, X_j \rangle_G \,, \tag{1.3}$$

con $1 \leq i \leq v$.
Dalla perpendicolarità dei $\mathfrak{g}_i$ si deduce

Proposizione 1.17. *Sia $H_i = [X_i, X_{i+v}]$, abbiamo:*

- *Per $|j - i| \neq v$ si ha $[X_i, X_j] \in \mathfrak{m}$;*
- *$H_i \in \mathfrak{t}$, $ad(H_i)\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_i$ e la sottoalgebra di Lie generata da X_i, X_{i+v}, H_i è isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.*

Vogliamo ora definire un'azione duale di $W \curvearrowright \mathfrak{t}$, usiamo il prodotto scalare invariante

Definizione 1.25. Sia $K_i \in \mathfrak{t}$ tale che $\langle H, K_i \rangle_G = \alpha_i(H)$

Agendo con W su α_i si ha:

$$\alpha_i(\mathrm{Ad}_{g^{-1}T}\, H) = \left\langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}T}\, H, K_i \right\rangle_G = \langle H, \mathrm{Ad}_{gT}\, K_i \rangle_G \,.$$

Si ottiene quindi che W agisce come gruppo di riflessione su $\mathfrak{t}$ con il prodotto scalare $\langle , \rangle_G$ le cui radici sono K_i.
Si noti che grazie a 1.3 vale:

$$K_i = -\frac{H_i}{\langle X_{i+v}, X_{i+v} \rangle_G}. \tag{1.4}$$

1.3.6 Struttura di varietà e forma volume di G/T

In questa sottosezione tratteremo due teoremi volti a studiare la varietà G/T e che saranno utili nell'ultimo capitolo.

Teorema 1.18. *[War71, p. 120] Sia H un sottogruppo chiuso di G gruppo di Lie, sia $\pi : G \longrightarrow G/H$ la proiezione naturale sulle classi laterali. Allora G/H ha un'unica struttura di varietà liscia tale che:*

- *π sia liscia,*
- *esista una sezione liscia locale di G/H in G, cioè per ogni $gT \in G/T$ esiste U intorno di gT e $s : U \longrightarrow G$ liscia tale che $\pi \circ s = Id_U$.*

Notiamo che vale il seguente risultato:

Proposizione 1.19. *Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus^{\perp} \mathfrak{m}$ la scomposizione definita precedentemente, abbiamo che $d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{eT} G/T$ ha nucleo $\mathfrak{t}$ ed è un isomorfismo se ristretta a $\mathfrak{m}$.*

Inoltre:

Osservazione 1.8. Per come è stata definita π, dati $h, g \in G$ e $t \in T$, si ha:

$$\pi \circ L_g = \tau_g \circ \pi \quad \text{e} \quad \pi_* \circ L_{g*} = \tau_* \circ \pi_*$$

e anche

$$\pi \circ R_t = \pi \quad \text{e} \quad \pi_* \circ R_{g*} = \pi_*$$

Definizione 1.26. $d\pi_e$ definisce un isomorfismo fra $\mathfrak{m}$ e $T_{eT} {}^{G}\!/\!_{T}$. Diremo impropriamente che $\omega \in \bigwedge T_{eT} {}^{G}\!/\!_{T}{}^{*}$ è $Ad(T)$-invariante se la forma corrispondente $\alpha \in \bigwedge \mathfrak{m}^*$ è $\mathrm{Ad}(T)$-invariante.

Su un gruppo di Lie possiamo definire una forma su T_eG e poi estenderla a tutta la varietà per moltiplicazione sinistra. Vogliamo ora costruire, alla stessa maniera, una forma su ${}^{G}\!/\!_{T}$ tramite l'azione $\tau : G \times {}^{G}\!/\!_{T} \longrightarrow {}^{G}\!/\!_{T}$ di moltiplicazione sinistra.

Teorema 1.20. *Sia* $\overline{\omega} \in \bigwedge^k \left(T_{eT} {}^{G}\!/\!_{T}\right)^*$ $\mathrm{Ad}(T)$ *invariante, possiamo definire una forma*

$$\omega(gT)(X_1, \ldots, X_k) = \overline{\omega}(\tau_{g^{-1}*}X_1, \ldots, \tau_{g^{-1}*}X_k),$$

$\forall X_1, \ldots, X_k \in T_{gT} {}^{G}\!/\!_{T}$.

Dimostrazione. Mostriamo la buona definizione, cioè che l'espressione non dipende dal rappresentante di gT. τ_g è un diffeomorfismo di ${}^{G}\!/\!_{T}$, ci basterà mostrare che la forma data da

$$\omega(gT)(\tau_{g*}X_1, \ldots, \tau_{g*}X_k) = \overline{\omega}(X_1, \ldots, X_k),$$

è ben definita $\forall X_i \in T_{eT} {}^{G}\!/\!_{T}$.
Poniamo $Y_i \in \mathfrak{m}$ tale che $X_i = \pi_* Y_i$, sia $\alpha \in \bigwedge^k \mathfrak{m}$ l'elemento $\mathrm{Ad}(T)$ invariante tale che:

$$\alpha(Y_1, \ldots, Y_k) = \overline{\omega}(X_1, \ldots, X_k).$$

Sia $h \in T$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \tau_{gh*}X_i &= \tau_{gh*}\pi_* Y_i = \pi_* \circ L_{gh*}Y_i = \pi_* \circ R_{h*} \circ R_{h^{-1}*} \circ L_{gh*}Y_i = \\ &= \pi_{g*} \circ L_{g*} \circ \mathrm{Ad}_h Y_i = \tau_{g*} \circ \pi_* \circ \mathrm{Ad}_h Y_i, \end{aligned}$$

dove nel secondo, quarto e ultimo passaggio è stata usata l'osservazione 1.8.
Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} &\omega(gT)(\tau_{gh*}X_1, \ldots, \tau_{gh*}X_k) = \\ &= \omega(gT)(\tau_{g*} \circ \pi_* \circ \mathrm{Ad}_h Y_i, \ldots, \tau_{g*} \circ \pi_* \circ \mathrm{Ad}_h Y_k) = \\ &= \overline{\omega}(\pi_* \circ \mathrm{Ad}_h Y_1, \ldots, \pi_* \circ \mathrm{Ad}_h Y_k) = \alpha(\mathrm{Ad}_h Y_1, \ldots, \mathrm{Ad}_h Y_k) = \\ &= \alpha(Y_1, \ldots, Y_k) = \overline{\omega}(X_1, \ldots, X_k) = \omega(gT)(\tau_{g*}X_1, \ldots, \tau_{g*}X_k). \end{aligned}$$

La forma risulta quindi ben definita. τ_g è un diffeomorfismo, il che ci garantisce che la forma è definita per tutte le k-uple del tangente.
Per verificare che l'applicazione è liscia basta notare che l'azione sul fibrato tangente data da $(d\tau_g)_{hT}$ è differenziabile in funzione di g e gT.

□

Concludiamo la sezione mostrando l'esistenza di una forma volume.

Proposizione 1.21. *Sia* $\alpha \in \wedge^{2v}\mathfrak{m}$, *si ha che* α *è* $\mathrm{Ad}(T)$ *invariante.*

Dimostrazione. Siano $X_1, \ldots, X_{2v} \in \mathfrak{m}$, si ha che:

$$\alpha(\mathrm{Ad}_t X_1, \ldots, \mathrm{Ad}_t X_{2v}) = \det(\mathrm{Ad}_t)\, \alpha(X_1, \ldots, X_{2v}),$$

in quanto $\dim \mathfrak{m} = 2v$. Notiamo che $\det(\mathrm{Ad}) : T \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un morfismo continuo di gruppi, per compattezza di T anche l'immagine deve esserlo, quindi necessariamente è un sottogruppo di $\{1, -1\}$. Per connessione di T necessariamente $\det(\mathrm{Ad})_t = 1\ \forall t \in T$ da cui si deduce l'invarianza. $\square$

Corollario 1.3. Grazie all'osservazione appena fatta e al teorema 1.20 abbiamo l'esistenza di una forma volume su ${}^{G}\!/_{T}$ invariante per l'azione di G.

Capitolo 2

Una prima descrizione della coomologia di de Rham dei gruppi di Lie compatti

Questo capitolo sarà dedicato ad una prima descrizione dell'anello della coomologia di de Rham di un gruppo di Lie compatto.
L'operazione di gruppo fornirà una rigidità tale da renderne possibile una descrizione algebrica in termini dell'algebra di Lie associata. Faremo infatti largo uso dei diffeomorfismi dati dalla moltiplicazione per un elemento costante.
Nello specifico riusciremo a mostrare che:

$$H^*(G) = (\wedge \mathfrak{g}^*)^G \,,$$

dove il termine di destra è lo spazio fissato nella rappresentazione indotta da quella aggiunta sull'algebra di Lie associata $\mathfrak{g}$.
Per la dimostrazione di questo risultato faremo uso di due strumenti avanzati: il teorema di de Rham e l'esistenza della misura di Haar.
Il primo verrà usato per mostrare che una k-forma è esatta se e solo se integrata in ogni sottovarietà chiusa di dimensione k fa zero. La seconda servirà invece per costruire operatori di media delle forme, infatti in tutto il capitolo sarà necessario assumere la compattezza del gruppo.
Per evitare inutili complicazioni la trattazione verrà fatta nel caso di gruppi di Lie connessi, come ultima proposizione vedremo che l'ipotesi è facilmente eliminabile.
La caratterizzazione della coomologia che daremo ci fornirà un primo strumento per affrontare il seguente problema:

Problema 2.1. *Data M varietà liscia, quando è possibile costruire su essa una struttura di gruppo di Lie compatibile?*

La domanda risulta interessante in quanto i gruppi di Lie hanno molta più 'struttura' e alle volte risultano molto più facili da studiare: per esempio se si mostra che su una varietà è possibile definire un'operazione che lo renda un gruppo di Lie è immediata l'esistenza di un frame globale.
Con questo spirito nell'ultima parte del capitolo dimostreremo che le uniche sfere a cui è possibile fornire una struttura di gruppo di Lie sono quelle di dimensione 0, 1, 3.
L'isomorfismo sarà inoltre utile nel proseguimento della tesi perché ci permetterà di calcolare la dimensione di $H^*(G)$.
Il capitolo è diviso in due parti: nella prima approfondiremo la coomologia delle forme

invarianti e nella seconda mostreremo principalmente l'isomorfismo fra questa e la coomologia di de Rham.
Il materiale esposto in questa sezione è presente in [Fok10].

2.1 Forme invarianti per moltiplicazione e loro coomologia

Sia L_g il diffeomorfismo di G dato dalla moltiplicazione a sinistra per un elemento fissato g (e analogamente sia R_g per la moltiplicazione destra): l'insieme di questi è un sottogruppo di diffeomorfismi di G transitivo.
Vedremo che i morfismi in questione risultano molto utili nella realizzazione di funzioni lisce (come campi vettoriali e tensori in generale): ci basterà infatti esplicitarle in e (identità di G) e poi usare la moltiplicazione destra (o sinistra) per definirle in tutto G. La costruzione così effettuata ci garantirà la regolarità e l'invarianza per moltiplicazione a destra (o sinistra).
Possiamo ora introdurre le forme L_g-invarianti e la loro coomologia.

Definizione 2.1. Definiamo $\Omega^k_L(G)$ l'insieme delle $\omega \in \Omega^k(G)$ L-invarianti, cioè tali che $L_g^*\omega = \omega$.
In maniera analoga poniamo $\Omega^k_R(G)$ l'insieme delle forme R-invarianti.

Nella seguente trattazione esamineremo le forme L-invarianti, ma i risultati valgono banalmente anche per quelle invarianti a destra.
Per poter costruire la coomologia voluta è necessario primariamente verificare che la derivazione di una forma invariante sia invariante:

Lemma 2.1. *Sia $\omega \in \Omega^k_L(G)$, allora $d\omega \in \Omega^k_L(G)$.*

Dimostrazione. L_g è un diffeomorfismo che induce L_g^* automorfismo di complessi $\Omega^\bullet(G)$, quindi:

$$L_g^* d\omega = dL_g^*\omega = d\omega,$$

da cui la tesi. □

Abbiamo quindi il morfismo di complessi indotto dall'inclusione:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d"] & \Omega^k_L(G) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i_k"] & \Omega^{k+1}_L(G) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i_{k+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d"] & \Omega^k(G) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(G) \arrow[r, "d"] & \dots .
\end{tikzcd}$$

Indicando $H^k_L(G) = H^k(\Omega^\bullet_L(G))$ si ottiene:

$$i_k : H^k_L(G) \longrightarrow H^k(G).$$

$\Omega^*(G)$ con il prodotto $\wedge$ ammette una struttura di algebra graduata su $\mathbb{R}$.
Il prodotto di forme chiuse è chiuso, siano infatti $\omega \in \Omega^k(G)$ e $\alpha \in \Omega^h(G)$ due forme chiuse, si ha:

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha = 0,$$

questo implica che $\Omega^*(G)$ induce su $H^*(G)$ una struttura di algebra graduata. Vediamo che vale lo stesso anche con $H^*_L(G)$:

Lemma 2.2. *Se $\omega_1 \in \Omega^n_L(G)$ e $\omega_2 \in \Omega^m_L(G)$ abbiamo che $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{n+m}_L(G)$.*

Dimostrazione. L_g è un diffeomorfismo, dunque abbiamo:

$$L_g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_g^*\omega_1 \wedge L_g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

da cui la tesi. □

Questo ci assicura che $\Omega_L^*(G) = \bigoplus_k \Omega_L^k(G)$ con l'operazione $\wedge$ è un'algebra graduata. Per verificare che anche $H_L^*(G) = \bigoplus_k H_L^k(G)$ lo è basta notare che il prodotto $\wedge$ di due forme chiuse è chiusa, ma questo è già stato verificato precedentemente.
L'immersione i induce quindi un morfismo fra algebre su $\mathbb{R}$ che conserva il grado:

$$i_* : H_L^*(G) \longrightarrow H^*(G).$$

Nel prossimo capitolo mostreremo che questo è in realtà un isomorfismo.
Vogliamo ora descrivere esplicitamente $H_L^*(G)$.
Come detto precedentemente, un tensore L-invariante è completamente determinato dal valore nell'identità del gruppo G, in questo spirito abbiamo:

Lemma 2.3. *Sia $\mathfrak{g} = T_eG$ l'algebra di Lie associata a G, definiamo*

$$\begin{aligned} \phi^k :\ \Omega_L^k(G) &\longrightarrow \wedge^k \mathfrak{g}^* \\ \omega &\mapsto \{\omega\} = \omega_{|(\wedge T_eG)^*}, \end{aligned}$$

questo è un isomorfismo.

Dimostrazione. La linearità è facile da verificare.
Mostriamo la suriettività. Sia $\alpha \in \wedge^k \mathfrak{g}^*$ e definiamo:

$$\omega(g)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(d(L_{g^{-1}})_g X_1, \dots, d(L_{g^{-1}})_g X_k),$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in T_gG$. Questa è sicuramente una forma in quanto L_g è differenziabile e l'alternanza è garantita dall'alternanza di α. Inoltre è chiaro che $\omega(e) = \alpha$. Rimane da mostrare che è L-invariante:

$$\begin{aligned} (L_g^*\omega)(h)(X_1, \dots, X_k) &= \omega(gh)(d(L_g)_h X_1, \dots, d(L_g)_h X_1) = \\ &= \alpha(d(L_{h^{-1}})_h X_1, \dots, d(L_{h^{-1}})_h X_k) = \omega(h)(X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in T_hG$. Concludiamo mostrando l'iniettività. Supponiamo che $\{\omega\} = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \omega(g)(X_1, \dots, X_n) &= \omega(e)(d(L_{g^{-1}})_g X_1, \dots, d(L_{g^{-1}})_g X_n) = \\ &= \alpha(d(L_{g^{-1}})_g X_1, \dots, d(L_{g^{-1}})_g X_n) = 0, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Definiamo inoltre $\phi : \Omega_L^*(G) \longrightarrow \wedge \mathfrak{g}^*$ lineare definita da ϕ^k sulle componenti omogenee $\Omega_L^k(G)$. La seguente è una facile conseguenza:

Osservazione 2.1. ϕ è un isomorfismo di algebre graduate.

Definite le ϕ^k risulta naturale la ricerca di un $\delta^k : \left(\wedge^k \mathfrak{g}\right) \longrightarrow \left(\wedge^{k+1} \mathfrak{g}\right)^*$ che faccia commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "d"] & \Omega_L^k(G) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^k"] & \Omega_L^{k+1}(G) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^{k+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r, "\delta^{k-1}"] & \wedge \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\delta^k"] & \wedge \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\delta^{k+1}"] & \dots \end{tikzcd}$$

In analogia alla notazione usata per la derivazione esterna delle forme, chiameremo $\delta : \wedge \mathfrak{g}^* \longrightarrow \wedge \mathfrak{g}^*$ la mappa definita come δ^k sulle componenti omogenee.

Lemma 2.4. *La mappa* $\delta^k : \left(\wedge^k \mathfrak{g}\right)^* \longrightarrow \left(\wedge^{k+1}\mathfrak{g}\right)^*$ *tale che:*

$$\delta\alpha(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([\epsilon_i, \epsilon_j], \epsilon_1, \ldots, \hat{\epsilon_i}, \ldots, \hat{\epsilon_j}, \ldots, \epsilon_{k+1}),$$

dove $\forall 1 \leq i \leq k+1\ \epsilon_i \in \mathfrak{g}$, *fa commutare il diagramma sopra descritto.*

Prima di procedere con la dimostrazione ricordiamo una formula per la derivazione: $\forall \omega \in \Omega^k(G)$ si ha

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i X_i \omega(X_1, \ldots, \hat{X_i}, \ldots, X_{k+1}) + \tag{2.1}$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X_i}, \ldots, \hat{X_j}, \ldots, X_{k+1}), \tag{2.2}$$

dove gli X_i sono campi vettoriali in G. Si noti che è sufficiente il valore di X_i in un punto $g \in G$ per definire il campo su tutto G grazie a L_g, quindi per il calcolo sopra basta che gli X_i siano definiti in un punto di G.

Dimostrazione. Siano X_i i campi L-invarianti che valgono ϵ_i in e.
Mostriamo la regola di commutazione per la componente omogenea di grado k:

$$\begin{aligned}
&(\phi^{k+1} d\omega)(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k+1}) = d\omega((X_1)_e, \ldots, (X_{k+1})_e) = \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(([X_i, X_j])_e, (X_1)_e, \ldots, (\hat{X_i})_e, \ldots, (\hat{X_j})_e, \ldots, (X_{k+1})_e) = \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \{\omega\} ([\epsilon_i, \epsilon_j], \epsilon_1, \ldots, \hat{\epsilon_i}, \ldots, \hat{\epsilon_j}, \ldots, \epsilon_{k+1}) = (\delta\phi^k \omega(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k+1})),
\end{aligned}$$

dove il termine della 2.1 è nullo perché sia ω che gli X_i sono L-invarianti. □

Ne consegue l'isomorfismo di complessi voluto.
Sia $H^k\left(\wedge \mathfrak{g}^*, \delta\right)$ il k-esimo gruppo di coomologia del complesso $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$, ricordando che ϕ è un isomorfismo di algebre si ha che:

Teorema 2.5. $H_L^*(G) \simeq H^*\left(\wedge \mathfrak{g}^*, \delta\right)$ *come algebre.*

Come detto nell'introduzione del capitolo, nella prossima sezione riusciremo a dimostrare che $H^*(G) \simeq H_L^*(G)$, da cui $H^*(G) \simeq H^*\left(\wedge \mathfrak{g}^*, \delta\right)$.
Quest'ultimo risulta però poco maneggevole in quanto non si riesce a calcolare facilmente la coomologia di $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$, cercheremo quindi di affinare il risultato.
Prendiamo in considerazione le forme R-invarianti: come detto a inizio capitolo la teoria finora sviluppata si applica perfettamente anche a esse. Se G fosse abeliano le forme invarianti a destra e quelle a sinistra sarebbero le stesse, in generale questo chiaramente non è vero ma resta possibile definire $\Omega_B^k(G) = \Omega_L^k(G) \cap \Omega_R^k(G)$.
$\omega \in \Omega_B^k(G)$ sarà ancora esclusivamente determinato da $\omega(e)$, ma non per tutti gli $\alpha \in \wedge \mathfrak{g}^*$ sarà possibile trovare una k-forma che valga α in e.
Costruiamo ora il complesso delle forme bi-invarianti, vedremo che di questo è possibile calcolare la coomologia.
Le dimostrazioni fatte fino ad ora si estendono al caso bi-invariante, rivediamole velocemente:

- se $\omega \in \Omega_B^k(G)$ allora $d\omega \in \Omega_B^{k+1}(G)$ in quanto per il lemma 2.1 $d\omega$ è L e R-invariante.

- se $\omega_1 \in \Omega_B^k(G)$ e $\omega_2 \in \Omega_B^r(G)$, allora $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_B^{k+r}(G)$ in quanto per il lemma 2.2 $\omega_1 \wedge \omega_2$ è L e R-invariante.

Quindi abbiamo che $\Omega_B^\bullet(G)$ è un complesso con operazione di bordo la derivazione, inoltre l'inclusione $j : \Omega_B^k(G) \hookrightarrow \Omega^k(G)$ definisce un morfismo di complessi. Grazie al secondo punto $j : \Omega_B^*(G) \hookrightarrow \Omega^*(G)$ è un morfismo di algebre graduate che induce $j_* : H_B^*(G) \longrightarrow H^*(G)$ in coomologia: mostreremo nella seconda sezione che questo è un isomorfismo.
Analogamente a prima vogliamo ora descrivere $\Omega_B^k(G)$ in maniera prettamente algebrica. Consideriamo la restrizione $\phi^k_{|\Omega_B^k(G)} : \Omega_B^k(G) \longrightarrow \wedge^k \mathfrak{g}^*$ della funzione ϕ definita sopra; sicuramente $\phi^k_{|\Omega_B^k(G)}$ è iniettiva. Per descriverne l'immagine premettiamo una proposizione:

Definizione 2.2. Sia $Ad : G \longrightarrow \mathfrak{g}$ la rappresentazione aggiunta, ne induce una $G \curvearrowright \wedge\mathfrak{g}^*$: questa sarà l'azione di G che considereremo nel proseguo del capitolo.

Ci chiediamo dapprima quali sono gli invarianti secondo questa azione:

Proposizione 2.6. *Vale che:*

$$(\wedge^n \mathfrak{g}^*)^G = \left\{ \alpha \in \wedge^n \mathfrak{g}^* \mid \sum_{i=1}^n \alpha(\epsilon_1, \dots, [\epsilon, \epsilon_i], \dots, \epsilon_n) = 0 \; \forall \epsilon, \epsilon_i \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $exp(t\epsilon) : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dove $\epsilon \in \mathfrak{g}$ qualsiasi, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ vale:

$$\frac{d}{dt}\left(Ad(exp(t\epsilon))\beta\right)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(Ad(exp(t_0\epsilon)) \circ Ad(exp((t-t_0)\epsilon))\beta\right)\Big|_{t=t_0} = \tag{2.3}$$

$$= Ad(exp(t_0\epsilon)) \frac{d}{dt}\left(Ad(exp((t-t_0)\epsilon))\beta\right)\Big|_{t=t_0} = Ad(exp(t_0\epsilon))[\epsilon, \beta]. \tag{2.4}$$

Mostriamo ora l'uguaglianza. $\alpha \in \wedge^n \mathfrak{g}^*$ è G invariante se e solo se:

$$\alpha(Ad(exp(t\epsilon))\epsilon_1, \dots, Ad(exp(t\epsilon))\epsilon_n) = \alpha(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n),$$

$\forall \epsilon, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathfrak{g}$.
Abbiamo che differenziando l'equazione in $t = 0$, si ottiene:

$$\sum_i \alpha(\epsilon_1, \dots, [\epsilon, \epsilon_i], \dots, \epsilon_n) = 0.$$

Rimane quindi da mostrare che tutti gli α che rispettano la proprietà sono G invarianti.
Grazie a 1.7 ed essendo G connesso e compatto l'esponenziale è suriettivo, quindi $\forall g \in G$ $\exists \epsilon \in \mathfrak{g}$ tale che $exp(t\epsilon)$ è una curva di estremi e e g.
Deriviamo ora l'azione di G su α, usando l'equazione 2.3:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\alpha(Ad(exp(t\epsilon))\epsilon_1, \dots, Ad(exp(t\epsilon))\epsilon_n)\right) = \\
&= \sum_i \alpha(\epsilon_1, \dots, Ad(exp(t_0\epsilon))[\epsilon, \epsilon_i], \dots, \epsilon_n) = \\
&= \sum_i \alpha(\epsilon_1, \dots, [Ad(exp(t_0\epsilon))\epsilon, Ad(exp(t_0\epsilon))\epsilon_i], \dots, \epsilon_n) = 0,
\end{aligned}$$

la derivata è quindi nulla e l'espressione per $t = 0$ e $t = 1$ assume lo stesso valore, da cui la tesi.

□

Possiamo ora mostrare il seguente teorema:

Teorema 2.7. *Sia* $\psi^k : \Omega^k_B(G) \longrightarrow \left(\wedge^k \mathfrak{g}^*\right)^G$ *definito dalla restrizione di* ϕ^k.
ψ^k *è ben definita ed è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Vogliamo verificare in prima battuta che sia ben definita, ovvero che l'immagine di $\phi^k_{|\Omega^k_B(G)}$ sia G invariante.
Essendo ω R e L-invariante, abbiamo che $(L_g R_{g^{-1}})^*\omega = \omega$, da questo se ne deduce che

$$g \cdot \alpha = g \cdot \omega(e) = \left((L_g R_{g^{-1}})^*\omega\right)(e) = \omega(e) = \alpha.$$

Grazie a quanto già dimostrato per ϕ^k rimane da mostrare la suriettività. Sia $\alpha \in \left(\wedge^k \mathfrak{g}^*\right)^G$ e definiamo:

$$\omega(g)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(d(L_{g^{-1}})_g X_1, \dots, d(L_{g^{-1}})_g X_k),$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in T_g G$. Questa è sicuramente una forma L-invariante come già visto nella dimostrazione di 2.3 rimane da mostrare che è R-invariante:

$$\begin{aligned}
(R^*_g\omega)(h)(X_1, \dots, X_k) &= \omega(hg)(d(R_g)_h X_1, \dots, d(R_g)_h X_n) = \\
&= \alpha(d(L_{(hg)^{-1}})_{hg} d(R_g)_h X_1, \dots, d(L_{(hg)^{-1}})_{hg} d(R_g)_h X_n) = \\
&= \alpha(Ad_{g^{-1}} d(L_h^{-1})_h X_1, \dots, Ad_{g^{-1}} d(L_h^{-1})_h X_n) = \\
&= \alpha(X_1, \dots, X_n),
\end{aligned}$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in T_h G$. Da cui la tesi. □

Per come è definita l'azione di G su $\wedge\mathfrak{g}^*$, questa agisce conservando il grado e in maniera compatibile con il prodotto dell'algebra, possiamo dunque definire $\psi : \Omega^*_B(G) \longrightarrow (\wedge\mathfrak{g}^*)^G$ che dipenderà da ϕ^k sulle componenti omogenee $\Omega^k_L(G)$. La seguente è una facile conseguenza:

Osservazione 2.2. ψ è un isomorfismo di algebre graduate.

Ricordiamo ora la mappa $\delta : \wedge\mathfrak{g}^* \longrightarrow \wedge\mathfrak{g}^*$ definita precedentemente, abbiamo il seguente:

Teorema 2.8. *Sia* $\alpha \in (\wedge\mathfrak{g}^*)^G$*, allora* $\delta\alpha = 0$.

Dimostrazione. Notiamo dapprima che, fissato k, si ha:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j<k} (-1)^{j+k} \alpha([X_j, X_k], X_1, \dots, \widehat{X_j}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_{n+1}) + \\
&+ \sum_{j>k} (-1)^{j+k} \alpha([X_k, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_k}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{n+1}) = \\
&= \sum_{j<k} (-1)^{k+1} \alpha(X_1, \dots, X_{j-1}, [X_j, X_k], X_{j+1}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_{n+1}) + \\
&+ \sum_{j>k} (-1)^{k+1} \alpha(X_1, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_{j-1}, [X_j, X_k], X_{j+1}, \dots, X_{n+1}) = 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera per la proposizione 2.6. Possiamo quindi scrivere:

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{j<k} (-1)^{j+k} \alpha([X_j, X_k], X_1, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_{n+1}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j>k} (-1)^{j+k} \alpha([X_k, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}) \right) =$$
$$= 2 \sum_{j<k} (-1)^{j+k} \alpha([X_j, X_k], X_1, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_{n+1}) = 2(\delta\alpha)(X_1, \ldots, X_n),$$

da cui la tesi. □

Questo teorema sancisce l'importanza di aver considerato il complesso delle forme R e L-invarianti. Ci permette infatti di definire il complesso dei $(\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*)^G$ in quanto δ, essendo nulla, è una mappa di bordo.
abbiamo così la commutazione del seguente diagramma in quanto 2.1 commutava.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \xrightarrow{d} & \Omega^k_B(G) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}_B(G) & \xrightarrow{d} & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi^k} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^{k+1}} & & \\
\ldots & \xrightarrow{\delta} & (\wedge \mathfrak{g}^*)^G & \xrightarrow{\delta} & (\wedge \mathfrak{g}^*)^G & \xrightarrow{\delta} & \ldots .
\end{array}$$

ψ^k sono isomorfismi, quindi i due complessi sono isomorfi.
Abbiamo $H^k\left(\left(\wedge^k \mathfrak{g}^*\right)^G, \delta\right) \simeq (\wedge \mathfrak{g}^*)^G$ in quanto δ è la mappa nulla; essendo ψ un isomorfismo di algebre si ha che:

Teorema 2.9. $H^*_B(G) \simeq (\wedge \mathfrak{g}^*)^G$ *come algebre.*

Quest'ultimo risultato conclude la sezione.

2.2 Un teorema di isomorfismo di coomologie

Nella sezione precedente abbiamo visto che è possibile esprimere la coomologia delle forme invarianti (a destra, sinistra o bi-invarianti) in maniera relativamente semplice. Vogliamo dimostrare in questa sezione che sussiste un isomorfismo fra la coomologia delle sole forme invarianti e quella di tutte le forme.
Nella trattazione non sarà evitabile l'ipotesi di compattezza per G, in quanto sarà necessario lavorare fin da principio con la misura di Haar.
Supponiamo inoltre che G sia connesso, alla fine del capitolo generalizzeremo il risultato.
Apriamo la sezione mostrando l'esistenza della misura di Haar, che useremo molteplici volte:

Teorema 2.10. *Sia G gruppo di Lie compatto. È sempre possibile costruire una misura di Haar normalizzata.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \wedge^n T_e G$ non nulla (dove $n = \dim G$). Definiamo la seguente forma:

$$\omega(g)(X_1, \ldots, X_n) = \alpha((dL_g^{-1})_g X_1, \ldots, (dL_g^{-1})_g X_n).$$

Per quanto visto nella precedente sezione questa è una forma L_g invariante.
Consideriamo una base $v_1, \ldots v_n$ di $T_e G$ tale che $\alpha(v_1, \ldots, v_n) > 0$ e orientiamo la varietà

G definendo positiva la base $(dL_g)_e v_1, \ldots, (dL_g)_e v_n$ in $T_g G$.
Per definizione $\omega((dL_g)_e v_1, \ldots, (dL_g)_e v_n) > 0$, quindi ω è una forma volume e si ha $\int_G \omega > 0$. Definisco $\omega_G = \frac{1}{\int_G \omega}\omega$, anch'essa risulta chiaramente L-invariante. Sia $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, pongo

$$S(f) = \int_G f \;\omega_G.$$

Questo definisce un'integrazione di f, per mostrare che è una misura di Haar occorre verificare che è invariante per moltiplicazione destra:

$$S(f \circ L_g) = \int_G f \circ L_g \;\omega_G = \int_G f \circ L_g \circ L_{g^{-1}} \;\; {L_{g^{-1}}}_* \omega_G = \int_G f \;\omega_G = S(f),$$

Da cui la tesi. □

Data una rappresentazione di un gruppo finito possiamo definire un endomorfismo mediando l'azione di tutti gli elementi su un vettore fissato, la definizione sotto generalizza questo concetto.
Sia $d\mu$ la misura di Haar normalizzata, possiamo definire:

Definizione 2.3. Definiamo $I : \Omega^n(G) \longrightarrow \Omega^n_L(G)$ tale che

$$I\omega = \int_G L_g^* \omega \; d\mu.$$

A priori l'immagine di I è contenuta in $\Omega^n(G)$ ma è chiaro che $I\omega$ è sempre L-invariante in quanto:

$$L_h^* I\omega = \int_G L_h^*(L_g^*\omega)\; d\mu = \int_G L_{hg}^*\omega \; d\mu = \int_G L_g^*\omega \; d\mu,$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché la misura di Haar è invariante per moltiplicazione.
La seguente ci sarà utile più avanti:

Osservazione 2.3. Per ogni $\omega \in \Omega^n(G)$ si ha che la derivazione e l'operatore appena definito commutano, cioè:

$$dI\omega = Id\omega.$$

Quanto appena affermato si dimostra usando 2.1, ricordando che il differenziale commuta con L_g e infine usando la linearità dell'integrale.
Consideriamo la mappa in coomologia indotta dall'immersione $i : \Omega^k_L(H) \longrightarrow \Omega^k(G)$:

$$i_* : H^*_L(G) \longrightarrow H^*(G).$$

Il seguente teorema sarà di fondamentale importanza per mostrare che i_* è un isomorfismo:

Teorema 2.11. *Sia G connesso e compatto, $\forall \omega \in \Omega^k(G)$ esiste $\beta \in \Omega^{k-1}(G)$ tale che $\omega + d\beta = I\omega$.*

Dimostrazione. Si indichi con $[c] \in H_n(G, \mathbb{R})$ la classe di $c = \sum_i r_i Z_i$ nell'omologia, dove Z_i è una sottovarietà liscia n-dimensionale chiusa. Indichiamo inoltre con $[\omega] \in H^n(G)$ la classe della forma ω. Grazie al teorema di de Rham abbiamo che la forma bilineare $\langle , \rangle : H^n(G) \times H_n(G, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\langle [\omega], [c] \rangle = \sum_i r_i \int_{Z_i} \omega,$$

è non degenere (si noti inoltre che per compattezza è sempre ben definito).
Questo ci permette di asserire che se per ogni Z sottovarietà chiusa n-dimensionale si ha che

$$\int_Z \omega - I\omega = 0,$$

si deve quindi avere necessariamente che $\omega - I\omega$ è esatta, da cui l'esistenza di β cercato nella tesi. Mostriamo quanto voluto.
Come prima osservazione notiamo che $\forall g \in G$, $L_g : G \longrightarrow G$ è omotopa all'identità in quanto, per connessione di G, esiste un cammino γ che connette e con g e quindi $L_{\gamma(t)}$ è l'omotopia cercata. Ne consegue che $(L_g)_* : H_n(G,\mathbb{R}) \longrightarrow H_n(G,\mathbb{R})$ è l'identità e quindi $[L_g Z] = [Z]$ per ogni Z sottovarietà n-dimensionale chiusa, questo grazie alla forma bilineare definita sopra ci permette di affermare che

$$\int_Z \omega = \int_{L_g Z} \omega,$$

$\forall \omega \in \Omega^n(G)$ con $d\omega = 0$.
$L_g^*\omega$ è continua da un compatto quindi $L_g^*\omega$ è limitata e grazie a Fubini-Tonelli si ha:

$$\int_Z (\omega - I\omega) = \int_Z \omega - \int_Z \int_G L_g^*\omega \, d\mu = \int_Z \omega - \int_G \int_Z L_g^*\omega \, d\mu.$$

Usando l'osservazione fatta precedentemente abbiamo:

$$\int_Z \omega - \int_G \int_{L_g Z} \omega \, d\mu = \int_Z \omega - \int_G \int_Z \omega \, d\mu = 0,$$

dove l'ultimo passaggio è vero perché la misura di Haar è normalizzata.
Unendo le due equazioni sopra abbiamo la tesi.

□

Mostriamo ora finalmente che

Proposizione 2.12. $H_L^k(G) \simeq H^k(G)$ *dato dall'applicazione indotta dall'inclusione.*

Dimostrazione. Mostriamo l'iniettività. Sia $\beta \in \Omega_L^k(G)$ tale che $0 = [\beta]$ in $H^k(G)$, cioè esiste $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ tale che $d\omega = \beta$, consideriamo $I\omega$:

$$d(I\omega) = I d\omega = I\beta = \beta,$$

dove il primo passaggio è vero per l'osservazione 2.3, mentre l'ultimo è dato dal fatto che β è L-invariante.
Mostriamo ora la suriettività. Sia $[\omega] \in H^k(G)$, applicando il teorema 2.11 a ω, otteniamo β tale che $\omega + d\beta = I\omega \in \Omega_L^k(G)$ e quindi $[\omega] = [I\omega] \in H^k(G)$ da cui la suriettività.
Il teorema risulta quindi mostrato. □

Visto che $i_* : H_L^*(G) \longrightarrow H^*(G)$ è di algebre graduate abbiamo che:

Teorema 2.13. $H_L^*(G) \simeq H^*(G)$ *come algebre graduate.*

Questo conclude la prima parte della sezione.
Vogliamo ora mostrare che sussiste un isomorfismo anche se restringiamo la classe delle forme L-invarianti a quelle che sono anche R-invarianti. Anche in questo caso supporremo che G sia connesso e compatto.
La trattazione segue la linea della precedente dimostrazione, occorrono solo piccole modifiche.
Ci serviamo di un operatore media che agisca anche per moltiplicazione sinistra:

Definizione 2.4. Sia $A : \Omega^n(G) \longrightarrow \Omega^n_B(G)$ definita da

$$A\omega = \int_G \int_G (R_h \circ L_g)^* \omega \, d\mu(h) d\mu(g).$$

A priori l'immagine di A è contenuta in $\Omega^n(G)$ ma è chiaro che $A\omega$ è sempre L e R-invariante, la dimostrazione di questo è del tutto analoga a quella fatta per $L_h^* I\omega = I\omega$, solo che in questo caso si ha sia invarianza destra che sinistra.
Premettiamo un'osservazione:

Osservazione 2.4. ω è una funzione continua da un compatto, quindi applicando Fubini-Tonelli si ha:

$$\begin{aligned} A\omega &= \int_G \int_G (R_h \circ L_g)^* \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = \int_G \int_G R_h^* \circ L_g^* \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = \\ &= \int_G R_h^* \int_G L_g^* \omega \, d\mu(g) d\mu(h) = \int_G R_h^* I\omega \, d\mu(h). \end{aligned}$$

La seguente, come prima, ci sarà utile più avanti:

Osservazione 2.5. Per ogni $\omega \in \Omega^n(G)$ si ha che la derivazione e l'operatore appena definito commutano, cioè:

$$dA\omega = Ad\omega.$$

Dimostrazione. Per l'osservazione appena fatta e la 2.3 abbiamo:

$$d \int_G R_h^* I\omega \, d\mu(h) = \int_G dR_h^* I\omega \, d\mu(h) = \int_G R_h^* Id\omega \, d\mu(h),$$

da cui la tesi. □

Consideriamo la mappa in coomologia indotta dall'immersione $i : \Omega^k_B(H) \longrightarrow \Omega^k(G)$:

$$i_* : H^*_B(G) \longrightarrow H^*(G).$$

Ancora una volta risulta di fondamentale importanza il seguente:

Teorema 2.14. *Sia G connesso e compatto, $\forall \omega \in \Omega^k(G)$ esiste $\beta \in \Omega^{k-1}(G)$ tale che $\omega + d\beta = A\omega$*

Dimostrazione. Percorrendo gli stessi passi della dimostrazione precedente abbiamo che la tesi si riduce a mostrare che:

$$\int_Z \omega - A\omega = 0.$$

Ancora una volta abbiamo che $(L_g)_* : H_n(G, \mathbb{R}) \longrightarrow H_n(G, \mathbb{R})$ è l'identità, analogamente si mostra che anche $(R_g)_*$ è l'identità e quindi $[L_g Z] = [Z]$ e $[R_g Z] = [Z]$ per ogni Z sottovarietà n-dimensionale chiusa, questo grazie alla forma bilineare definita sopra ci permette di affermare che

$$\int_Z \omega = \int_{R_g \circ L_h Z} \omega,$$

$\forall \omega \in \Omega^n(G)$. Grazie a Fubini-Tonelli, in maniera del tutto analoga a prima, si ha:

$$\begin{aligned} &\int_Z (\omega - A\omega) = \int_Z \omega - \int_Z \int_G \int_G R_h^* L_g^* \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = \\ &= \int_Z \omega - \int_G \int_G \int_Z R_h^* L_g^* \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = \int_Z \omega - \int_G \int_G \int_{R_h \circ L_g Z} \omega \, d\mu(h) d\mu(g). \end{aligned}$$

Usando l'osservazione fatta precedentemente abbiamo:

$$\int_Z \omega - \int_G \int_G \int_{R_h \circ L_g Z} \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = \int_Z \omega - \int_G \int_G \int_Z \omega \, d\mu(h) d\mu(g) = 0.$$

Dove l'ultimo passaggio è vero perché la misura di Haar è normalizzata.
Unendo le due equazioni sopra abbiamo la tesi.

□

Ancora analogamente a prima abbiamo

Proposizione 2.15. $H_B^k(G) \simeq H^k(G)$ *dato dall'applicazione indotta dall'inclusione.*

Dimostrazione. Mostriamo l'iniettività. Sia $\beta \in \Omega_B^k(G)$ tale che $0 = [\beta]$ in $H^k(G)$, cioè esiste $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ tale che $d\omega = \beta$, consideriamo $A\omega$:

$$d(A\omega) = Ad\omega = A\beta = \beta,$$

dove il primo passaggio è vero per l'osservazione 2.5, mentre l'ultimo è dato dal fatto che β è L e R-invariante.
Mostriamo ora la suriettività. Sia $[\omega] \in H^k(G)$, applicando il teorema 2.14 a ω, otteniamo β tale che $\omega + d\beta = A\omega \in \Omega_B^k(G)$ e quindi $[\omega] = [A\omega] \in H^k(G)$ da cui la suriettività.
Il teorema risulta quindi mostrato. □

Visto che $i_* : H_B^*(G) \longrightarrow H^*(G)$ è di algebre graduate abbiamo che:

Teorema 2.16. $H_B^*(G) \simeq H^*(G)$ *come algebre.*

Unendo i risultati finora ottenuti:

Teorema 2.17. *Valgono i seguenti isomorfismi di algebre graduate:*

$$H^*(G) \simeq H^*(\wedge \mathfrak{g}^*, \delta) \simeq ((\wedge \mathfrak{g})^*)^G .$$

Questo è il principale risultato del capitolo.
Vediamo ora di dedurre qualche informazione per i gruppi di coomologia di indice basso.

Teorema 2.18. *Sia G compatto e connesso, tale che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice, si ha che:*

$$H^1(G) = 0 \quad , \quad H^2(G) = 0 \quad \text{e} \quad H^3(G) \neq 0.$$

Dimostrazione. $\alpha \in H^1(G) = (\mathfrak{g}^*)^G$ se e solo se $\alpha([\epsilon, \epsilon_1]) = 0 \ \forall \epsilon, \epsilon_1 \in \mathfrak{g}$; essendo $\mathfrak{g}$ semisemplice, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ e quindi necessariamente $\alpha = 0$, da cui la prima tesi.
Mostriamo la seconda. Data $\beta \in \left(\wedge^2 \mathfrak{g}^*\right)^G$, abbiamo

$$\beta([\epsilon_3, \epsilon_1], \epsilon_2) + \beta(\epsilon_1, [\epsilon_3, \epsilon_2]) = 0,$$

$\forall \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathfrak{g}$ inoltre vale $\delta\beta = 0$ per il teorema 2.8, quindi:

$$(-1)\beta([\epsilon_1, \epsilon_2], \epsilon_3) + \beta([\epsilon_1, \epsilon_3], \epsilon_2) + (-1)\beta([\epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_1) = 0$$

$\forall \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathfrak{g}$.
(Si noti che 2.8 è stato usato per brevità, chiaramente l'equazione deriva dalla proposizione 2.6). Sommando le equazioni si ottiene $\beta([\epsilon_1, \epsilon_2], \epsilon_3)$, ricordando che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ si ha che $\beta = 0$.

Per dimostrare l'ultima tesi basta esibire una 3-forma invariante non nulla. Sia $\mathfrak{K}$ la forma di Killing di $\mathfrak{g}$, definiamo:

$$\gamma(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \mathfrak{K}([\epsilon_1, \epsilon_2], \epsilon_3).$$

Essendo $\mathfrak{K}$ non degenere e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ abbiamo che γ è non nulla.
γ è antisimmetrica, basta verificarlo sulle permutazioni $(1, 2)$ e $(2, 3)$ che generano S_3: per la permutazione $(1, 2)$ è ovvio perché il primo vettore cambia segno, per $(2, 3)$ invece

$$\gamma(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_2) = \mathfrak{K}([\epsilon_1, \epsilon_3], \epsilon_2) = -\mathfrak{K}(\epsilon_3, [\epsilon_1, \epsilon_2]) = -\mathfrak{K}([\epsilon_1, \epsilon_2], \epsilon_3) = -\gamma(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_2),$$

dove abbiamo usato una proprietà della forma di killing.
Mostriamo ora che è G-invariante:

$$\begin{aligned}
&\gamma([\epsilon, \epsilon_1], \epsilon_2, \epsilon_3) + \gamma(\epsilon_1, [\epsilon, \epsilon_2], \epsilon_3) + \gamma(\epsilon_1, \epsilon_2, [\epsilon, \epsilon_2]) = \\
&= \mathfrak{K}([[\epsilon, \epsilon_1], \epsilon_2], \epsilon_3) + \mathfrak{K}([\epsilon_1, [\epsilon, \epsilon_2]], \epsilon_3) + \mathfrak{K}([\epsilon_1, \epsilon_2], [\epsilon, \epsilon_3]) = \\
&= \mathfrak{K}([[\epsilon, \epsilon_1], \epsilon_2], \epsilon_3) + \mathfrak{K}([\epsilon_1, [\epsilon, \epsilon_2]], \epsilon_3) - \mathfrak{K}([\epsilon, [\epsilon_1, \epsilon_2]], \epsilon_3) = \\
&= \mathfrak{K}([[\epsilon, \epsilon_1], \epsilon_2] + [[\epsilon_2, \epsilon], \epsilon_1] + [[\epsilon_1, \epsilon_2], \epsilon], \epsilon_3) = 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera grazie all'identità di Jacobi. Quindi abbiamo anche la terza tesi. □

Cerchiamo ora un criterio per capire quando $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di G è semisemplice

Proposizione 2.19. *Sia G un gruppo di Lie compatto. La relativa algebra di Lie, $\mathfrak{g}$, è semisemplice se e solo se $H^1(G) = 0$.*

Dimostrazione. Un'algebra di Lie di un gruppo compatto è sempre riduttiva, cioè del tipo $\mathfrak{b} + \mathfrak{s}$ con $\mathfrak{s}$ nel centro di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{b}$ semisemplice. Si ha quindi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ se e solo se $\mathfrak{s} = 0$ che equivale ad affermare l'equivalenza fra la semisemplicità di $\mathfrak{g}$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
Mostriamo ora che $H^1(G) = 0$ se e solo se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Supponiamo per assurdo $(\mathfrak{g}^*)^G = H^1(G) = 0$ e che esista $\epsilon \in \mathfrak{g}$ tale che $\epsilon \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, allora $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tale che se valutata in un vettore del sottospazio $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nulla ma $\alpha(\epsilon) = 1$ sarebbe G-invariante e quindi si avrebbe $H^1(G) \neq 0$. L'altra freccia è già stata mostrata nel primo punto del teorema precedente. □

Abbiamo quindi:

Teorema 2.20. *S^0, S^1, S^3 sono le uniche sfere che ammettono una struttura di gruppo di Lie compatibile con la topologia*

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che le suddette sono le uniche sfere che ammettono una struttura di gruppo di Lie compatibile con quella liscia.
Sicuramente $S^0 = \mathbb{Z}_2$, $S^1 = U(1)$ e S^3 si può vedere come il gruppo dei quaternioni a norma unitaria.
Supponiamo che esista una struttura di gruppo di Lie per n diverso dai precedenti.
Essendo $n > 1$, $H^1(S^n)$ è banale, quindi $\mathfrak{g}$ è semisemplice.
Usando il teorema 2.18 si ottiene $H^3(S^n) \neq 0$. Per n diverso dai tre valori sopra specificati $H^3(S^n) = 0$, nessun $n \neq 0, 1, 3$ è quindi accettabile, da cui la tesi. □

Concludiamo il capitolo analizzando i gruppi di Lie G compatti ma non necessariamente connessi.

Lemma 2.21.

Lemma 2.22. *compconne Sia G^0 la componente connessa di G, gruppo di Lie compatto, che contiene l'identità. G^0 è un gruppo di Lie connesso.*

Dimostrazione. Basta mostrare che G^0 è un sottogruppo di G in quanto chiaramente G^0 sarà una varietà liscia in cui l'inversa e la moltiplicazione sono operazioni lisce.
Sia $g \in G^0$ e sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow G$ cammino liscio che lo collega all'identità, cioè tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$.
Consideriamo $g^{-1} \cdot \gamma$, questo è un cammino che collega g^{-1} e e, da cui $g^{-1} \in G^0$.
Sia ora $h \in G^0$, mostriamo che $h \cdot g \in G^0$: ancora una volta consideriamo $h \cdot \gamma$, questo è un cammino che collega h e $h \cdot g$, da cui $h \cdot g \in G^0$. Quindi la tesi in quanto G^0 è chiaramente connesso. □

Poniamo:

Definizione 2.5. Sia G un gruppo di Lie, definiamo con $G^{(a)}$ la componente connessa di G che contiene (a).

Ricordando che un diffeomorfismo permuta le componenti connesse, si ha:

Osservazione 2.6. L'applicazione $L_a : G^0 \longrightarrow G^{(a)}$ è un diffeomorfismo.

Possiamo ora generalizzare al caso non connesso:

Teorema 2.23. *Sia G un gruppo di Lie compatto e sia n il numero delle sue componenti connesse, si ha:*

$$H^*(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} (\wedge \mathfrak{g}^*)^{G^0} \quad , \quad H^*(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} (\wedge \mathfrak{g}^*)^{G^0} \, ,$$

dove il prodotto $\wedge$ dell'anello coomologico opera componente per componente.

Dimostrazione. Notiamo subito che per compattezza di G ci sono un numero finito di componenti connesse, prendo un elemento per ognuna di queste (avendo premura di prendere l'identità per G^0), chiamo questi $a_1, \dots, a_n$.
Abbiamo che:

$$H^i(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^i(G^{(a_i)}) \quad , \quad H^*(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^*(G^{(a_i)}),$$

dove il prodotto $\wedge$ dell'anello coomologico opera componente per componente.
Grazie all'osservazione 2.6 abbiamo che $H^*(G^{(a_i)}) \simeq H^*(G^0)$, da cui la tesi. □

Capitolo 3

L'azione dei gruppi di riflessione sui polinomi e sulle forme

Questo capitolo è interamente dedicato allo studio dell'azione naturale dei gruppi di pseudoriflessione e riflessione sull'algebra dei polinomi e delle forme.
È diviso in quattro sezioni: nelle prime due si studierà l'azione sui polinomi e nelle restanti si estenderà lo studio alle forme e infine ai polinomi armonici.
In particolare dimostreremo il teorema di Chevalley che caratterizza l'algebra dei polinomi invarianti. Inoltre sarà di fondamentale importanza il teorema di Solomon, che grazie al risultato ottenuto da Chevalley descrive le forme invarianti. Questo capitolo fornirà gli strumenti per comprendere la coomologia di de Rham dei gruppi di Lie compatti, che vedremo nel proseguo della tesi.
In tutta la trattazione assumeremo di lavorare su spazi sul campo K di caratteristica zero e nello specifico saremo interessati al caso in cui lo spazio su cui agisce il gruppo è reale, anche se, ove possibile, cercheremo di essere più generali.
Il materiale esposto in questa sezione si basa su [Hum90], [Hel84] e [Sol63].

3.1 Azione sull'algebra dei polinomi e teorema di Chevalley

Lo scopo di questa sezione è quello di introdurre e descrivere l'azione lineare dei gruppi di pseudoriflessione finiti (definiti nel primo capitolo) sui polinomi. In particolare studieremo l'anello invariante grazie alla descrizione fornitaci dal teorema di Chevalley.
Sia E uno spazio vettoriale su K di dimensione finita e sia $W < \mathrm{GL}(E, K)$ un gruppo di pseudoriflessione finito. W agisce naturalmente su E come rappresentazione, indicheremo questa con $W \curvearrowright E$.
Definiamo ora $S = S(E^*)$ l'algebra graduata simmetrica di E^* dotata dell'usuale prodotto. Consideriamo la rappresentazione duale $W \curvearrowright E^*$ definita da $w \cdot v(\_) = v(w^{-1}\_)$ dove $w \in W$ e $v \in E^*$, questa definisce una rappresentazione $W \curvearrowright S$ compatibile con la moltiplicazione, cioè dati $w \in W$ e $a, b \in S$ si ha $w \cdot (ab) = (w \cdot a)(w \cdot b)$.

Osservazione 3.1. Possiamo identificare S con l'algebra graduata dei polinomi $K[x_1, \ldots, x_n]$ dove $n = \dim(E)$ e $x_1, \ldots x_n$ sono una base di E^* (chiaramente è un isomorfismo di algebre graduate). La suddetta è l'azione sull'anello dei polinomi che andremo a studiare.

Definiamo $R = S^W \subset S$ il sottospazio degli elementi W-invarianti.
Si noti che il grado è invariante sotto l'azione del gruppo e che questa è compatibile con la moltiplicazione: R è quindi un'algebra graduata.
Possiamo definire $W \curvearrowright L = \mathrm{Frac}\,(S)$ rappresentazione in quanto l'azione di W (definita

dall'azione su numeratore e denominatore) è compatibile con la moltiplicazione. Abbiamo il seguente:

Lemma 3.1. *Si ha che* $\mathrm{Frac}\,(R) = (\mathrm{Frac}\,(S))^W = L^W$

Dimostrazione. Chiaramente $\mathrm{Frac}\,(R) \subset L^W$. Mostriamo l'altra inclusione.
Sia $\frac{f}{g} \in L^W$, moltiplicando numeratore e denominatore per $\prod_{w\in W,\, w\neq e} w \cdot f$ (dove con e si intende l'identità del gruppo) abbiamo:

$$\frac{f}{g} = \frac{\left(\prod_{w\in W,\, w\neq e} w \cdot f\right) f}{\left(\prod_{w\in W,\, w\neq e} w \cdot f\right) g},$$

questa frazione è invariante. Guardando il numeratore si ha che questo è di per se invariante, di conseguenza anche il denominatore lo è, perciò $\frac{f}{g} \in \mathrm{Frac}\,(R)$ e quindi la tesi □

Osservazione 3.2. Il grado di trascendenza di R su K è n.

Dimostrazione. Consideriamo l'estensione $L^W \subset L$, questa è un'estensione di grado di trascendenza nulla, quindi si ha necessariamente che $\mathrm{trdeg}_K(L^G) = \mathrm{trdeg}_K L = n$ in quanto $K \subset L^G \subset L$, la tesi è quindi verificata in quanto L^G è il campo dei quozienti di R per il lemma appena mostrato. □

Al fine di studiare R vorremmo trovare dei generatori. Ci chiediamo preliminarmente se ne esistono un insieme finito. Grazie al teorema della base di Hilbert si vedrà che la risposta è affermativa. Introduciamo ora l'operatore # che sarà anche utile per dimostrare quanto appena affermato.

Definizione 3.1. Sia $\# : f \mapsto f^{\#}$ con $f \in K[x_1, \ldots x_n]$ operatore lineare di media tale che:

$$f^{\#} = \frac{1}{|W|} \sum_{g\in W} g \cdot f.$$

Facciamo da subito tre osservazioni

Osservazione 3.3. Valgono le seguenti:

- # mantiene il grado, in quanto l'azione di W lo mantiene.
- $f^{\#} \in R$ e # ristretto a R è l'identità.
- Se $f \in R$ e $g \in S$, allora $(fg)^{\#} = fg^{\#}$, grazie alla compatibilità dell'azione con somma e prodotto.

Definizione 3.2. Sia I^+ l'ideale di S generato dalle $f \in R$ omogenee di grado strettamente positivo.

Grazie al teorema della base di Hilbert esistono $f_1, \ldots f_t$ numero finito di polinomi in I^+ che generano l'ideale, essendo ogni f_i funzione di un numero finito di elementi omogenei di R allora esistono $g_1, \ldots, g_j$ numero finito di elementi omogenei di R che generano I^+.

Teorema 3.2. *Siano* $g_1, \ldots, g_j$ *come sopra, questi unitamente con* 1 *generano* R *come* K*-algebra.*

Dimostrazione. Essendo R un'algebra graduata basterà dimostrare che generano tutti gli elementi omogenei, dimostriamolo per induzione. Il passo base è ovvio in quanto gli unici elementi di grado nullo sono le costanti. Mostriamo il passo induttivo, sia $f \in R$ di grado k, per quanto detto sopra esistono $h_1, \ldots, h_j$ in S tali che:

$$f = \sum_{i=1}^{j} h_i g_i.$$

Osserviamo dapprima che possiamo supporre gli h_i omogenei perché sia f che i g_i lo sono, in particolare avremo che $\deg(h_i) = \deg(f) - \deg(g_i)$. Applicando ora # e ricordando le osservazioni 3.3, abbiamo che:

$$f = \sum_{i=1}^{j} h_i^{\#} g_i,$$

dove chiaramente $h_i^{\#} \in R$ ed è omogeneo. Siccome $\deg(h_i) = \deg(f) - \deg(g_i) < \deg(f)$ (perché g_i non ha mai grado nullo), abbiamo che per ipotesi induttiva sul grado gli $h_i^{\#}$ sono generati da $g_1, \ldots g_j$ e quindi anche f lo è. □

Visto quanto appena mostrato, la domanda logicamente successiva che ci possiamo porre è quella di cercare dei generatori che siano anche algebricamente indipendenti. Diamo quindi una definizione:

Definizione 3.3. Chiamiamo $g_1, \ldots, g_l$ base di invarianti se sono elementi omogenei di grado positivo di R algebricamente indipendenti che generano (unitamente a 1) R come K-algebra.

La restante parte di questo paragrafo sarà dedicata alla dimostrazione dell'esistenza di una base di invarianti e alla sua determinazione.
Premettiamo un lemma del tutto algebrico:

Lemma 3.3. *Siano l, f polinomi in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Se l è omogeneo di grado 1 e f si annulla su tutti gli zeri di l allora $l \mid f$.*

Dimostrazione. Siccome l non può essere una costante esiste un cambio di coordinate lineari tale che $l = x_1$.
Possiamo scrivere il polinomio:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 a(x_1, \ldots, x_n) + b(x_2, \ldots, x_n),$$

che deve annullarsi valutato in $x_1 = 0$. Abbiamo quindi che il polinomio $b(x_2, \ldots, x_n)$ è nullo per ogni scelta di $(x_2, \ldots, x_n)$ e quindi, siccome $\operatorname{Char} K = 0$, è necessariamente il polinomio nullo. Da questo si deduce che $l \mid f$. □

Finora nella trattazione non abbiamo usato che W è di pseudoriflessione, la necessità di questa ipotesi è sancita dalla seguente proposizione che risulterà fondamentale per mostrare il teorema di Chevalley.

Proposizione 3.4. *Siano $f_1, \ldots f_j$ elementi di S^W tali che f_1 non è contenuti nell'ideale generato da $f_2, \ldots f_j$ in R supponiamo che esistano $g_1, \ldots g_j$ omogenei in S tali che $\sum_{i=1}^{j} g_i f_i = 0$ allora $g_1 \in I^+$.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che f_1 non deve appartenere all'ideale generato da $f_2, \dots f_j$ su S. Se così non fosse si avrebbe che esisterebbero u_i in S tali che:

$$f_1 = \sum_{i=2}^{j} u_i f_i.$$

Usando ancora una volta l'operatore # e le osservazioni 3.3, otterremmo:

$$f_1 = \sum_{i=2}^{j} u_i^{\#} f_i,$$

con $u_i \in R$, da cui si avrebbe f_1 nell'ideale generato da $f_2, \dots, f_j$ in R. Mostriamo ora il lemma per induzione sul grado di g_1. Se g_1 è costante allora:

$$g_1 f_1 = -\sum_{i=2}^{j} g_i f_i,$$

e quindi se $g_1 \neq 0$ avrei una contraddizione per quanto appena mostrato su f_1.
Mostriamo ora il passo induttivo. Sia $s \in W$ una pseudoriflessione, H lo spazio $n-1$ dimensionale degli elementi fissati da s. Sicuramente $0 = s \cdot \sum_{i=1}^{j} g_i f_i = \sum_{i=1}^{j} (s \cdot g_i) f_i$ e sottraendo con l'equazione $\sum_{i=1}^{j} g_i f_i$ otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{j} (s \cdot g_i - g_i) f_i = 0.$$

Sia l il polinomio omogeneo di primo grado che ha il sottospazio H come soluzione, sicuramente $s \cdot g_i = g_i$ in quanto H è fissato da s. Applichiamo il lemma precedente, possiamo scrivere $s \cdot g_i - g_i = l h_i$ con $h_i \in S$ e omogeneo (in quanto $s \cdot g_i - g_i$ lo è), da cui abbiamo:

$$l \left(\sum_{i=1}^{j} h_i f_i \right) = 0,$$

e quindi $\sum_{i=1}^{j} h_i f_i = 0$, applicando l'ipotesi induttiva sugli h_i (in quanto $\deg(h_1) < \deg(g_1)$) si ottiene che $s_\alpha \cdot g_1 - g_1 = l h_1 \in I^+$. Abbiamo perciò $s_\alpha \cdot g_1 \equiv g_1 \pmod{I^+}$ e siccome gli s generano W allora $w \cdot g_1 \equiv g_1 \pmod{I^+}$ $\forall w \in W$. Usando ancora una volta l'operatore # e quanto appena mostrato, abbiamo:

$$g_1 \equiv g_1^{\#} \equiv 0 \pmod{I},$$

da cui la tesi. □

Prima di passare al teorema principale di questa sezione ricordiamo la seguente identità facilmente dimostrabile:

Lemma 3.5 (Identità di Eulero)**.** *Sia $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio omogeneo, abbiamo che:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \deg(f) f.$$

Premessi questi lemmi possiamo finalmente enunciare e dimostrare il seguente:

Teorema 3.6 (Teorema di Chevalley)**.** *Data l'azione di un gruppo di riflessione W su S, si ha che R ammette una base di invarianti e questa ha cardinalità n (dimensione di E).*

Dimostrazione. Siano $g_1, \dots, g_j$ come nel teorema 3.2, estraiamo da questi un insieme minimale di generatori per l'ideale I^+, senza perdita di generalità possiamo supporre essere $g_1, \dots, g_l$. Grazie al risultato appena citato ci basta dimostrare che $g_1, \dots, g_l$ sono algebricamente indipendenti per avere la tesi.
Supponiamo per assurdo che non lo siano, allora esisterebbe un polinomio h tale che $h(g_1, \dots g_l) = 0$. Sia $d_i = \deg(g_i)$, guardando un generico monomio di h, questo sarà della forma $ax_1^{r_1} \dots x_l^{r_l}$ grazie a semplici considerazioni sul grado possiamo ridurci a un polinomio h tale che $\sum_{i=1}^{l} d_i r_i$ è costante per ogni monomio che compone h. Differenziamo formalmente come polinomio $h(g_1, \dots, g_l)$ rispetto x_k, per la chain rule vale:

$$\sum_{i=1}^{l} h_i \cdot \frac{\partial g_i}{x_k} = 0, \tag{3.1}$$

dove $h_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(g_1, \dots, g_l)$.
Chiaramente $h_i \in R$, consideriamo l'ideale J generato dagli h_i in R, estraggo dagli h_i un insieme minimale di generatori per J che senza perdita di generalità possiamo supporre essere $h_1, \dots, h_r$. Possiamo scrivere quindi $h_i = \sum_{v=1}^{r} g_{i,v} h_v$ con $g_{i,v} \in R$ omogenei in quanto gli h_i lo sono.
Sostituendo questa nell'equazione 3.1 (notiamo che $g_{i,v} = \delta_{i,v}$ per $i \leq r$) otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{r} h_i \left(\frac{\partial g_i}{x_k} + \sum_{e=r+1}^{l} g_{e,i} \frac{\partial g_e}{x_k} \right) = 0. \tag{3.2}$$

$\frac{\partial g_i}{x_k} + \sum_{e=r+1}^{l} g_{e,i} \frac{\partial g_e}{x_k}$ è omogeneo di grado $r_i - 1$, quindi possiamo applicare il lemma 3.4, ottenendo che:

$$\frac{\partial g_1}{x_k} + \sum_{e=r+1}^{l} g_{e,1} \frac{\partial g_e}{x_k} = \sum_{i=1}^{l} g_i q_i,$$

per qualche $q_i \in S$, perché $g_1, \dots, g_l$ sono generatori di I^+.
Usiamo ora la formula di Eulero moltiplicando l'uguaglianza appena trovata per x_k e sommando il tutto al variare di k, si ha che:

$$\deg(g_1) g_1 + \sum_{e=r+1}^{l} g_{e,1} \deg(g_e) g_e = \sum_{i=1}^{l} g_i t_i,$$

dove i t_i hanno grado strettamente positivo. Guardando i gradi al membro di sinistra ho un polinomio omogeneo di grado $\deg g_1$, mentre a destra si ha $\deg g_1 t_1 > \deg g_1$ per cui, essendo tutti i g_i omogenei devono esistere $o_i \in S$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{l} g_i t_i = \sum_{i=2}^{l} g_i o_i,$$

e quindi si avrebbe che

$$\deg(g_1) g_1 = \sum_{i=2}^{l} g_i o_i - \sum_{e=r+1}^{l} g_{e,1} \deg(g_e) g_e.$$

Ciò è assurdo in quanto $g_1, \dots g_l$ sono generatori minimali per I^+, da ciò ne conclude che sono algebricamente indipendenti.
$g_1, \dots g_l$ generano l'algebra e sono algebricamente indipendenti, quindi usando l'osservazione 3.2 necessariamente $l = n$.

$\square$

Osservazione 3.4. La dimostrazione appena fatta è costruttiva, dato un insieme di generatori di I^+ in R e omogenei, possiamo scegliere la base di invarianti scegliendone un sottoinsieme minimale di generatori.

3.2 Base di invarianti

Questa sezione si può considerare come il proseguimento naturale della precedente, sorgono infatti spontanee alcune domande che riguardano le base di invarianti. Cercheremo di rispondere almeno a quelle necessarie per comprendere il lavoro dei prossimi capitoli.
Ci si può accorgere facilmente che una base di invarianti non è unica (basta pensare al caso dell'azione di S_n), mentre invece risultano unici i gradi dei polinomi che la compongono.
I gradi in questione entrano in gioco nel calcolo della coomologia di de Rham: dedicheremo la prima parte della sezione interamente a essi.
Nella seconda parte mostreremo due risultati volti a determinare se un dato insieme di polinomi è una base di invarianti.
Per dimostrare i primi risultati supporremo W di pseudoriflessione mentre, a partire dal teorema 3.11 lavoreremo nel caso particolare in cui il campo base sarà $\mathbb{R}$ e i gruppi di riflessione.
Cominciamo con il supporre quindi W di pseudoriflessione, segnaleremo più avanti quando sarà necessario rafforzare questa ipotesi.
Come appena promesso nell'introduzione della sezione, mostriamo che i gradi sono unici:

Teorema 3.7. *Siano $f_1, \dots f_n$ e $g_1, \dots g_n$ due basi di invarianti e siano d_i e e_i i rispettivi gradi dei polinomi. A meno dell'ordine $d_i = e_i$.*

Dimostrazione. Essendo entrambe basi di invarianti abbiamo che $f_i = h_i(g_1, \dots, g_n)$ e $g_i = k_i(f_1, \dots, f_n)$ con h_i e k_i polinomi. Possiamo supporre preliminarmente che $h_i(g_1, \dots, g_n)$ sia una combinazione lineare di monomi $g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n}$ tali che $d_i = \sum_1^n e_i t_i$ cioè che non contenga monomi il cui grado complessivamente non sia quello di f_i, possiamo fare l'analoga assunzione per i k_i. Chiaramente vale:

$$f_i = h_i(k_1(f_1, \dots, f_n), \dots, k_n(f_1, \dots, f_n)),$$

che è vera come uguaglianza formale nelle f_i in quanto sono algebricamente indipendenti. Derivando l'uguaglianza formalmente in f_k e usando la chain rule si ottiene:

$$\delta_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i(k_1(f_1, \dots, f_n), \dots, k_n(f_1, \dots, f_n))}{\partial x_j} \frac{\partial(k_j(f_1, \dots, f_n))}{\partial f_k},$$

questa può essere interpretata come la seguente equazione di matrici:

$$\left(\frac{\partial h_i(k_1(f_1, \dots, f_n), \dots, k_n(f_1, \dots, f_n))}{\partial x_j} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial(k_j(f_1, \dots, f_n))}{\partial f_k} \right)_{j,k} = Id_n,$$

dove con $()_{i,j}$ si intende la matrice che nella posizione (i,j) vale l'argomento specificato. Guardando i determinanti delle matrici abbiamo che det $\left(\frac{\partial(k_j(f_1,\dots,f_n))}{\partial f_k} \right)_{k,j} \neq 0$: sviluppando il determinante abbiamo cha almeno uno degli addendi è non nullo, ovvero che $\exists\, \sigma \in S_n$ tale che:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial(k_i(f_1, \dots, f_n))}{\partial f_{\sigma(i)}} \neq 0.$$

A meno di permutare gli f_i possiamo supporre che σ sia l'identità.
Se ne ricava che

$$\frac{\partial(k_i(f_1,\dots,f_n))}{\partial f_i} \neq 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}\,.$$

Visto quanto imposto sui gradi dei monomi dei k_i e ricordando che $g_i = k_i(f_1,\dots,f_n)$ si ha $e_i = \deg g_i \geq \deg f_i = d_i$ $\forall i$.
Sommando al variare degli i abbiamo $\sum_{i=1}^n e_i \geq \sum_{i=1}^n d_i$: applicando lo stesso ragionamento invertendo il ruolo degli f_i con quello dei g_i abbiamo la disuguaglianza inversa, quindi $\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n d_i$. Utilizzando nuovamente la prima disuguaglianza si ottiene $e_i = d_i$, cioè la tesi.

□

Lo spirito dei prossimi teoremi è quello di ricavare più relazioni possibili che ci permettano di determinare i gradi.
Ricordiamo l'operatore # definito per qualsiasi rappresentazione $W \curvearrowright U$ con $|W|$, $\dim(U)$ finiti come $v^{\#} = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w\cdot v$, si verifica il seguente semplice risultato:

Lemma 3.8. $\mathrm{Tr}(\#)$ *è la dimensione del sottospazio* W*-invariante.*

Dimostrazione. Notiamo immediatamente che l'operatore è idempotente: l'immagine di # è contenuta in U^W (spazio W-invariante) e, come già detto, # è l'identità sui vettori invarianti sotto l'azione di W. Si ricava che $\#^2 = \#$, da cui si deduce la diagonalizzabilità dell'endomorfismo con autovalori 0 e 1.
Se $v \in U^W$ allora $v^{\#} = v$ e viceversa se

$$v = v^{\#} = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w\cdot v = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} g\cdot w\cdot v = g\cdot v,$$

allora $v \in U^W$. U^W è proprio l'autospazio relativo a 1 di #, quindi $\mathrm{Tr}(\#) = \dim(U^W)$. □

Mostriamo ora un primo risultato che ci permette di esprimere la dimensione degli elementi omogenei di grado fissato dell'algebra R

Proposizione 3.9. *Vale la seguente uguaglianza di serie formali:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim((R)^k)t^k = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} (det(Id - tw))^{-1}\,,$$

dove con Id *si intende l'applicazione identità dello spazio* E*.*

Dimostrazione. Sia $g^{(k)} : (S)^k \longrightarrow (S)^k$ l'endomorfismo indotto da g su $(S)^k$, abbiamo che per il lemma precedente

$$\dim((R)^k) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|W|}\sum_{g\in W} g^{(k)}\right) = \frac{1}{|W|}\sum_{g\in W}\mathrm{Tr}\left(g^{(k)}\right). \tag{3.3}$$

Notiamo ora che $g^{(k)}$ è diagonalizzabile in $\overline{K}$ (chiusura algebrica del campo base di E) in quanto g ha ordine finito.
Sia $e_1,\dots,e_n$ la base di E che diagonalizza g^{-1} e siano $a_1,\dots a_n$ i rispettivi autovalori contati con molteplicità, abbiamo che una base di autovettori per $(S)^k$ è data da $(e_1^*)^{j_1}\cdots(e_n^*)^{j_n}$ dove $\sum j_i = k$ e di conseguenza gli autovettori sono $a_1^{j_1}\cdots a_n^{j_n}$, in questo modo $\mathrm{Tr}\left(g^{(k)}\right)$

risulta essere la somma con molteplicità di questi, un facile conto ci permette di affermare che
$$(\det(I - tg^{-1}))^{-1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i t)} = \sum_{k=0}^{\infty}(Tr(g^{(k)}))t^k.$$
Usando l'equazione (3.3) e ricordando che l'inverso in un gruppo è una mappa biettiva, si ottiene la tesi:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim((R)^k)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|W|} \sum_{g\in W} \mathrm{Tr}\left(g^{(k)}\right) t^k = \frac{1}{|W|} \sum_{g\in W} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(g^{(k)}\right) t^k =$$
$$= \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} (\det(I - tg^{-1}))^{-1} = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} (\det(I - tg))^{-1}.$$

□

Il prossimo risultato ottenendo una relazione che coinvolge i gradi dei polinomi di una base di invarianti che fino alla fine della sezione verranno chiamati semplicemente d_i.

Proposizione 3.10. *Vale la seguente uguaglianza di serie formali:*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim((R)^k)t^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_i}}.$$

Dimostrazione. Sia $g_1, \ldots, g_n$ la base di invarianti fornita dal teorema di Chevalley di gradi rispettivamente d_i. Chiaramente gli elementi $f_{a_1,\ldots,a_n} = \prod_i g_i^{a_i}$ al variare di $a_i \in \mathbb{N}$ tali che $\sum_i a_i d_i = k$, sono una base di $(R)^k$. La cardinalità di questa base non è altro che il coefficiente di grado k nella seguente serie:
$$\prod_i (1 + t^{d_i} + t^{2d_i} + t^{3d_i} + \ldots) = \prod \frac{1}{1 - t^{d_i}},$$
da cui segue immediatamente la tesi. □

In questo modo abbiamo ottenuto una triplice uguaglianza:
$$\frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} (\det(Id - tg))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \dim((R)^k)t^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_i}}. \tag{3.4}$$
Per il resto della sezione supporremo che W sia di riflessione su uno spazio reale, in quanto sarà necessario supporre che l'autovalore diverso da 1 dei generatori di W valga -1. Possiamo ora usare l'equazione appena ricavata per esplicitare il valore della somma e del prodotto dei d_i.

Teorema 3.11. *Supponiamo che Sia N il numero di riflessioni di W, valgono le seguenti uguaglianze:*
$$\prod_{i=1}^{n} d_i = |W|,$$
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = N + n.$$

Dimostrazione. Consideriamo $g \in W$ riflessione, sicuramente è diagonalizzabile con $n-1$ autovalori 1 e un autovalore -1. Gli elementi di W diversi dall'identità che non siano una riflessione hanno necessariamente almeno due autovalori diversi da 1. Ricordando che le riflessioni sono N possiamo scrivere:

$$(1-t)^n \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (\det(Id - tg))^{-1} = \frac{1}{|W|} \left(1 + N\frac{1-t}{1+t} + (1-t)^2 g(t)\right),$$

dove $g(t)$ è una funzione razionale a coefficienti in K il cui denominatore non è divisibile per $(1-t)$.
Dividendo $1-t^a$ per $1-t$ e usando l'equazione (3.4) abbiamo che:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})} = (1-t)^n \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (\det(Id-tg))^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|W|} \left(1 + N\frac{1-t}{1+t} + (1-t)^2 g(t)\right).$$

Valutando in $t=1$, che è lecito in quanto è un'uguaglianza di funzioni razionali al cui denominatore non compare 1 come radice, otteniamo $\frac{1}{|W|} = \frac{1}{d_i \cdots d_n}$ da cui si deduce la prima tesi.
Deriviamo ora formalmente ambo i membri per t:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1+2t+\cdots+(d_i-1)t^{d_i-2}}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}\right) = -\frac{2N}{|W|}\frac{1}{(1+t)^2} + h(t),$$

dove $h(t)$ è una funzione razionale a coefficienti in K con il numeratore divisibile per $t-1$ ma il denominatore no. Valutando come prima in 1 si ottiene:

$$-\frac{N}{2|W|} = -\frac{1}{2 \cdot d_1 \cdots d_n} \left(\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)\right).$$

Sostituendo $|W| = d_1 \cdots d_n$ si ricava subito la seconda tesi.

□

Il calcolo appena effettuato ci sarà utile più volte in futuro.
Gli ultimi due teoremi della sezione sono utili strumenti per determinare se un dato insieme di polinomi omogenei invarianti siano una base: il primo ne verificherà l'indipendenza e il secondo fornirà un criterio di facile verifica per determinare se generano R come algebra.
Cominciamo introducendo il seguente:

Definizione 3.4. Dati $f_1, \ldots, f_n$ in $K[x_1, \ldots, x_n]$ definisco

$$J(f_1, \ldots, f_n) = \det \left(\frac{\partial f_i}{x_j}\right)_{i,j},$$

cioè il determinante dello Jacobiano della funzione $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1, \ldots, f_n)$.

Possiamo ora enunciare:

Teorema 3.12 (Criterio di Jacobi)**.** *$f_1, \ldots, f_n$ in $K[x_1, \ldots, x_n]$ sono algebricamente indipendenti su K se e solo se $J(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che esista $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomio non costante tale che $h(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Scegliamo h tale che il grado massimo dei monomi che lo compongono sia il più piccolo possibile. Deriviamo parzialmente in x_j:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n)\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$$

al variare di j. Si pensi queste equazioni come un sistema lineare in $K(x_1, \ldots, x_n)$ in cui le incognite sono $\frac{\partial h}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n)$ e la matrice del sistema è proprio lo jacobiano delle f_i.
Supponiamo per assurdo che $\frac{\partial h}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n)$ siano tutte nulle: essendo h non costante esisterebbe un i tale che $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ non è il polinomio nullo (e quindi non costante perché si annulla valutato in $(f_1, \ldots, f_n)$) il cui grado massimo dei monomi è più piccolo di quello di h, ciò è assurdo per la scelta iniziale.
Quindi esiste una soluzione non banale al sistema lineare sopra considerato, tale soluzione è $\frac{\partial h}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$ trovato sopra, dunque $J(f_1, \ldots, f_n) = 0$.
Mostriamo ora il viceversa, che è meno immediato. Supponiamo che $f_1, \ldots, f_n$ siano algebricamente indipendenti, siccome $K(x_1, \ldots, x_n)$ ha grado di trascendenza n esiste una relazione algebrica tra $x_i, f_1, \ldots, f_n$ per ogni i. Sia $h_i(y_0, \ldots, y_n)$ un polinomio non nullo per cui $h_i(x_i, f_1, \ldots, f_n) = 0$ tale che il grado massimo dei monomi che lo compongono sia il più piccolo possibile. Differenziando come al solito rispetto a x_k:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\delta_{i,k}.$$

Possiamo quindi scrivere l'uguaglianza tra matrici:

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\right)_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \left(-\frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

$\frac{\partial h_i}{\partial y_0} \neq 0$ perché l'indipendenza delle f_i impone che compaia il termine in x_i.
Per la condizione di minimalità del grado degli h_i si deve avere che $\frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n) \neq 0$ in quanto il grado di $\frac{\partial h_i}{\partial y_0}$ è strettamente minore di quello di h_i.
Passando ai determinanti si ottiene subito che $J(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$ che è la tesi. □

Notiamo ora un facile corollario del teorema

Corollario 3.1. Sia $g_1, \ldots, g_n$ una base di invarianti, si ha che $J(g_1, \ldots, g_n)$ è omogeneo di grado $N = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$

Dimostrazione. osserviamo che il determinante in questione è la somma al variare di $\sigma \in S_n$ di:

$$\frac{\partial g_1}{x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial g_n}{x_{\sigma(n)}}.$$

I g_i sono omogenei di grado d_i, la loro derivata rispetto a una variabile è o nulla o di grado $d_i - 1$: conseguentemente l'espressione considerata è o nulla o omogenea di grado $N = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$. Essendo il determinante somma di queste al varare di σ e non potendo essere nullo si ha la tesi. □

Concludiamo questa trattazione sulla base di invarianti con un ultimo teorema molto comodo.

Teorema 3.13. *Sia W un gruppo di riflessione e siano $f_1, \dots, f_n$ polinomi omogenei, algebricamente indipendenti e invarianti sotto l'azione di W. Se vale $\prod_{i=1}^n \deg f_i = |W|$ allora sono una base di invarianti.*

Dimostrazione. Sia $g_1, \dots, g_n$ una base di invarianti e supponiamo che sia i g_i che le f_i siano ordinati di grado crescente. Poniamo $e_i = \deg f_i$ e $d_i = \deg d_i$. Mostriamo che $e_i \geq d_i$.
Sicuramente $e_1 \geq d_i$ in quanto $g_1 \in R$ e quindi non può avere grado più basso di tutti quelli di una base di invarianti.
Supponiamo che esista j tale che $e_i \geq d_i$ $\forall i < j$ e $e_j < d_j$. Per una semplice osservazione sul grado dovrei avere che $g_1, \dots, g_j$ sono polinomi in $f_1, \dots, f_{j-1}$: questo è assurdo in quanto $K(g_1, \dots, g_j)$ ha grado di trascendenza j su K.
Si ha quindi che $e_i \geq d_i$, usando il teorema 3.11 $\prod_{i=1}^n d_i = |W| = \prod_{i=1}^n e_i$ se ne deduce $e_i = d_i$ $\forall i$. Consideriamo il sottospazio di $(R)^k$ generato da $f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n}$ tale che $\sum a_i e_i = k$, questo ha la stessa dimensione dello spazio $(R)^k$ stesso (che ricordiamo essere generato da $g_1^{a_1} \cdots g_n^{a_n}$ tale che $\sum a_i d_i = k$) in quanto $d_i = e_i$ e f_i, g_i sono algebricamente indipendenti. Ciò implica che i g_i sono generatori per R e di conseguenza base di invarianti. $\square$

La teoria sviluppata finora ci permette di determinare se n polinomi sono una base di invarianti: basterà dapprima verificare che siano omogenei e W-invarianti e poi controllare che il prodotto dei gradi sia W.

3.3 Forme e teorema di Solomon

L'ultima sezione di questo capitolo è dedicata allo studio delle forme a coefficienti polinomiali. Il teorema di Solomon fornirà una descrizione della sotto algebra W-invariante molto simile a quella fornita dal teorema di Chevalley per l'algebra polinomiale.
Inizieremo introducendo i polinomi alternanti, strumento necessario per sviluppare il teorema principale. Per dimostrare il risultato 3.15 sarà necessario supporre che il campo base sia $\mathbb{R}$: il teorema risulta vero per ogni campo a caratteristica nulla, ma per i nostri scopi sarà necessario mostrarlo per il solo caso reale. Possiamo quindi supporre fin da subito di avere una rappresentazione $W \subset GL(n, \mathbb{R})$ e identificheremo E con $\mathbb{R}^n$.
Cominciamo quindi definendo i polinomi alternanti:

Definizione 3.5. $p \in S$ si dice alternante se $w \cdot p = (\det w)\, p$ $\forall w \in W$

Vediamo qualche semplice osservazione:

Osservazione 3.5. Siano $\mathcal{A}$ i polinomi alternanti, si ha:

- $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale.
- $\mathcal{A}$ è la somma diretta delle ponenti omogenee (perché W agisce separatamente sulle componenti omogenee).
- ogni $w \in W$ è tale che $\det w = \pm 1$ in quanto W è generato da riflessioni.

Premettiamo un'ulteriore definizione:

Definizione 3.6. Sia l_α il polinomio dato dal prodotto scalare del vettore $(x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e sia H_α il luogo di zeri di l_α (che è un iperpiano). Definisco $\Pi = \prod_{\alpha \in \Phi^+} l_\alpha$, dove ricordo che Φ^+ sono un insieme di radici positive relative a W.

Il prossimo risultato ci caratterizzerà definitivamente i polinomi alternanti:

Teorema 3.14. *$f \in S$ è alternante se e solo se $f = \Pi \cdot q$ con $q \in R$ polinomio invariante.*

Dimostrazione. Cominciamo con il mostrare che Π è alternante.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e si indichi con $(,)$ il prodotto scalare standard, abbiamo $(s_\beta^{-1}\lambda, \alpha) = (\lambda, s_\beta\alpha)$ in quanto una riflessione è un'isometria: da questa uguaglianza notiamo che $s_\beta \cdot l_\alpha = l_{s_\beta \cdot \alpha}$.
Possiamo quindi scrivere

$$s_\beta \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} l_\alpha = -\prod_{\alpha \in \Phi^+} l_\alpha = \det s_\beta \prod_{\alpha \in \Phi^+} l_\alpha,$$

in quanto la riflessione in questione fa cambiare il segno a β e permuta le altre radici positive.
Essendo W è un gruppo generato da riflessioni ne consegue l'alternanza di Π e come conseguenza ogni polinomio della forma $\Pi \cdot q$ con $q \in R$ lo è.
Sia $f \in \mathcal{A}$, sia $a \in H_\alpha$ con $\alpha \in \Phi^+$, sicuramente abbiamo:

$$f(a) = f(s_\alpha^{-1}a) = s_\alpha \cdot f(a) = -f(a),$$

da cui $f(a) = 0 \ \forall a \in H_\alpha$: per il lemma 3.3 abbiamo che $l_\alpha \mid f$. Ripetendo il ragionamente per tutte le radici positive abbiamo $f = \Pi \cdot j$ con $j \in S$.
facendo agire $w \in W$ sul polinomio abbiamo quindi:

$$\det w \cdot (\Pi \cdot j) = \det w \cdot f = w \cdot (\Pi \cdot j) = \det w \cdot \Pi \cdot (w \cdot j),$$

da cui si deduce che $j \in R$. $\square$

Nella restante parte di questa sezione riutilizzeremo il determinante dello jacobiano introdotto precedentemente. In particolare il teorema seguente descriverà questo nel caso in cui lo spazio sia reale.
Il teorema resta valido nel caso di un campo K di caratteristica nulla, ma non è necessario dimostrarlo per i nostri scopi.

Teorema 3.15. *Sia $g_1, \ldots, g_n$ base di invarianti e sia J il determinante dello jacobiano di questi definito come nella precedente sezione. Si ha che $J = k\Pi$ per qualche $k \in \mathbb{R}^*$*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione liscia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (g_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, g_n(a_1, \ldots, a_n)).$$

Sia $\alpha \in \Phi^+$ e sia B un aperto qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ che interseca H_α in $y = (y_1, \ldots, y_n)$, si vede facilmente che esistono $a, b \in B \setminus H_\alpha$ tali che $s_\alpha \cdot a = b$ (s_α è la riflessione lungo H_α), abbiamo inoltre che $g_i(a) = g_i(s_\alpha \cdot a) = g_i(b)$.
Lo jacobiano di ϕ non può essere invertibile nel punto y in quanto se lo fosse il teorema di funzione inversa ci garantirebbe un intorno in cui la ϕ sarebbe biettiva. Notiamo inoltre che il determinante dello jacobiano di ϕ non è altro che il polinomio J.
Ne consegue che tutti gli elementi di H_α sono zeri di J e che quindi per il lemma 3.3 abbiamo che $l_\alpha \mid J$.
Ricordando che le radici Φ^+ sono linearmente indipendenti a due a due abbiamo che l_α sono coprimi e quindi ripetendo il ragionamento per ogni radice si ottiene $\Pi \mid J$.
Per il corollario 3.1 abbiamo $\deg J = N$ e dato che il numero di riflessioni del gruppo è proprio la cardinalità di Φ^+, Π e J hanno lo stesso grado, quindi $J = k\Pi$ con $k \in \mathbb{R}$.
Si conclude notando che $k \neq 0$ in quanto il criterio di Jacobi ci assicura che J è non nullo.
$\square$

Introduciamo ora le forme e l'azione di W su queste. Una rappresentazione $W \curvearrowright E$ ne determina una $W \curvearrowright \wedge(E^*)$ dove con $\wedge(E^*)$ si intende l'algebra esterna di E^*. Per brevità indicheremo $\wedge(E^*)$ semplicemente con $\wedge$.
L'algebra delle forme a coefficienti polinomiali è $S \otimes \wedge$ e anche su queste abbiamo una rappresentazione naturale $W \curvearrowright S \otimes \wedge$, di seguito espliciteremo l'azione di W su una base.
Sia $x_1, \dots, x_n$ una base di E^*, gli elementi del tipo $x_{i_1} \cdots x_{i_k} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}$ dove $i_1, \dots i_k$ e $j_1, \dots j_h$ sono rispettivamente in ordine non decrescente e crescente sono una base per lo spazio $S \otimes \wedge$. Abbiamo un prodotto (indicato con $\wedge$) degli elementi della base dato da:

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_k} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}) \wedge (x_{l_1} \cdots x_{l_k} \otimes x_{m_1} \wedge \cdots \wedge x_{m_h}) = \\ = x_{i_1} \cdots x_{i_k} \cdot x_{l_1} \cdots x_{l_k} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h} \wedge x_{m_1} \wedge \cdots \wedge x_{m_h}.$$

Esplicitiamo l'azione di W:

$$w \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_k} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}) = x_{i_1}(w^{-1}\_) \cdots x_{i_k}(w^{-1}\_) \otimes x_{j_1}(w^{-1}\_) \wedge \cdots \wedge x_{j_h}(w^{-1}\_).$$

È possibile definire l'operazione di derivazione sull'algebra, Si noti che corrisponde alla derivazione usuale letta in carte:

Definizione 3.7. Definiamo $d : S \otimes \wedge \longrightarrow S \otimes \wedge$ come l'applicazione tale che:

$$d(x_{i_1} \cdots x_{i_k} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_k})}{\partial x_i} \otimes x_i \wedge x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}.$$

Si nota facilmente che se $p \in S$ e $q \in \wedge$ abbiamo che $d(p \otimes q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} \otimes x_i \wedge q$.

Osserviamo inoltre che dato $p \in S$ abbiamo $d(p \otimes 1) = \sum_{0=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} \otimes x_i$ e in particolare $d(x_i \otimes 1) = 1 \otimes x_i$: per alleggerire la notazione scriveremo semplicemente dp e dx_i.
Facciamo un paio di osservazioni sul differenziale che si mostrano con una facile verifica:

Osservazione 3.6. Valgono le seguenti:

- Come visto nel caso dei polinomi, anche il prodotto $\wedge$ è tale che $w \cdot (a \wedge b) = (w \cdot a) \wedge (w \cdot b)$.
- d commuta con l'azione di W. Cioè $\forall p \in S$, $w \cdot dp = d(w \cdot p)$.
- Per i punti precedenti, se $f_1, \dots, f_j$ sono W-invarianti allora anche $df_1 \wedge \cdots \wedge df_j$ lo è.

Premettiamo un ultimo lemma prima di passare al teorema principale di questa sezione.

Lemma 3.16. *Sia $g_1, \dots, g_n$ una base di invarianti, esiste $k \in \mathbb{R}^*$ tale che:*

$$dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = k \, \Pi \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Dimostrazione. Ricordiamo in primo luogo che data $\sigma \in S_n$ abbiamo $dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} = (-1)^{\mathrm{Sgn}(\sigma)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.
Usando la definizione di differenziale possiamo espandere la scrittura e grazie alla proprietà appena ricordata si ha:

$$dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = J(g_1, \dots, g_n) \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

e quindi la tesi è una facile conseguenza del teorema 3.15. $\square$

Siamo finalmente pronti al seguente:

Teorema 3.17 (Teorema di Solomon)**.** *Sia $g_1, \ldots, g_n$ una base di invarianti, lo spazio $(S \otimes \wedge)^W$ è un R-modulo libero con base*

$$\{dg_{i_1} \wedge \cdots \wedge dg_{i_k} | 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}.$$

Dimostrazione. Per alleggerire le notazioni, sia $I \subset \{1, \ldots, n\}$ indicheremo $dG_I = dg_{i_1} \wedge \cdots \wedge dg_{i_k}$ dove $1 \leq i_1 < \cdots < i_k$ sono gli elementi ordinati di I; indicheremo inoltre con I^c il complementare di I in $\{1, \ldots, n\}$. Sia $L = \mathrm{Frac}(S)$ il campo dei quozienti di S e consideriamo $L \otimes \wedge$ come L spazio vettoriale, gli elementi della base sopra descritti sono indipendenti su L, infatti se fosse

$$\sum_I k_I dG_I = 0,$$

allora moltiplicando ambo i membri per dG_{I^c} dove $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ si ottiene $k_I dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = 0$ per ogni scelta degli indici. Per il lemma precedente $dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n \neq 0$ quindi $k_I = 0$ $\forall I$, da cui l'indipendenza lineare.
$L \otimes \wedge$ come spazio su L ha come base $1 \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_h}$ dove $j_1, \ldots j_h$ sono interi positivi minori di n ordinati. Il sottospazio generato dai dG_I deve quindi essere, per questioni di dimensioni, tutto lo spazio $L \otimes \wedge$.
Sia ora $\omega \in S \otimes \wedge$ W-invariante, possiamo scrivere:

$$\omega = \sum_I k_I dG_I, \tag{3.5}$$

per qualche $k_I \in L$ che è W-invariante grazie all'indipendenza dei dG_I e alle osservazioni 3.6. Possiamo scrivere $k_I = \frac{v_I}{l_I}$ come frazione di polinomi in S.
Moltiplicando ambo i membri per dG_{I^c} si ottiene

$$u_I dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = dG_{I^c} \wedge \omega = \frac{v_I}{l_I} dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n,$$

dove $u_{i_1,\ldots,i_k} \in S$.
Usando il lemma 3.16 abbiamo che:

$$u_I dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \pm \frac{v_I}{l_I} k\,\Pi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Essendo $\frac{v_I}{l_I}$ W-invariante deve esserlo anche $\frac{u_I}{\Pi}$, ma Π è alternante, quindi si ha $w \cdot u_I = \det w\, u_I$.
L'uguaglianza ci dice che u_I è alternante, applicando il teorema 3.14 abbiamo che $\Pi \mid u_I$ e quindi

$$S \ni \frac{u_I}{k\,\Pi} = \frac{v_I}{l_I} = k_I.$$

Essendo $k_I \in L^W \cap S = R$ e ricordando (3.5) si ha che $(S \otimes \wedge)^W$ è generato come R-modulo dagli elementi voluti e questi sono linearmente indipendenti su $(S \otimes \wedge)^W$ come S^W modulo perché lo sono su $L \otimes \wedge$ come L-spazio. □

Consideriamo ora l'anello ${}^{S}\!/_{I^+}$, questo è graduato in quanto I^+ è generato da elementi omogenei. Notiamo inoltre che l'azione di W è ben definita sull'anello, in quanto I^+ è uno spazio invariante. Concluderemo la sezione mostrando una diretta conseguenza del teorema di Solomon che sarà necessario nell'ultimo capitolo

Proposizione 3.18. $\left(S/_{I^+} \otimes \wedge\right)^W$ *è un algebra esterna graduata su* $\mathbb{R}$ *con generatori*

$$\overline{dg_i} \in \left[\left(S/_{I^+}\right)^{d_i-1} \otimes \wedge^1\right]^W,$$

dove con $\overline{dg_i}$ *si intende la proiezione di* dg_i *sullo spazio* $S/_{I^+} \otimes \wedge$. *Inoltre vale che i* $\overline{dg_i}$ *hanno grado* $d_i - 1$

Dimostrazione. Grazie al teorema di Solomon si ha che

$$\begin{aligned}&\left\{\overline{dg_{i_1} \wedge \cdots \wedge dg_{i_k}} | 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\right\} =\\ &= \left\{\overline{dg_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dg_{i_k}} | 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\right\},\end{aligned}$$

sono generatori di $\left[\left(S/_{I^+}\right) \otimes \wedge\right]^W$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Deduciamo quindi che $\overline{dg_i}$ generano l'algebra. Si noti che i $\overline{dg_i}$ sono algebricamente indipendenti in quanto, se per assurdo esistesse una relazione che li lega, potrei sollevarla in $(S \otimes \wedge)^W$ e avrei negato il teorema di Solomon. concludiamo notando che il bigrado dei $\overline{dg_i}$ sarà chiaramente $(d_i - 1, 1)$. □

3.4 Polinomi armonici

In questa sezione studieremo i polinomi armonici. Il risultato principale sarà una decomposizione dell'algebra dei polinomi come somma diretta dello spazio dei polinomi armonici e I^+.
La scomposizione in questione ci sarà utile nei futuri capitoli per descrivere la coomologia di de Rham come algebra graduata.
Tratteremo ancora una volta solo il caso $K = \mathbb{R}$, che ci permetterà di costruire un prodotto scalare W-invariante che sarà di fondamentale importanza.

Introduciamo la nozione di derivazione:

Definizione 3.8. Sia $f \in S$ e $H \in E$, poniamo $\partial(H)(f)(X) = \frac{d}{dt}\left(f(X + tH)\right)_{t=0} \forall X \in E$

La derivazione parziale definita sopra può essere interpretata come una derivazione meramente formale dove la derivazione in $H \in E$ di un funzionale $\alpha \in E^*$ è la valutazione $\alpha(H)$.
Possiamo definire una bigezione fra E e gli operatori di derivazione direzionale $X \mapsto \partial(X)$. Se supponiamo che queste vengano applicate a funzioni polinomiali abbiamo di fatto definito un'applicazione lineare tra spazi vettoriali in quanto i polinomi sono funzioni lisce. Quest'applicazione è chiaramente un isomorfismo.
Consideriamo l'algebra delle derivate di ordine superiore come operatori sullo spazio dei polinomi, essendo questi funzioni di classe C^∞ abbiamo che tale algebra è isomorfa a $S(E)$ e l'isomorfismo non è altro che l'estensione naturale della mappa definita sopra $X \mapsto \partial(X)$.
Chiamiamo $\mathcal{D}$ l'algebra degli operatori differenziali.
L'azione $W \curvearrowright E$ si estende in maniera naturale a $W \curvearrowright S(E)$, che tramite l'identificazione vista sopra equivale a definire un'azione su $\mathcal{D}$.
Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di E, abbiamo che l'azione agisce su una base di $S(E)$ così:

$$w \cdot e_1^{r_1} \cdots e_n^{r_n} = (w \cdot e_1)^{r_1} \cdots (w \cdot e_n)^{r_n}.$$

Facciamo subito qualche osservazione su $\mathcal{D}$

Osservazione 3.7.

Come nel caso dei polinomi S, W agisce su $\mathcal{D}$ preservando il grado e si ha $w \cdot (ab) = (w \cdot a)(w \cdot b)\ \ \forall a, b \in S(E)$, $\forall w \in W$.

$\partial(w \cdot H)(w \cdot f) = w \cdot \partial(H)(f)$ per ogni $H \in S(E)$, $f \in S$, per mostrare questo basta verificarlo per elementi della base.

Siano $\mathcal{D}^W$ le derivazioni W-invarianti, per le osservazioni appena fatte e in completa analogia con S, abbiamo che $\mathcal{D}$ è un'algebra graduata.
Si indichino con $\mathcal{D}_+^W$ gli elementi dell'algebra il cui termine di grado zero è nullo. Si può definire:

Definizione 3.9 (Polinomi armonici)**.** Definiamo

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in S \mid d(f) = 0\ \forall d \in \mathcal{D}_+^W \right\}.$$

Diremo che un polinomio è armonico se appartiene a questo insieme.

$\mathcal{H}$ non sarà un'algebra, ma vale comunque la seguente:

Osservazione 3.8. $\mathcal{H}$ è la somma delle proprie componenti omogenee, ossia $\mathcal{H} = \bigoplus_k (\mathcal{H})^k$

Dimostrazione. Sicuramente $\bigoplus_k (\mathcal{H})^k \subset \mathcal{H}$, mostriamo l'altra inclusione.
$\mathcal{D}^W$ è generata dalle proprie componenti omogenee, quindi per verificare che un polinomio sia armonico basta verificarlo per le derivazioni invarianti omogenee.
Osserviamo preliminarmente che una derivazione omogenea di grado k abbassa il grado di un polinomio omogeneo di grado n a $max(n-k, 0)$, quindi abbassa i gradi delle componenti omogenee di uno stesso numero (a meno che non diventino nulle).
Grazie alle due affermazioni appena fatte abbiamo che un polinomio armonico è tale che le proprie componenti omogenee lo siano: questa è la tesi. □

Notiamo inoltre che vale:

Osservazione 3.9. I polinomi armonici $\mathcal{H}$ sono uno spazio invariante sotto l'azione di W.

Dimostrazione. Sia $a \in S(E)^W$, $w \in W$ e $h \in \mathcal{H}$, si ha:

$$0 = w \cdot \partial(a)(h) = \partial(w \cdot a)(w \cdot h) = \partial(a)(w \cdot h),$$

da cui si deduce facilmente la tesi per l'arbitrarietà di $w \in W$ e $a \in S(E)^W$. □

Vogliamo ora definire un prodotto $\langle , \rangle : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ W-invariante che come vedremo ci permetterà di descrivere S in funzione dei polinomi armonici e quelli W-invarianti.
Sia $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica definita positiva, consideriamo $B' : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $B'(x, y) = \frac{1}{|W|} \sum_{g \in W} B(g \cdot x, g \cdot y)$, questa mantiene le proprietà di B citate sopra ed è pure W-invariante.
Il prodotto appena costruito ci garantisce un isomorfismo $\mu : E \longrightarrow E^*$ definito da $\mu(X) = B'(X, \_) \in E^*$ che è W-invariante. L'isomorfismo μ si estende a un isomorfismo $\overline{\mu} : S(E) \longrightarrow S(E^*)$ di algebre graduate che è W-equivariante. Definiamo:

Definizione 3.10. $\langle , \rangle : S(E^*) \times S(E^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\langle X, Y \rangle = \partial(\overline{\mu}^{-1}(X))(Y)(0)$

Questa è chiaramente bilineare: vogliamo mostrare che è simmetrica, G-invariante e definita positiva su S^k (cioè sulle componenti omogenee).

Osservazione 3.10. essendo $\overline{\mu}$ di rappresentazioni, questa induce un isomorfismo $\overline{\mu} : S(E)^W \longrightarrow S(E^*)^W$ che è chiaramente anche di algebre graduate.

Osservazione 3.11. Dato $X, Y \in E$ abbiamo che $\langle \overline{\mu}(X), \overline{\mu}(Y) \rangle = \partial(X)(\overline{\mu}(Y))(0) = B'(X, Y)$.

Dato che B' è W-invariante e $\overline{\mu}$ è W-equivariante abbiamo che $\langle , \rangle$ è W-invariante su $E^* \times E^*$.
Sia $e_1, \dots e_n$ una base ortonormale per il prodotto B' e poniamo $e_i^* = \overline{\mu}(e_i)$.
Sicuramente $\langle \overline{\mu}(e_i), \overline{\mu}(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$. Procediamo con la seguente proposizione:

Proposizione 3.19. *Siano $x_i, y_i \in E^*$, si ha che:*

$$\langle x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k \rangle = \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{k} \left\langle x_i, y_{\sigma(i)} \right\rangle .$$

Dimostrazione. Usando la definizione della forma bilineare e di $\overline{\mu}$ abbiamo:

$$\langle x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k \rangle = \partial(\overline{\mu}^{-1}(x_1 \cdots x_k))(y_1 \cdots y_k)(0) = \partial(\overline{\mu}^{-1}(x_1) \cdots \overline{\mu}^{-1}(x_k))(y_1 \cdots y_k)(0)$$

Mostriamo ora la tesi per induzione su k. Per $k = 1$ l'uguaglianza è banale, per il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
&= \partial(\overline{\mu}^{-1}(x_1) \cdots \overline{\mu}^{-1}(x_k))(y_1 \cdots y_k)(0) \\
&= (\partial(\overline{\mu}^{-1}(x_1) \cdots \overline{\mu}^{-1}(x_{k-1}))\partial(\overline{\mu}^{-1}(x_k)))(y_1 \cdots y_k)(0) \\
&= (\partial(\overline{\mu}^{-1}(x_1)) \cdots \overline{\mu}^{-1}(x_{k-1}))(\sum_{i=1}^{k} y_1 \cdots y_i(\overline{\mu}^{-1}(x_{k-1})) \cdots y_k)(0).
\end{aligned}$$

Ricordando che $y_i(\overline{\mu}^{-1}(x_{k-1})) = \langle x_{k-1}, y_i \rangle$ e usando l'ipotesi induttiva si ha la tesi. □

Ora siamo pronti a dimostrare quanto voluto:

Teorema 3.20. $\langle , \rangle$ *è simmetrica W-invariante e definita positiva se ristretta a S^k.*

Dimostrazione. Presi due monomi della forma $x_1 \cdots x_k$ e $y_1 \cdots y_l$ con x_i e y_i che sono elementi della base e_i^* abbiamo che, se $l = k$:

$$\langle x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k \rangle = \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{k} \left\langle x_i, y_{\sigma(i)} \right\rangle = \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{k} \delta_{i,\sigma(i)},$$

che vale 1 se gli x_i e y_i sono uguali a meno dell'ordine e vale 0 altrimenti.
Inoltre se $l \neq k$ usando la definizione con le derivazioni si ha che vale 0 per questioni di grado. La forma è quindi simmetrica e definita positiva su S^k.
Mostriamo la W-invarianza verificandola su elementi della base:

$$\begin{aligned}
&\langle w \cdot x_1 \cdots x_k, w \cdot y_1 \cdots y_k \rangle = \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{k} \left\langle w \cdot x_i, w \cdot y_{\sigma(i)} \right\rangle = \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{k} \left\langle x_i, y_{\sigma(i)} \right\rangle = \\
&= \langle x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k \rangle ,
\end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio è vero per l'invarianza di $\langle , \rangle$ sugli elementi di grado 1.

□

Per come è stato definito il prodotto scalare si vede facilmente che:

Osservazione 3.12. l'operatore aggiunto alla moltiplicazione per un fattore $r \in S$ rispetto a $\langle , \rangle$ è la derivazione $\partial(\overline{\mu}^{-1}(r))$.

Dimostrazione. Infatti vale:

$$\langle qr, p\rangle = \partial(\overline{\mu}^{-1}(qr))(p)(0) = (\partial(\overline{\mu}^{-1}(q))\partial(\overline{\mu}^{-1}(r))p)(0) = \left\langle q, \partial(\overline{\mu}^{-1}(r))p\right\rangle .$$

□

Possiamo enunciare un primo risultato utile

Teorema 3.21.

$$S(E^*) = S(E^*)^W \,\mathcal{H},$$

che nelle notazioni adottate diventa $S = R\mathcal{H}$*: cioè* $\forall f \in S$ *esistono* $i_k \in R$ *e* $h_k \in \mathcal{H}$ *tali che* $f = \sum_k i_k h_k$*.*

Dimostrazione. Siano R_+ gli elementi di R con termine noto nullo.
Sicuramente $S \cdot R_+ \in S$ è somma diretta dei sottospazi omogenei, consideriamo il sottospazio $\left(R_+ \cdot S^W\right)^k \subset S^k$, questo avrà un complementare V^k in S^k dato dal prodotto scalare $\langle , \rangle$ (infatti questo è positivo in S^k e dunque non degenere). Sia $a \in V^k$, abbiamo che $\forall j \in (R_+)^l$ e $\forall c \in S^{k-l}$ vale:

$$0 = \langle jc, a\rangle = \left\langle c, \partial(\overline{\mu}^{-1}(j))a\right\rangle .$$

Teniamo ora fissi j e a facendo variare c in S^{k-l}: entrambi gli argomenti sono in S^{k-l} e il prodotto è definito positivo su S^{k-l} quindi deve essere $\partial(\overline{\mu}^{-1}(j))a = 0 \ \forall j \in S(E^*)^W$.
Ricordando che $\overline{\mu}^{-1} : S(E^*)^W \longrightarrow S(E)^W$ è un isomorfismo abbiamo che a è armonico: se ne deduce $V^k \subset S^k \cap \mathcal{H}(E^*)$.
Chiaramente vale anche $S^k \cap \mathcal{H}(E^*) \subset V^k$ da una facile verifica, quindi:

$$S^k = (R_+S)^k \oplus^\perp S^k \cap \mathcal{H}. \tag{3.6}$$

Con un semplice argomento di induzione sul grado si ha che $R\mathcal{H} = S$. □

La descrizione fornita dal teorema non richiede che il gruppo W sia di riflessione: in generale resta vera se esiste un prodotto scalare su E che sia W-invariante e definito positivo.
Nel seguente questa ipotesi invece si richiede, perché necessitiamo del lemma 3.4:

Teorema 3.22. *Sia* $\phi : S^W \otimes \mathcal{H} \longrightarrow S$ *definita da* $\phi(j \otimes h) = jh$*, questo è un'isomorfismo di spazi vettoriali e inoltre si ha che:*

$$\sum \dim(\mathcal{H}^k)t^k = \prod_{i=1}^{n}(1 + t + \cdots + t^{d_i-1})$$

e quindi valutando in 1 *si ottiene* $\dim(\mathcal{H}) = |W|$.

Dimostrazione. Il teorema precedente ci assicura che ϕ sia suriettiva, mostriamo ora l'iniettività. Cioè che se $\sum_{s,r} a_{r,s} i_r h_s = 0$ con $i_k \in S^W$ e $h_s \in \mathcal{H}$ base omogenea dei rispettivi spazi, allora $a_{r,s} = 0 \ \forall r, s$. Raccogliendo abbiamo che $\sum_s h_s \left(\sum_r a_{r,s} i_r\right) = 0$, poniamo $I_s = \sum_r a_{r,s} i_r$, occorre mostrare che $I_s = 0 \ \forall s$.
essendo i_k e h_k omogenei possiamo supporre che I_s sia omogeneo (altrimenti spezzo la

somma iniziale nelle proprie componenti omogenee e ripeto il ragionamento su ogni componente). Il teorema di Chevalley visto nel paragrafo precedente ci fornisce una base di invarianti $g_1, \ldots, g_l$, quindi possiamo scrivere:

$$I_s = \sum_{m_1, \cdots m_l} a_{m_1, \ldots m_l, s} g_1^{m_1} \cdots g_l^{m_l}$$

Da cui:

$$\sum_{m_1, \cdots m_l} \left(\sum_s a_{m_1, \ldots m_l, s} h_s \right) g_1^{m_1} \cdots g_l^{m_l}$$

Supponiamo che siano presenti dei fattori $(\sum_s a_{m_1, \ldots m_l, s} h_s)$ non nulli, sicuramente almeno uno dei fattori $g_1^{m_1} \cdots g_l^{m_l}$ con coefficiente non nullo non è contenuto nell'ideale di R generato dagli altri fattori a coefficiete non nullo. Quest'osservazione ci permette di applicare il teorema (3.4) con successo e quindi abbiamo che $\sum_s a_{m_1, \ldots m_l, s} h_s \in I^+$ per $m_1, \ldots, m_l$ scelti sopra.
I^+ è generato da elementi omogenei, quindi abbiamo che $(\sum_s a_{m_1, \ldots m_l, s} h_s)^k \in I^+$ ma $(I^+)^k \subset (R_+ S)^k$. l'equazione (3.6) mostrata nel teorema precedente ci assicura che $\sum_s a_{m_1, \ldots m_l, s} h_s = 0$ ed essendo h_S una base si ha $a_{m_1, \ldots m_l, s} = 0$ $\forall s$ che è assurdo, quindi $I_s = 0$ $\forall s$ e $a_{r,s} = 0$: ϕ è isomorfismo. Grazie all'identificazione appena mostrata abbiamo:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dim (S^W)^k \right) t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dim (\mathcal{H})^k \right) t^k \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\dim S^i \right) t^i$$

Con un facile calcolo $\dim S^i = \binom{n+i-1}{i}$ dove n è la dimensione dello spazio da cui si ottiene $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\dim S^i \right) t^i = (1-t)^{-n}$ (come espansione infinita). Infine abbiamo quindi che:

$$\sum \dim(\mathcal{H}^k) t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}).$$

□

Grazie al teorema appena mostrato si ha la seguente:

Osservazione 3.13. Il grado massimo dei polinomi armonici è N e lo spazio $\mathcal{H}^N$ è generato da Π.

Dimostrazione. Per il teorema precedente $\dim \mathcal{H}^N = 1$ in quanto $N = \sum_i d_i$ e questo è proprio il grado massimo.
Sia $a \in S(E)^W$, si ha che

$$w \cdot \partial(a)(\Pi) = \partial(w \cdot a)(w \cdot \Pi) = \det(w) \partial(a)(\Pi),$$

abbiamo quindi che $\partial(a)(\Pi)$ è alternante. Per il teorema 3.14 $\Pi \mid \partial(a)(\Pi)$, ma la derivazione di un polinomio ne abbassa il grado, quindi si deve avere $\partial(a)(\Pi) = 0$, da cui la tesi. □

Per questo motivo Π viene chiamato polinomio primordiale armonico. Concludiamo il capitolo con un'ultima proposizione cruciale:

Proposizione 3.23. *Vale che* $S = \mathcal{H} \oplus I^+$.

Dimostrazione. Sicuramente il teorema 3.21 ci assicura che $S = \mathcal{H} + I^+$.
Sia $j \in \mathcal{H} \cap I^+$, abbiamo che $j = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i$ dove $g_1, \ldots, g_n$ sono una base di invarianti per R questi infatti sono generatori di I^+, come visto nella dimostrazione del teorema di Chevalley. Supponiamo esista una componente omogenea $j^{(k)}$ (di grado k) non nulla di j

abbiamo allora che $j^{(k)} \in \mathcal{H}$ per l'osservazione 3.8.
Essendo g_i omogenei di grado d_i, abbiamo che:

$$j^{(k)} = \sum_{1 \leq i \leq n \text{ tale che } d_i - k \geq 0} g_i f_i^{(d_i - k)} \in \mathcal{H},$$

ricordando l'equazione(3.6) abbiamo un'assurdo, da cui $j = 0$ e la tesi è verificata. $\square$

Capitolo 4

Una descrizione esplicita di $H^*(G)$ come algebra graduata

Questo capitolo sarà dedicato ad una descrizione più esplicita di $H^*(G)$ con G gruppo di Lie compatto. Tratteremo il caso G connesso e, infine, analogamente a come fatto nel primo capitolo, generalizzeremo il risultato. Sarà di centrale importanza definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} p : {}^{G}\!/_{T} \times T &\longrightarrow G \\ (gT, t) &\mapsto gtg^{-1}, \end{aligned}$$

dove T è un toro massimale di G.
Questa induce un morfismo di algebre graduate in coomologia:

$$p^* : H^*(G) \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right).$$

p^* risulterà iniettivo ma non suriettivo: sarà necessario restringere il codominio per ottenere un isomorfismo.
A tale scopo definiremo l'azione di $W = {}^{N(T)}\!/_{T}$ su T e ${}^{G}\!/_{T}$. Sarà facile verificare che $p(w \cdot (gT, t)) = p(gT, t)$: potremo quindi restringere il codominio di p^* allo spazio fissato dalla rappresentazione indotta da W in coomologia

$$p^* : H^*(G) \longrightarrow \left[H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right)\right]^W,$$

che risulterà essere un isomorfismo.
La formula di Künneth ci permetterà di spezzare l'insieme d'arrivo di p^* grazie ad un isomorfismo W-equivariante

$$H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right) \simeq H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*(T),$$

ci basterà così studiare i due fattori a destra dell'uguaglianza.
Avremo facilmente che $H^*(T) \simeq \wedge\mathfrak{t}^*$ e resterà da descrivere $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$.
Useremo il teorema del punto fisso di Lefschetz e la teoria di Morse per dimostrare che $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ come W-modulo è la rappresentazione regolare.
Concluderemo la descrizione dello spazio in questione mostrando il teorema di Borel:

$$H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \simeq \left({}^{S(\mathfrak{t}^*)}\!/_{I^+}\right)_{(2)}$$

come morfismo di anelli graduati W-equivariante.
Calcoleremo la dimensione del sottospazio del codominio di p^* fissato da W e ricaveremo che:

$$H^*(G) \simeq \left[H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) \otimes H^*(T)\right]^W .$$

Infine, usando le descrizione dei due fattori al membro destro, avremo:

$$H^*(G) \simeq \left[\left({}^{S(\mathfrak{t}^*)}\!/\!_{I^+}\right)_{(2)} \otimes \wedge \mathfrak{t}^*\right]^W ,$$

come algebra graduata. In particolare mostreremo che $H^*(G)$ è un'algebra esterna graduata con generatori di grado $2d_i - 1$ dove i d_i sono i gradi dei polinomi della base di invarianti fornita dal teorema di Chevalley.
In ultima analisi generalizzeremo al caso G compatto ma non necessariamente connesso.
Il capitolo riprenderà le notazioni dei capitoli precedenti e sarà diviso in 4 sezioni. La prima sarà dedicata all'introduzione di p e p^* e di strumenti necessari in seguito. Nella seconda verrà dimostrata la formula di integrazione di Weyl e calcoleremo, grazie a questa, la dimensione di $H^*(G)$. La terza e la quarta sezione verranno dedicate allo studio di $H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right)$: mostreremo che W agisce come la rappresentazione regolare e dimostreremo il teorema di Borel. L'ultima sezione sarà poi dedicata a mostrare il risultato principale della tesi.
Il materiale esposto in questo capitolo si baserà su [BD03], [Mil63], [Ree95] e [Fok10].

4.1 L'applicazione p e il morfismo p^* indotto in coomologia

Sia T un toro massimale di G, definiamo

$$\begin{aligned} \iota : G \times T &\longrightarrow G \\ (g,t) &\mapsto gtg^{-1}. \end{aligned}$$

Sia $h \in T$, abbiamo che $\iota(gh,t) = ght(gh)^{-1} = \iota(g,t)$ in quanto T abeliano: l'applicazione fattorizza quindi alla seguente

$$\begin{aligned} p : {}^{G}\!/\!_{T} \times T &\longrightarrow G \\ (gT,t) &\mapsto gtg^{-1}. \end{aligned}$$

Grazie al teorema 1.18, ${}^{G}\!/\!_{T}$ ha una struttura di varietà C^∞, verifichiamo che p è regolare. Sempre usando il teorema 1.18 abbiamo che $\forall\, gT \in {}^{G}\!/\!_{T}$ esiste un intorno $U \ni gT$ e una sezione liscia $s : U \longrightarrow G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} G \times T \arrow[dr, "\iota"] & \\ U \times T \arrow[u, "s \times Id"] \arrow[r, "p"] & G \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

da cui quanto voluto.
Grazie alla regolarità di p, questa induce un morfismo in coomologia

$$p^* : H^*(G) \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/\!_{T} \times T\right).$$

Definiamo ora due azioni di $W = {}^{N(T)}\!/\!_{T}$ su ${}^{G}\!/\!_{T}$ e T, date rispettivamente da $wT \cdot gT = gw^{-1}T$ e $wT \cdot t = wtw^{-1}$. Queste sono ben definite in quanto, sia $h \in T$, si ha che

$g(hw)^{-1}T = gw^{-1}T$ e $(wh)t(wh)^{-1} = wtw^{-1}$ perché T è abeliano.
Verifichiamo che gli elementi di W inducano morfismi lisci. Nel caso dell'azione sul toro abbiamo che questa è liscia in quanto la moltiplicazione in G lo è, mentre per quanto riguarda l'azione su G/T usiamo ancora una volta il teorema 1.18: sia $gT \in U \subset G/T$ intorno di gT e sia s la sezione relativa, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "R_{w^{-1}}"] & \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "wT\cdot"] & G/T, \end{tikzcd}$$

quindi l'azione in questione è liscia.
Risulta naturale definire un'azione di W su $G/T \times T$ data da

$$wT \cdot (gT, t) = (gw^{-1}T, wtw^{-1}),$$

la quale è chiaramente ben definita e liscia.
Tale azione induce una rappresentazione di W su $H^*\left(G/T \times T\right)$, notiamo inoltre che:

$$p\,(w \cdot (gT, t)) = p\left(gw^{-1}T, wtw^{-1}\right) = gtg^{-1} = p\,(gT, t)\,,$$

cioè che il morfismo p è costante sulle orbite dell'azione. Da questo possiamo dedurre che l'immagine di p^* è fatta da elementi W-invarianti, con un lieve abuso di notazione si ha:

$$p^* : H^*\,(G) \longrightarrow H^*\left(G/T \times T\right)^W.$$

La restante parte della sezione verrà sviluppata con due finalità diverse: mostrare che p^* è iniettivo e cominciare a sviluppare la teoria che nella prossima sezione ci permetterà di dimostrare la formula di Weyl. Nello specifico tratteremo di forme volume, grado della mappa p e determinante di dp.
Data $\alpha \in \wedge^n \mathfrak{g}$ (dove $\dim G = n$) non degenere è possibile definire una n-forma ω per traslazione, come visto nel secondo capitolo. Questa risulta una forma volume che normalizzata fornisce la misura di Haar. Anche T è un gruppo di Lie compatto ed è quindi possibile definire ω_T in maniera analoga a G.
Infine, usando il corollario 1.3, possiamo definire una forma $\omega_{G/T}$ invariante per l'azione del gruppo G. Le forme volume per G/T e T inducono naturalmente due forme su $G/T \times T$: possiamo definire (con un lieve abuso di notazione) $\omega_{G/T} \wedge \omega_T$ che risulterà una forma volume non degenere su $G/T \times T$.
Introduciamo ora il determinante di una mappa tra due varietà orientate e lisce su cui sono definite due rispettive forme volume.

Definizione 4.1 (Determinante)**.** Siano M e N due varietà lisce orientate della stessa dimensione e siano ω_M e ω_N due forme volume sulle rispettive varietà. Sia $\eta : M \longrightarrow N$, definiamo $\det(d\eta) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\det\,(d\eta)\,\omega_M = \eta^*\omega_N.$$

Nella costruzione delle forme volume invarianti di G, T e G/T ho la libertà di scegliere la forma antisimmetrica nell'identità, scalando a piacimento per un fattore. Al fine di ottenere forme che definiscono l'integrazione di Haar definisco.

Definizione 4.2. Sia $2v$ la dimensione di $\mathfrak{m}$ e l quella di $\mathfrak{t}$, definiamo le forme ω_G, ω_T e $\omega_{G/T}$.

- Sia $\beta \in \wedge^l \mathfrak{t}^*$ tale che la forma volume invariante determinata sia normalizzata, pongo ω_T tale forma.
- Sia $\gamma \in \wedge^{2v} \mathfrak{m}^* \setminus \{0\}$ (Che è $\mathrm{Ad}(T)$-invariante per l'osservazione 1.21) e sia ω la forma di G indotta per moltiplicazione sinistra da $\gamma \wedge \beta$ su $\wedge^n \mathfrak{g}^*$. Definisco $\omega_{G/T}$ la forma ottenuta da $\alpha = \frac{\gamma}{\int_G \omega}$ tramite l'azione sinistra di G, che è definita grazie a 1.20.
- Definisco ω_G data dal trasporto di $\alpha \wedge \beta$, la forma ottenuta sarà normalizzata per definizione di α.

Consideriamo ora l'applicazione p e calcoliamone il determinante rispetto alle forme appena introdotte:

$$\det (dp)_{(gT,t)}\, \omega_{G/T} \wedge \omega_T = p^* \omega_G. \tag{4.2}$$

Sia $Y_1, \ldots, Y_{2v}$ una base di $\mathfrak{m}$ e sia $Z_1, \ldots, Z_l$ una base di $\mathfrak{t}$. Conseguentemente $\pi_* Y_1, \ldots, \pi_* Y_{2v}$ sarà una base di $T_{eT} G/T$, si ha che:

$$\begin{aligned}
&\omega_{G/T} \wedge \omega_T(gT,t)(\tau_{g*}\pi_* Y_1, \ldots, \tau_{g*}\pi_* Y_{2v}, L_{t*}Z_1, \ldots, L_{t*}Z_l) = \\
&= \omega_{G/T}(gT)(\tau_{g*}\pi_* Y_1, \ldots, \tau_{g*}\pi_* Y_{2v})\, \omega_T(t)(L_{t*}Z_1, \ldots, L_{t*}Z_l) = \\
&= \alpha(Y_1, \ldots, Y_{2v})\, \beta(Z_1, \ldots, Z_l).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Premettiamo due lemmi:

Lemma 4.1. *Sia $(X,T) \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{t}$, si ha che*

$$dp_{(gT,t)}\left(\tau_{g*}\pi_* X, L_{t*}T\right) = L_{gtg^{-1}*}\left(\mathrm{Ad}_{gt^{-1}} X - \mathrm{Ad}_g X + \mathrm{Ad}_g T\right).$$

Dimostrazione. Consideriamo una sezione locale di gT come nel diagramma 4.1, poniamo g l'immagine di gT attraverso la sezione. Con un semplice calcolo si ha:

$$\begin{aligned}
&dp_{(gT,t)}\left(\tau_{g*}\pi_* X, L_{t*}T\right) = dp_{(gT,t)}\left(\pi_* L_{g*} X, L_{t*}T\right) = \\
&= d\iota_{(g,t)}\left(L_{g*}X, L_{t*}T\right) = \frac{d}{ds}\left[g exp(sX)t \cdot \exp(sT)\exp(-sX)g^{-1}\right]_{s=0} = \\
&= (L_g \circ R_{tg^{-1}})_* X + (L_{gt} \circ R_{g^{-1}})_* T - (L_{gt} \circ R_{g^{-1}})_* X \\
&= \left(L_{gtg^{-1}}\right)_* \left(\mathrm{Ad}_{gt^{-1}} X - \mathrm{Ad}_g X + \mathrm{Ad}_g T\right),
\end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza si ha per 1.8 e la seconda si ha grazie all'esistenza di una sezione liscia. □

Lemma 4.2. *Consideriamo l'automorfismo lineare di $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{t}$ dato da:*

$$X + T \mapsto \mathrm{Ad}_{gt^{-1}} X - \mathrm{Ad}_g X + \mathrm{Ad}_g T,$$

questo ha determinante $\det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right)$.

Dimostrazione. Mettendo in evidenza Ad_g si ottiene:

$$X + T \mapsto \mathrm{Ad}_g\left(\mathrm{Ad}_{t^{-1}} X - X + T\right).$$

$\det \mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi ed essendo G compatto e connesso deve necessariamente essere costante 1. Se ne deduce che il determinante è lo stesso della seguente applicazione:

$$X + T \mapsto \mathrm{Ad}_{t^{-1}} X - X + T,$$

$\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{m}$ sono $\mathrm{Ad}(T)$-invarianti, possiamo quindi scomporre l'applicazione come:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &\longrightarrow \mathfrak{m}\\ X &\mapsto \mathrm{Ad}_{t^{-1}\,|\mathfrak{m}} X - X\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathfrak{t} &\longrightarrow \mathfrak{t}\\ T &\mapsto T.\end{aligned}$$

Il determinante sarà il prodotto dei determinanti sui singoli spazi: su $\mathfrak{t}$ vale 1, mentre su $\mathfrak{m}$ vale $\det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right)$, da cui la tesi. □

Calcoliamo ora il membro di destra dell'equazione 4.2:

$$\begin{aligned}&p^*\omega_G(gT,t)(\tau_{g*}\pi_*Y_1,\dots,\tau_{g*}\pi_*Y_{2v},L_{t*}Z_1,\dots,L_{t*}Z_l) =\\ &= \omega_G(gtg^{-1})(dp_{(gT,t)}\tau_{g*}\pi_*Y_1,\dots,dp_{(gT,t)}\tau_{g*}\pi_*Y_{2v},dp_{(gT,t)}L_{t*}Z_1,\dots,dp_{(gT,t)}L_{t*}Z_l) =\\ &= \omega_G(gtg^{-1})\left(L_{gtg^{-1}*}(\mathrm{Ad}_{gt^{-1}}Y_1 - \mathrm{Ad}_g Y_1),\dots,L_{gtg^{-1}*}(\mathrm{Ad}_{gt^{-1}}Y_{2v} - \mathrm{Ad}_g Y_{2v}),\right.\\ &\left.L_{gtg^{-1}*}(\mathrm{Ad}_g Z_1),\dots,L_{gtg^{-1}*}(\mathrm{Ad}_g Z_l)\right) =\\ &= \alpha(\mathrm{Ad}_{gt^{-1}}Y_1 - \mathrm{Ad}_g Y_1,\dots,\mathrm{Ad}_{gt^{-1}}Y_{2v} - \mathrm{Ad}_g Y_{2v})\,\beta(\mathrm{Ad}_g Z_1,\dots,\mathrm{Ad}_g Z_l) =\\ &= \det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right)\alpha(Y_1,\dots,Y_{2v})\,\beta(Z_1,\dots,Z_l),\end{aligned}$$

dove la terzultima uguaglianza si ha grazie al lemma 4.1 e l'ultima grazie al lemma 4.2. Confrontando quanto appena ottenuto con il lemma 4.2 abbiamo il seguente

Teorema 4.3. *Vale la seguente uguaglianza:*

$$\det dp_{(gT,t)} = \det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right).$$

rispetto alle forme volume introdotte in precedenza.

Vogliamo ora calcolare il grado della mappa p, premettiamo una proposizione

Proposizione 4.4. *Vale la seguente uguaglianza:*

$$\det dp_{(gT,t)} = \prod_{i=1}^{v} 4\sin^2(\pi\theta_i(t))$$

dove i θ_i sono quelli definiti nel teorema 1.15.

Dimostrazione. Scomponiamo lo spazio $\mathfrak{m}$ rispetto alla base definita in 1.15, si ha che:

$$\begin{aligned}&\det dp_{(gT,t)} = \det\left(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}\right) = \prod_{i=1}^{v}\det\begin{pmatrix}\cos(2\pi\theta_i(t)) - 1 & \sin(2\pi\theta_i(t))\\ -\sin(2\pi\theta_i(t)) & \cos(2\pi\theta_i(t)) - 1\end{pmatrix} =\\ &= \prod_{i=1}^{v} 2(1-\cos(2\pi\theta_i(t))) = \prod_{i=1}^{v} 4\sin^2(\pi\theta_i(t)).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5. *Il grado dell'applicazione p è $|W|$.*

Dimostrazione. Sia $t_0 \in T$ un generatore del toro e siano i θ_i definiti come in 1.15. Se fosse $\theta_i(t_0) = 0$ avrei che θ_i sarebbe nullo sul gruppo generato da t_0 e, conseguentemente, per continuità di θ_i e densità del sottogruppo generato in T, avrei $\theta_i \equiv 0$, ma ciò è impossibile. Se ne deduce che $\sin(\pi\theta_i(t_0)) \neq 0$ perché il codominio di θ_i è ${}^{\mathbb{R}}\!/_{\mathbb{Z}}$. Grazie alla proposizione precedente abbiamo quindi che un generatore del toro è un valore regolare che conserva l'orientazione.
Vogliamo ora determinare la cardinalità di $p^{-1}(t_0)$. Supponiamo $t_0 = p(gT, t) = gtg^{-1}$, allora $T = \overline{\langle gtg^{-1}\rangle} = g\overline{\langle t\rangle}g^{-1}$, quindi $g^{-1}Tg \subset T$ da cui $gT \in W$. Per ogni $gT \in W$ esiste esattamente un $t \in T$ tale che $gtg^{-1} = t_0$, cioè $t = g^{-1}t_0 g \in T$ e anch'esso sarà un generatore del toro.
t_0 risulta quindi un valore regolare tale che p nelle sue $|W|$ controimmagini conserva l'orientazione, da cui la tesi. □

Ricordiamo che vale la seguente

Proposizione 4.6. *Siano M, N varietà compatte, connesse, orientate e della stessa dimensione. Sia $f : M \longrightarrow N$ una funzione liscia e sia ω una forma volume su N, si ha che*

$$\int_M f^*\omega = \deg f \int_N \omega.$$

Possiamo finalmente dimostrare:

Teorema 4.7. *Siano M, N varietà connesse, compatte, orientate e della stessa dimensione. Sia $f : M \longrightarrow N$ liscia di grado non nullo, allora f induce un morfismo iniettivo in coomologia di de Rham.*

Dimostrazione. Sia ω una forma volume di N, grazie alla proposizione precedente $f^*\omega$ non è esatta (in quanto ha integrale non nullo) ed è chiusa, in quanto è una forma di dimensione massima possibile. Usando la dualità di Poincaré possiamo affermare che $f^* : H^n(N) \longrightarrow H^n(M)$ è un isomorfismo. Mostriamo che anche negli altri gradi è iniettiva. Supponiamo per assurdo che $[\alpha] \in H^i(N)$ chiusa e non esatta sia tale che $[f^*\alpha] = 0$, grazie alla dualità di Poincaré possiamo sceglie $\gamma \in \Omega^{n-i}(N)$ chiusa tale che $\int_N \alpha \wedge \gamma \neq 0$. Da ciò seguirebbe la non esattezza di $f^*(\alpha \wedge \gamma)$ (per il teorema di Stokes), ma tale forma sarebbe chiusa in quanto sia $f^*\alpha$ che $f^*\gamma$ lo sono. Potremmo perciò affermare che:

$$0 \neq [f^*(\alpha \wedge \gamma)] = [f^*\alpha] \wedge [f^*\gamma]$$

e quindi non può essere $[f^*\alpha] = 0$, da cui l'assurdo. □

Nel nostro specifico caso otteniamo che

Corollario 4.1. p^* è iniettiva perché soddisfa le ipotesi del teorema precedente.

4.2 La formula di Weyl e la dimensione di $H^*(G)$

Mostreremo in questa sezione la formula del carattere di Weyl e la useremo per calcolare la dimensione di $H^*(G)$.
Siano N e M connesse compatte e orientabili, il loro prodotto è ancora connesso, compatto e orientabile. Una forma su M (o N) ne induce naturalmente una su $M \times N$, si ha che il prodotto $\wedge$ di due forme volume indotte da quelle su M e N rispettivamente è una forma volume di $M \times N$. Alla luce di ciò vale che

Proposizione 4.8. *Siano M, N, P varietà differenziabili connesse compatte orientabili tali che* $\dim M + \dim N = \dim P$. *Sia* $\eta : M \times N \longrightarrow P$ *una funzione liscia di grado non nullo e siano* ω_M, ω_N, ω_P *relative forme volume, si ha che:*

$$\int_P f\, \omega_P = \frac{1}{\deg \eta} \int_{M\times N} f \circ \eta \, \det(d\eta)\, \omega_M \wedge \omega_N$$

$\forall f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dove* $\det(d\eta)$ *è tale che*

$$\det(d\eta)\, \omega_M \wedge \omega_N = \eta^* \omega_P.$$

Grazie a quanto mostrato finora, possiamo enunciare finalmente il seguente teorema.

Teorema 4.9 (Formula integrale di Weyl). *Sia* ω_G, $\omega_{G/T}$ *e* ω_T *le forme volume normalizzate definite nella sezione precedente. Sia* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione continua, allora vale:*

$$\int_G f(g)\, \omega_G = \frac{1}{|W|} \int_{G/T \times T} f \circ p(gT, t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}}) \omega_{G/T} \wedge \omega_T.$$

Nello specifico, se f è una funzione di classe abbiamo che:

$$\int_G f(g)\, \omega_G = \frac{1}{|W|} \int_T f(t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_T.$$

Dimostrazione. Usando la proposizione precedente e il lemma 4.3 la prima tesi è immediata. Sia ora f una funzione di classe, per il teorema di Fubini-Tonelli (le varietà in questione sono compatte) si ha:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|W|} \int_{G/T \times T} f \circ p(gT, t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_{G/T} \wedge \omega_T = \\
&= \frac{1}{|W|} \int_T \left(\int_{G/T} f \circ p(gT, t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_{G/T} \right) \omega_T = \\
&= \frac{1}{|W|} \int_T \left(\int_{G/T} f(t)\, \omega_{G/T} \right) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_T = \\
&= \frac{1}{|W|} \int_T \left(\int_{G/T} \omega_{G/T} \right) f(t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_T = \\
&= \frac{1}{|W|} \int_T f(t) \det(\mathrm{Ad}_{t\,|\mathfrak{m}} - Id_{\mathfrak{m}})\, \omega_T,
\end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è vera in quanto $f \circ p(gT, t) = f(gtg^{-1}) = f(t)$.

□

Calcoliamo ora la dimensione di $H^*(G)$ usando la caratterizzazione data nel primo capitolo: $H^*(G) \simeq (\wedge \mathfrak{g}^*)^G$.
Useremo la teoria de caratteri e la Formula integrale di Weyl per calcolare la dimensione dello spazio fissato della rappresentazione $G \curvearrowright \wedge \mathfrak{g}^*$.
Ricordiamo che $\langle v, w \rangle_G$ è un prodotto scalare definito positivo $\mathrm{Ad}(G)$-invariante su $\mathfrak{g}$, questo ci fornisce un isomorfismo G-equivariante fra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$, conseguentemente $\wedge \mathfrak{g} \simeq \wedge \mathfrak{g}^*$ come G rappresentazioni. La dimensione cercata sarà quindi quella di $(\wedge \mathfrak{g})^G$.
Grazie alla teoria classica delle rappresentazioni dei gruppi compatti possiamo definire un prodotto tra caratteri definito da:

$$(\chi_1, \chi_2) = \int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} d\mu = \int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} \omega_G,$$

dove la seconda uguaglianza si ha grazie a 2.10.
La compattezza di G ci garantisce che date ρ e ϕ rappresentazioni qualsiasi, $(\chi_\rho, \chi_\phi) = \dim \mathrm{Hom}_G(\rho, \phi)$. Nel nostro caso, indicando con $\chi(g)$ il carattere della rappresentazione banale e $\chi_{\wedge\mathfrak{g}}$ quello di $G \curvearrowright \wedge\mathfrak{g}$, la tesi si riduce a mostrare che $(\chi, \chi_{\wedge\mathfrak{g}}) = \dim T$. Vogliamo quindi esplicitare il carattere della rappresentazione di interesse:

Lemma 4.10. *Sia $t \in T$, vale l'uguaglianza:*

$$\chi_{\wedge\mathfrak{g}}(t) = \det(Ad_t + Id_{\mathfrak{g}}).$$

Dimostrazione. Consideriamo la rappresentazione complessificata $G \curvearrowright \wedge\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.
Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ che triangolizza $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Consideriamo la base di $\wedge\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ data da:

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

Siano $a_1, \ldots, a_n$ i valori sulla diagonale di Ad_g relativamente alla base $v_1, \ldots, v_n$. L'endomorfismo $\mathrm{Ad}_g : \wedge\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \wedge\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ nella base specificata è triangolare e il valore sulla diagonale relativo al vettore $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ è $a_{i_1} \cdots a_{i_k}$.
La traccia risulta quindi:

$$\sum_{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_k} = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i)$$

Consideriamo ora l'applicazione $\mathrm{Ad}_g + Id_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, scritta nella base $v_1, \ldots, v_n$ risulta triangolare con valori sulla diagonale $(1+a_i)$. Se deduce quindi $\det(\mathrm{Ad}_g + Id_{\mathfrak{g}}) = \prod_{i=1}^n (1+a_i)$, da cui la tesi. □

Possiamo ora dedurre il risultato:

Teorema 4.11. *Sia G gruppo di Lie compatto e T un suo toro massimale, vale:*

$$\dim H^*(G) = 2^{\dim T}.$$

Dimostrazione. Grazie alle osservazioni fatte precedentemente rimane da mostrare che $(1, \chi_{\wedge\mathfrak{g}}) = 2^{\dim T}$, dove con 1 si intende il carattere della rappresentazione banale. I caratteri sono una funzione di classe, possiamo quindi usare il teorema 4.9 per calcolare il prodotto di questi. Grazie a 4.10 abbiamo:

$$1 = (1, 1) = \int_G 1\bar{1}\omega_G = \frac{1}{|W|} \int_T \det(Id - Ad(t))_{|\mathfrak{m}} \omega_T, \tag{4.3}$$

e quindi si ha che

$$|W| = \int_T \det(Id - Ad(t))_{|\mathfrak{m}} \omega_T.$$

Calcoliamo ora la dimensione del sottospazio fissato da W:

$$(1, \chi_{\wedge\mathfrak{g}}) = \int_G 1\overline{\chi_{\wedge\mathfrak{g}}(g)}\omega_G = \int_G \det(Id + Ad(g))\omega_G =$$
$$= \frac{1}{|W|} \int_T \det(Id + Ad(t)) \det(Id - Ad(t))_{|\mathfrak{m}} \omega_T = \frac{2^{\dim T}}{|W|} \int_T \det(Id - Ad(t^2))_{|\mathfrak{m}} \omega_T.$$

Dove la seconda uguaglianza è vera perché $\chi_{\wedge \mathfrak{g}}(g)$ è reale. Passando in coordinate (indicando con $\overline{\mathrm{Ad}}$ la mappa in carte e intendendo che l'argomento è ridotto modulo 2π), si ha che:

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\dim T}}{|W|}\int_T \det\left(Id - Ad(t^2)\right)_{|\mathfrak{m}}\,\omega_T = \\
&= \frac{2^{\dim T}}{|W|}\int_{(0,2\pi)^{\dim T}} \det\left(Id - \overline{\mathrm{Ad}}(2(\theta^1,\dots,\theta^{\dim T}))\right)_{|\mathfrak{m}}\, d\theta^1\cdots d\theta^{\dim T} = \\
&= \frac{2^{\dim T}}{|W|}2^{\dim T}\int_{(0,\pi)^{\dim T}} \det\left(Id - \overline{\mathrm{Ad}}(2(\theta^1,\dots,\theta^{\dim T}))\right)_{|\mathfrak{m}}\, d\theta^1\cdots d\theta^{\dim T} = \\
&= \frac{2^{\dim T}}{|W|}2^{\dim T}\int_{(0,2\pi)^{\dim T}} \det\left(Id - \overline{\mathrm{Ad}}(\theta^1,\dots,\theta^{\dim T})\right)_{|\mathfrak{m}}\, \frac{1}{2^{\dim T}}\, d\theta^1\cdots d\theta^{\dim T} = \\
&= \frac{2^{\dim T}}{|W|}\int_{(0,2\pi)^{\dim T}} \det\left(Id - \overline{\mathrm{Ad}}(\theta^1,\dots,\theta^{\dim T})\right)_{|\mathfrak{m}}\, d\theta^1\cdots d\theta^{\dim T} = 2^{\dim T},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (4.3). □

4.3 $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ come rappresentazione regolare

Consideriamo l'azione di W sulla varietà liscia ${}^{G}\!/_{T}$ definita prima, questa determina una rappresentazione di W su $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$: nella sezione mostreremo che la rappresentazione in questione è quella regolare. A tale scopo utilizzeremo la teoria di Morse per calcolare la dimensione degli $H^i(G,\mathbb{R})$.
Sia $\langle,\rangle_G$ il prodotto su $\mathfrak{g}$ $Ad(G)$-invariante definito precedentemente, consideriamo la seguente funzione

Definizione 4.3. Sia $X \in \mathfrak{t}$ tale che $\exp X$ sia un generatore del toro, definisco:

$$\begin{aligned} f:\ {}^{G}\!/_{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ gT &\mapsto \langle Ad_g(X), X\rangle_G\,. \end{aligned}$$

Mostreremo che f è di Morse.
Notiamo come prima cosa che la funzione è ben definita in quanto $\forall g \in G$, $\forall t \in T$ vale $Ad_{gt}(X) = Ad_g \circ Ad_t(X) = Ad_g(X)$ perché $X \in \mathfrak{t}$ e T è abeliano.
Sia $\overline{f} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $g \mapsto \langle Ad_g(X), X\rangle_G$, questa è liscia perché è composizione di mappe lisce. Grazie al teorema 1.18 $\forall\, gT \in {}^{G}\!/_{T}$ esiste un intorno $U \ni gT$ e una sezione liscia $s : U \longrightarrow G$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\overline{f}"] & \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

da cui si deduce che f è liscia.
Vogliamo ora determinare i punti critici.

Lemma 4.12. *I punti critici di f sono tutti e soli gli elementi $gT \in {}^{N(T)}\!/_{T} = W$.*

Dimostrazione. Sia g_0T un punto critico e siano U, s, $\overline{f}$ come nel diagramma (4.4). Supponiamo senza perdita di generalità che $s(g_0T) = g_0$. Per quanto visto nel primo capitolo si ha che $T_{eT}G/T$ è costituito dai vettori π_*Y al variare di $Y \in \mathfrak{m}$.

$$0 = df_{g_0T}(\tau_{g_0*}\pi_*X) = d\overline{f}_{g_0}(L_{g_0*}X) = \frac{d}{ds}\left[\overline{f}(g_0exp(sY))\right]_{s=0} =$$
$$\frac{d}{ds}\left[\left\langle Ad_{g_0exp(sY)}X, X\right\rangle_G\right]_{s=0} = \left\langle Ad_{g_0}\frac{d}{ds}\left[Ad_{exp(sY)}X\right]_{s=0}, X\right\rangle_G =$$
$$= \langle Ad_{g_0}[Y,X], X\rangle = \left\langle [Y,X], Ad_{g_0^{-1}}X\right\rangle_G = \left\langle Y, [X, Ad_{g_0^{-1}}X]\right\rangle_G,$$

dove l'ultima uguaglianza si ha grazie all'identità 1.2.
Dalla perpendicolarità di $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{t}$ rispetto a $\langle,\rangle_G$ abbiamo che $[X, Ad_{g_0^{-1}}X] \in \mathfrak{t}$, inoltre, dato che il centralizzatore di X in $\mathfrak{g}$ è $\mathfrak{t}$, si ha che l'immagine di $ad(X)$ è tutto $\mathfrak{m}$. g_0T è quindi un punto critico se e solo se $\langle Ad_{g_0}X, \mathfrak{m}\rangle = 0$, cioè se $\mathrm{Ad}(g_0)X \in \mathfrak{t}$ e quindi il coniugio per g_0 deve essere un automorfismo di T in quanto $\exp(X)$ è un valore regolare di T.

$\square$

Sia $w \in W$ e sia h_{wT} l'Hessiano nel punto wT, verifichiamo che nei punti stazionari questo è non degenere.
Definisco $\overline{h_g}(L_{g*}Y, L_{g*}Z)$ con $Y, Z \in \mathfrak{m}$ l'Hessiano di $\overline{f}$ su $\mathfrak{m}$. Consideriamo una sezione locale di g_0T, poniamo g_0 l'immagine di g_0T attraverso la sezione. Per quanto visto nel primo capitolo si ha che $T_{eT}G/T$ è costituito dai vettori π_*Y al variare di $Y \in \mathfrak{m}$. Usando l'isomorfismo dato dall'azione di G a sinistra si ha:

$$h_{gT}(\tau_{g*}\pi_*Y, \tau_{g*}\pi_*Z) = \overline{h}_g(L_{g*}Y, L_{g*}Z) = \frac{d}{dt}\left[d\overline{f}_{g\exp(tZ)}(L_{g\exp(tZ)}Y)\right]_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\left\langle Y, [X, Ad_{(g\exp(tZ))^{-1}}X]\right\rangle_G\right]_{t=0} = \left\langle Y, \frac{d}{dt}\left[Ad_{(g\exp(tZ))^{-1}}X\right]_{t=0}\right\rangle_G =$$
$$= \left\langle Y, [X, [-Z, Ad_{g^{-1}}X]]\right\rangle_G = -\left\langle [X,Y], [Ad_{g^{-1}}X, Z]\right\rangle_G$$

$\forall Y, Z \in \mathfrak{m}$, dove la prima uguaglianza si ha grazie all'esistenza dell'usuale sezione liscia.
Valutando nella base $X_1, \ldots X_{2v}$ introdotta nei preliminari e ricordando l'equazione (1.3) si ha:

$$\overline{h}_g(dL_gX_i, dL_gX_j) = -\left\langle [X, X_i], [Ad_{g^{-1}}X, X_j]\right\rangle_G = -\alpha_i(X)\alpha_j(Ad_{g^{-1}}X)\left\langle X_{i\pm v}, X_{j\pm v}\right\rangle_G,$$

dove con $i \pm v$ si intende $i + v$ se $i \leq v$ e $i - v$ altrimenti (e analogo per j).
h_{gT} risulta quindi diagonale. $\exp(X)$ e, di conseguenza, $\exp(\mathrm{Ad}_g X)$ sono generatori, se fosse $\alpha_i(X) = 0$ (o $\alpha_i(\mathrm{Ad}_g X) = 0$) si avrebbe per densità che $\alpha_i \equiv 0$, che è impossibile in quanto θ_i non è identicamente nullo. Da questo ragionamento si deduce che h_{gT} è non degenere.
Vogliamo ora calcolare il grado di Morse della mappa f nei punti critici, cioè dato $w \in W$ ci chiediamo quale sia il valore di $i(w)$ indice negativo della segnatura di h_w, per quanto appena visto si ha:

$$i(gT) = 2 \cdot \#\left\{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha(X)\alpha(Ad_{g^{-1}}X) < 0\right\}.$$

Come detto prima $\alpha_i(X) \neq 0$, posso quindi definire positive le radici per cui $\alpha(X) > 0$ e negative le altre. Notiamo che $\alpha(Ad_{g^{-1}}(X)) = (w \cdot \alpha)(X)$, ci chiediamo quindi quante sono le radici positive che diventano negative dopo l'azione di w. Per la teoria classica sui gruppi di riflessione abbiamo che tale valore è $l(w)$ dove con $l(w)$ si intende il numero minimo di riflessioni da concatenare per ottenere w.
Ne consegue che $i(gT) = 2l(gT)$. Ricordiamo il seguente teorema della teoria di morse:

Teorema 4.13. *Sia M una varietà liscia e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di morse con punti critici P. M è omotopicamente equivalente a un CW-complesso con esattamente una cella per ogni $p \in P$ di dimensione $i(p)$.*

Grazie a questo teorema si ha che $H^i\left({}^G\!/_T, \mathbb{R}\right) = 0$ per i dispari e $\dim H^{2i}\left({}^G\!/_T, \mathbb{R}\right) = \#\{w \in W \mid l(w) = i\}$, conseguentemente varrà che $\dim H^*({}^G\!/_T) = |W|$. Ricordando l'isomorfismo dato dal teorema di de Rham abbiamo che le dimensioni appena calcolate sono le stesse per la coomologia di de Rham.
Per mostrare il risultato finale di questo capitolo sarà fondamentale il seguente

Teorema 4.14 (Teorema del punto fisso di Lefschetz)**.** *Sia M una varietà liscia, compatta e orientata. Data $f : X \longrightarrow X$ tale che i punti fissi siano non degeneri (cioè che $\forall x \in M$ punto fisso, $df_x - Id$ è invertibile), vale che:*

$$\Lambda(f) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}\left(f^* : H^i(M) \longrightarrow H^i(M)\right),$$

dove $\Lambda(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} \operatorname{Sgn}(df_x - Id)$.

Siamo ora pronti per mostrare il teorema finale:

Teorema 4.15. $H^*\left({}^G\!/_T\right)$ *è la rappresentazione regolare di W, dove questo agisce con l'azione descritta a inizio sezione.*

Dimostrazione. Grazie alla teoria classica delle rappresentazioni dei gruppi finiti ci basterà mostrare che il carattere

$$\overline{\chi} = \chi_{H^*\left({}^G\!/_T\right)} : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

è quello della rappresentazione regolare.
Usiamo il teorema del punto fisso di Lefschetz con il morfismo liscio dato dall'azione di $w \in W$ su ${}^G\!/_T$ (che chiameremo $w\cdot$ per brevità). Per $w \neq 1$ il morfismo chiaramente non ha punti fissi, da cui se ne deduce che:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}\left((w\cdot)^* : H^i\left({}^G\!/_T\right) \longrightarrow H^i\left({}^G\!/_T\right)\right) = \\ &= \sum_i \operatorname{Tr}\left((w\cdot)^* : H^i\left({}^G\!/_T\right) \longrightarrow H^i\left({}^G\!/_T\right)\right) = \\ &= \operatorname{Tr}\left((w\cdot)^* : H^*\left({}^G\!/_T\right) \longrightarrow H^*\left({}^G\!/_T\right)\right) = \chi(w), \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio si ha grazie al fatto che $H^i\left({}^G\!/_T\right)$ è nullo per i dispari.
Nel caso in cui $w = 1$ il morfismo indotto in coomologia è l'identità, si ha quindi che $\overline{\chi}(eT) = \dim H^*\left({}^G\!/_T\right) = |W|$ per quanto detto precedentemente. I caratteri di tale rappresentazione sono quelli della regolare, il teorema risulta quindi mostrato. □

4.4 Il teorema di Borel

Nella seguente sezione adotteremo le notazioni dei capitoli precedenti, in particolare porremo $\Phi^+ = \{\alpha_1, \cdots \alpha_v\}$ radici positive e $K_1, \ldots, K_v \in \mathfrak{t}$ base duale definita come nel primo capitolo. Per brevità definiamo inoltre $\partial_i = \partial_{H_i} \in S(\mathfrak{t})$ derivazioni direzionali corrispondenti a H_i, in accordo con quanto definito nel primo capitolo.
Prima di passare al teorema premettiamo un lemma

Lemma 4.16. *Sia* Π *il polinomio primordiale armonico, abbiamo che*

$$\partial_{K_1} \cdots \partial_{K_v} \Pi \neq 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto scalare $\langle , \rangle : S(E^*) \times S(E^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ definito nel terzo capitolo. Questo è tale che $\langle X, Y \rangle = \partial(\overline{\mu}^{-1}(X))(Y)(0)$ ed è definito positivo se ristretto ai polinomi di un grado fissato. Poniamo ora $X = Y = \Pi$, sicuramente si ha:

$$0 < \langle \Pi, \Pi \rangle = \partial(\overline{\mu}^{-1}(\Pi))(\Pi)(0)$$

L'applicazione μ associa a $p \in E^*$ l'elemento duale $q \mapsto \langle q, p \rangle_W$ tramite il prodotto scalare W invariante. Per la costruzione vista nella definizione 1.25, abbiamo che $\mu(\alpha_i) = K_i$ e quindi, estendendo il morfismo a $\overline{\mu}$ come visto nel terzo capitolo, si ha che $\overline{\mu}(\Pi) = \partial_{K_1} \cdots \partial_{K_v}$. Se ne deduce che $\partial_{K_1} \cdots \partial_{K_v} \Pi = \langle \Pi, \Pi \rangle \neq 0$. □

Siamo ora pronti a mostrare l'isomorfismo promesso

Teorema 4.17 (Teorema di Borel)**.** *Possiamo costruire:*

$$c : {}^{S}\!/_{I^+} \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right),$$

isomorfismo W*-equivariante di algebre che raddoppia il grado.*

Dimostrazione. Costruiamo il morfismo voluto. Sia $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tale che $\lambda_{|\mathfrak{m}}$ è l'applicazione nulla, possiamo definire una 2-forma antisimmetrica su $\mathfrak{m}$:

$$\overline{\omega_\lambda}(X, Y) = \lambda([X, Y]),$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{m}$. Questa forma è $Ad(T)$-invariante, infatti vale:

$$\overline{\omega_\lambda}(\mathrm{Ad}_t X, \mathrm{Ad}_t Y) = \lambda(\mathrm{Ad}_t[X, Y]) = \lambda(\mathrm{Ad}_t[X, Y]) = \lambda([X, Y]),$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché scomponendo $[X, Y] = Z_\mathfrak{t} + Z_\mathfrak{m}$ nelle componenti in $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{m}$ si ha che $\mathrm{Ad}_t Z_\mathfrak{t} = Z_\mathfrak{t}$ e $\mathrm{Ad}_t Z_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$ e si conclude ricordando che $\lambda_{|\mathfrak{m}} \equiv 0$.
Per il teorema 1.20 possiamo definire una forma ω_λ su tutto lo spazio ${}^{G}\!/_{T}$ grazie all'azione di G per moltiplicazione sinistra: mostriamo ora che ω_λ è chiusa. Siano X, Y, Z campi vettoriali su G, usando 2.1 abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&d\omega_\lambda(gT)(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z) = \\
&- \pi_* X \omega_\lambda(gT)(\pi_* Y, \pi_* Z) + \pi_* Y \omega_\lambda(gT)(\pi_* X, \pi_* Z) - \pi_* Z \omega_\lambda(gT)(\pi_* X, \pi_* Y) \\
&- \omega_\lambda(gT)([\pi_* X, \pi_* Y], \pi_* Z) + \omega_\lambda(gT)([\pi_* X, \pi_* Z], \pi_* Y) - \omega_\lambda(gT)([\pi_* Y, \pi_* Z], \pi_* X).
\end{aligned}$$

Supponiamo che X, Y, Z siano invarianti per moltiplicazione destra, ricordando che il prodotto di Lie commuta con i morfismi lisci e l'osservazione 1.8 si ha che:

$$\begin{aligned}
&d\omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* X, \tau_{g*}\pi_* Y, \tau_{g*}\pi_* Z) = -\tau_{g*}\pi_* X \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* Y, \tau_{g*}\pi_* Z) + \\
&+ \tau_{g*}\pi_* Y \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* X, \tau_{g*}\pi_* Z) - \tau_{g*}\pi_* Z \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* X, \tau_{g*}\pi_* Y) + \\
&- \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* [X, Y], \tau_{g*}\pi_* Z) + \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* [X, Z], \tau_{g*}\pi_* Y) + \\
&- \omega_\lambda(gT)(\tau_{g*}\pi_* [Y, Z], \tau_{g*}\pi_* X) = (-1)\overline{\omega}_\lambda([X, Y], Z) + \overline{\omega}_\lambda([X, Z], Y) + (-1)\overline{\omega}_\lambda([Y, Z], X) = \\
&= \lambda(-[[X, Y], Z] + [[X, Z], Y] - [[Y, Z], X]) = 0,
\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio i primi tre termini si annullano e per i restanti tre si usa la definizione di ω_λ e l'ultimo passaggio è vero per la regola di Jacobi. π_* è suriettiva in quanto π è una sommersione, grazie a questa osservazione $d\omega_\lambda = 0$. In questo modo abbiamo definito un morfismo

$$\begin{aligned} c : \mathfrak{t}^* &\longrightarrow H^2\left({}^{G}\!/_{T}\right)\\ \lambda &\mapsto [\omega_\lambda]. \end{aligned}$$

Consideriamo ora l'azione di $wT \in W$ su ${}^{G}\!/_{T}$ (indichiamola con σ_{wT}), si ha che $\pi \circ R_{w^{-1}} = \sigma_{wT} \circ \pi$, da cui ne consegue:

$$\pi_* \circ R_{w^{-1}*} = \sigma_{wT*} \circ \pi_*. \tag{4.5}$$

Ricordiamo inoltre che vale $\tau_g \sigma_{wT} = \sigma_{wT} \tau_g$, da cui:

$$\tau_{h*} \circ \sigma_{wT*} = \sigma_{wT*} \circ \tau_{h*}. \tag{4.6}$$

Siamo così pronti a mostrare la W-equivarianza del morfismo. Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e consideriamo l'azione di W sulle forme indotta da quella su ${}^{G}\!/_{T}$, si ha

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{wT}^* \cdot \omega_\lambda)(gT)(\tau_{g*}\pi_*X, \tau_{g*}\pi_*Y) = \omega_\lambda(gw^{-1}T)(\sigma_{wT*} \circ \tau_{g*} \circ \pi_*X, \sigma_{wT*} \circ \tau_{g*} \circ \pi_*Y) =\\
&= \omega_\lambda(gw^{-1}T)(\tau_{g*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*X, \tau_{g*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*Y) =\\
&= \omega_\lambda(gw^{-1}T)(\tau_{g*} \circ \tau_{w^{-1}*} \circ \tau_{w*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*X, \tau_{g*} \circ \tau_{w^{-1}*} \circ \tau_{w*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*Y) =\\
&= \omega_\lambda(eT)(\tau_{w*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*X, \tau_{w*} \circ \sigma_{wT*} \circ \pi_*Y) =\\
&= \omega_\lambda(eT)(\pi_* \circ L_{w*} \circ R_{w^{-1}*}X, \pi_* \circ L_{w*} \circ R_{w^{-1}*}Y) =\\
&= \lambda\left([L_{w*} \circ R_{w^{-1}*}X, L_{w*} \circ R_{w^{-1}*}Y]\right) = (w \cdot \lambda)\left([X, Y]\right) = \omega_{w\cdot\lambda}(eT)(\pi_*X, \pi_*Y) =\\
&= \omega_{w\cdot\lambda}(gT)(\tau_{g*}\pi_*X, \tau_{g*}\pi_*Y),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'osservazione 1.8 e le equazioni 4.5 e 4.6: l'equazione appena ottenuta ci garantisce la W-equivarianza.
Poniamo per brevità $S = S(\mathfrak{t}^*)$. Possiamo estendere il morfismo c a un'applicazione $\overline{c}$ che raddoppia il grado dato da:

$$\overline{c} : S(\mathfrak{t}^*) \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right),$$

la funzione risulta ben definita, il prodotto è infatti commutativo anche nell'immagine perché, come visto precedentemente, gli elementi di grado dispari sono nulli. Chiaramente anche $\overline{c}$ sarà W-equivariante.
Studiamo ora il nucleo del morfismo. Gli elementi W-invarianti di $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ hanno dimensione uno perché W agisce come la rappresentazione regolare. Dato che $H^0\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ è non nullo in quanto contiene le funzioni costanti, che sono W-invarianti, deve valere necessariamente

$$H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)^W = H^0\left({}^{G}\!/_{T}\right).$$

Conseguentemente l'ideale generato dai polinomi invarianti di grado positivo sono nel nucleo di $\overline{c}$, cioè $I^+ \subset \operatorname{Ker}\overline{c}$.
Dimostriamo ora che nel nucleo non sono presenti altri elementi. Per il risultato 3.23 abbiamo che $S = \mathcal{H} \oplus R$, dove ricordiamo che $\mathcal{H}$ sono i polinomi armonici e R sono quelli W-invarianti. Grazie all'osservazione 3.8 e dato che $\overline{c}$ è di algebre graduate, ci basta verificare che $\mathcal{H}^k \cap \operatorname{Ker}(\overline{c})$ è banale.
Mostriamolo per $k = 2v$. $\mathcal{H}^{2v}$ è generato da Π, sarà quindi necessario verificare che l'immagine di questo polinomio è non nulla.
Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_v$ le radici positive Φ^+ definite nel primo capitolo, per brevità indichiamo

con $\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{\alpha_i}$ dove α_i è inteso esteso a $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ tale che è nullo su $\mathfrak{m}$. Poniamo inoltre $\overline{\omega_\Pi} = \overline{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega}_v$.
$\overline{c}(\Pi)$ è la classe di una $2v$-forma definita agendo con G. Come visto nelle sezioni precedenti questa definisce una forma volume se e solo se la forma su eT non è banale, che è verificato se e solo se $\overline{\omega_\Pi}$ è non nulla in $\mathfrak{m}$.
Per il teorema di Stokes una forma volume non è esatta, quindi per concludere il caso $k = 2v$ ci basta mostrare che $\overline{\omega_\Pi}$ valutato in $X_1, X_{1+v}, \ldots, X_v, X_{2v}$ è non nullo:

$$\begin{aligned}\overline{\omega_\Pi}(X_1, X_{1+v}, \ldots, X_v, X_{2v}) &= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2v}(X_1, X_{1+v}, X_2, \ldots, X_{2v}) = \\ &= \frac{1}{(2v)!} \sum_{\sigma \in S_{2v}} (-1)^{sgn(\sigma)} \omega_1(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(1+v)}) \cdots \omega_{2v}(X_{\sigma(v)}, X_{\sigma(2v)}) = \\ &= \frac{1}{(2v)!} \sum_{\sigma \in S_{2v}} (-1)^{sgn(\sigma)} \alpha_1([X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(1+v)}]) \cdots \alpha_v([X_{\sigma(v)}, X_{\sigma(2v)}])\end{aligned}$$

Per quanto visto nel primo capitolo si ha $[X_i, X_j] \in \mathfrak{m}$ se $|i - j| \neq v$. Ricordando che α_i è nulla su $\mathfrak{m}$ possiamo restringere la sommatoria alle sole permutazioni che scambiano le coppie $\{i, i+v\}$ fra di loro. Notando che le permutazioni che scambiano gli elementi a coppie sono pari, si ottiene

$$\begin{aligned}&\overline{\omega_\Pi}(X_1, \ldots, X_{2v}) = \frac{2^v}{(2v)!} \sum_{\sigma \in S_v} (-1)^{sgn(\sigma)} \alpha_1([X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(1)+v}]) \cdots \alpha_v([X_{\sigma(v)}, X_{\sigma(v)+v}]) = \\ &= \frac{2^v}{(2v)!} \sum_{\sigma \in S_v} (-1)^{sgn(\sigma)} \alpha_1(H_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_v(H_{\sigma(v)}) = \frac{2^v}{(2v)!} \partial_1 \cdots \partial_v \Pi,\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza è vera in quanto $H_i = [X_i, X_{i+v}]$. Usando la proposizione 1.4 abbiamo che $\partial_1 \cdots \partial_v \Pi \neq 0$ se e solo se $\partial_{K_1} \cdots \partial_{K_v} \Pi \neq 0$, per il lemma 4.16 possiamo quindi concludere che $\overline{c}(\Pi) \neq 0$.
Grazie al teorema 3.22 il grado degli elementi omogenei dello spazio $\mathcal{H}$ è al più v. Mostriamo per induzione finita su $k \leq v$ che $\mathcal{H}^{v-k} \cap \operatorname{Ker} \overline{c}$ è banale. Il caso $k = 0$ è già stato trattato. Mostro il passo induttivo.
Poniamo $V = \mathcal{H}^k \cap \operatorname{Ker} \overline{c}$, questo è W-invariante in quanto entrambi gli spazi che intersechiamo lo sono ($\mathcal{H}$ è invariante grazie a 3.9). Per il teorema 3.14 i polinomi alternanti sono divisibili per Π, quindi la rappresentazione alternante non è inclusa in V, se ne deduce che esiste una radice α tale che s_α non agisce su V come $-Id$. Decomponendo $V = V_+ \oplus V_-$ negli autospazi di s_α, troviamo quindi $f \in V_+$ non nullo, vale che $\overline{c}(\alpha f) = \overline{c}(\alpha)\overline{c}(f) = 0$, da cui, per ipotesi induttiva, $\alpha f \in I^+$ in quanto è un polinomio di grado $k + 1$.
Consideriamo l'azione di s_α su $\mathcal{H}$: prendiamo una base omogenea $h_1, \ldots, h_{|W|}$ di $\mathcal{H}$ formata da autovettori per s_α tali che per $1 \leq i \leq r$ l'autovalore sia -1 e 1 per i restanti.
Grazie al teorema 3.22 possiamo scrivere $\alpha f = \sum_{i=1} h_i \sigma_i$ per dei $\sigma_i \in R$ di grado positivo. Agendo con s_α su $\alpha f = \sum_{i=1} h_i \sigma_i$ otteniamo $-\alpha f = \sum_{i=1}^r -h_i \sigma_i + \sum_{i>r} h_i \sigma_i$, si deve quindi avere che $0 = \sum_{i>r} h_i \sigma_i$.
Poiché $s_\alpha h_i = -h_i$ con $i \leq r$ si ha che gli h_i si annullano su $\operatorname{Ker} \alpha$, grazie al lemma 3.3 possiamo dunque scrivere $h_i = \alpha h'_i$ per degli opportuni $h'_i \in S$. Se ne deduce che $f = \sum_{i=1}^r h'_i \sigma_i \in I^+$. f per ipotesi era armonico, essendo I^+ e $\mathcal{H}$ in somma diretta si ha che $f = 0$: questo conclude la dimostrazione dell'iniettività. Per il teorema 3.22 $\mathcal{H}$ ha dimensione $|W|$ e per il teorema 4.15 $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ ha la stessa dimensione, da cui la suriettività e quindi la tesi. $\square$

4.5 $H^*(G)$ è un'algebra esterna generata da elementi di grado $2d_i - 1$

Concluderemo la trattazione con questa sezione, metteremo insieme quanto mostrato nei precedenti capitoli per trovare la descrizione della coomologia di de Rham promessa in apertura.
Consideriamo l'applicazione $p : {}^{G}\!/_{T} \times T \longrightarrow G$ definita in precedenza, questa induce, come già detto:

$$p^* : H^*(G) \longrightarrow H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right)^W,$$

che è iniettiva per il teorema 4.7. Vorremmo ora mostrare che è un isomorfismo. Introduciamo la formula di Künneth che ci permette di spezzare la coomologia:

$$H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*(T) \simeq H^*\left({}^{G}\!/_{T} \times T\right),$$

dove l'isomorfismo è di algebre graduate e il prodotto a destra è definito da $a \otimes b \cdot c \otimes d = (-1)^{\deg b \cdot \deg c} ac \otimes bd$ dove $a, c \in H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)$ e $b, d \in H^*(T)$. L'isomorfismo in questione è indotto dal prodotto $\wedge$ delle forme, perciò il morfismo sarà W-invariante. Possiamo quindi definire

$$\psi : \ H^*(G) \longrightarrow \left[H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*(T)\right]^W,$$

dato dalla composizione di p^* e l'isomorfismo della formula di Künnet.
Si noti che grazie al teorema di Borel il grado nella prima componente del termine di destra è pari, quindi la struttura moltiplicativa è quella indotta dalla moltiplicazione componente per componente.

Teorema 4.18. *La mappa ψ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Grazie al teorema 4.7 la mappa è iniettiva, per mostrare la suriettività basta verificare che la dimensione del dominio e codominio siano le stesse.
Sia χ il carattere della rappresentazione di W su $H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*(T)$, si deduce che:

$$\dim\left[H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right) \otimes H^*(T)\right]^W = \frac{1}{|W|}\sum_{w \in W} \chi(w) = \frac{1}{|W|}\sum_{w \in W} \chi_{H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)}(w)\chi_{H^*(T)}(w) =$$
$$= \frac{1}{|W|}\chi_{H^*\left({}^{G}\!/_{T}\right)}(1)\chi_{H^*(T)}(1) = \dim H^*(T) = 2^{\dim T},$$

dove la penultima uguaglianza si ha grazie al teorema 4.15 e l'ultima grazie alla descrizione della coomologia del toro T.
Ricordando che per il teorema 4.11 si ha $\dim H^*(G) = 2^{\dim T}$, otteniamo la tesi. □

Veniamo ora al risultato finale del capitolo:

Teorema 4.19. *Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso, sia T un toro massimale di algebra $\mathfrak{t}$ e $W = {}^{N(T)}\!/_{T}$. Sia I^+ l'ideale di $S(\mathfrak{t}^*)$ generato dai polinomi omogenei di grado positivo W-invarianti, si ha che:*

$$H^*(G) \simeq \left[\left({}^{S(\mathfrak{t}^*)}\!/_{I^+}\right)_{(2)} \otimes \wedge\mathfrak{t}^*\right]^W$$

Come algebra graduata. In particolare $H^*(G)$ è un'algebra esterna graduata con generatori di grado $2d_i - 1$ dove i d_i sono i gradi dei polinomi della base di invarianti fornita dal teorema di Chevalley.

Dimostrazione. T è un gruppo di Lie abeliano, grazie alla descrizione fornita dal primo capitolo abbiamo che:

$$H^*(T) \simeq \wedge \mathfrak{t}^*.$$

Che chiaramente risulta W-equivariante in quanto il morfismo di complessi usato nel primo capitolo lo è. Inoltre per il teorema di Borel vale:

$$H^*\left({}^{G}\!/\!_{T}\right) \simeq \left({}^{S}\!/\!_{I^+}\right)_{(2)},$$

come algebre graduate e W-moduli. Unendo questi due risultati e grazie al teorema 4.18 si ha l'isomorfismo cercato.
Per la proposizione 3.18 abbiamo che l'algebra al membro di destra è generata da $\overline{dg_i}$ che hanno bigrado $(\deg g_i - 1, 1) = (d_i - 1, 1)$, notando che il grado nella prima componente è raddoppiato si ha la tesi. □

Osservazione 4.1. Sia G gruppo di Lie compatto, k il numero delle sue componenti connesse e $\mathfrak{t}$ l'algebra di T toro massimale della componente connessa contenente l'identità, si ha:

$$H^*(G) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \left[{}^{S(\mathfrak{t}^+)}\!/\!_{I^+}{}_{(2)} \otimes \wedge \mathfrak{t}^* \right]^W.$$

Dimostrazione. Sia $G^{(e)}$ la componente connessa contenente l'identità. Questo è un gruppo di Lie per il lemma **??**, vale quindi

$$H^*\left(G^{(e)}\right) \simeq \left[{}^{S(\mathfrak{t}^+)}\!/\!_{I^+}{}_{(2)} \otimes \wedge \mathfrak{t}^* \right]^W.$$

Ricordando l'osservazione 2.6 e che la coomologia di de Rham è somma diretta delle coomologie delle sue componenti connesse si ha la tesi. □

Bibliografia

[Ada69] J. Frank Adams. *Lectures on Lie groups*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969, pp. xii+182.

[BD03] T. Bröcker e T. Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 9783540136781. URL: https://books.google.it/books?id=AfBzWL5bIIQC.

[Fok10] Chi-Kwong Fok. *Cohomology and K-theory of compact lie groups*. 2010, p. 29. URL: http://pi.math.cornell.edu/~ckfok/Cohomology_Lie_groups.pdf.

[Hel84] Sigurdur Helgason. *Groups and geometric analysis*. Vol. 113. Pure and Applied Mathematics. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984, pp. xix+654. ISBN: 0-12-338301-3.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972, pp. xii+169.

[Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*. Vol. 29. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990, pp. xii+204. ISBN: 0-521-37510-X. DOI: 10.1017/CBO9780511623646. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623646.

[Lee03] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003, pp. xviii+628. ISBN: 0-387-95495-3. DOI: 10.1007/978-0-387-21752-9. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-21752-9.

[Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963, pp. vi+153.

[Ree95] Mark Reeder. «On the cohomology of compact Lie groups». In: *Enseign. Math. (2)* 41.3-4 (1995), pp. 181–200. ISSN: 0013-8584.

[Sol63] Louis Solomon. «Invariants of finite reflection groups». In: *Nagoya Math. J.* 22 (1963), pp. 57–64. ISSN: 0027-7630. URL: http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118801157.

[War71] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman e Co., Glenview, Ill.-London, 1971, pp. viii+270.