Classi di Chern

Seminario di Geometria Algebrica B

Davide Gori

Università di Pisa

24 novembre 2020

Prima classe di Chern

M varietà complessa, connessa, compatta.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

Prima classe di Chern

M varietà complessa, connessa, compatta.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$$

c_1 mappa di bordo.

Prima classe di Chern

M varietà complessa, connessa, compatta.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$$

c_1 mappa di bordo.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{A}_M^\star \longrightarrow 0$$

Prima classe di Chern

M varietà complessa, connessa, compatta.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$$

c_1 mappa di bordo.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{A}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{O}_M \hookrightarrow \mathcal{A}_M$$

$$\begin{tikzcd}
H^1(M, \mathcal{O}_M) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) \arrow[r, "c_1"] \arrow[d] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
H^1(M, \mathcal{A}_M) \arrow[r] & H^1(M, \mathcal{A}_M^\star) \arrow[r] & H^2(M, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Prima classe di Chern

M varietà complessa, connessa, compatta.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$$

c_1 mappa di bordo.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{A}_M^\star \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{O}_M \hookrightarrow \mathcal{A}_M$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(M, \mathcal{O}_M) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{O}_M^\star) & \xrightarrow{c_1} & H^2(M, \mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
0 = H^1(M, \mathcal{A}_M) & \longrightarrow & H^1(M, \mathcal{A}_M^\star) & \longrightarrow & H^2(M, \mathbb{Z})
\end{array}$$

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.
- c_i in $H^\star(M, \mathbb{Z})$.

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.
- c_i in $H^\star(M, \mathbb{Z})$.

Preliminari per l'ultima parte:

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.
- c_i in $H^\star(M, \mathbb{Z})$.

Preliminari per l'ultima parte:

- Omologia simpliciale, singolare e di CW complessi.

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.
- c_i in $H^\star(M, \mathbb{Z})$.

Preliminari per l'ultima parte:

- Omologia simpliciale, singolare e di CW complessi.
- Grassmanniane: definizione e prime proprietà.

Contenuti

- c_1 attraverso la metrica.
- c_i su fibrati qualunque, attraverso la metrica.
- c_i in $H^\star(M, \mathbb{Z})$.

Preliminari per l'ultima parte:

- Omologia simpliciale, singolare e di CW complessi.
- Grassmanniane: definizione e prime proprietà.
- Cicli di Shubert, definizione e proprietà di intersezione.

Notazione e richiami

Connessione e curvatura

Data una connessione $D : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(E)$, su un banalizzante U_α:

$$De_i = \sum \theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{e} \quad D^2 e_i = \sum \Theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{con} \quad \Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha$$

Dove e_i è un frame, θ_α la **matrice di connessione** di 1-forme e Θ_α la **matrice di curvatura** di 2-forme.

Notazione e richiami

Connessione e curvatura

Data una connessione $D : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(E)$, su un banalizzante U_α:

$$De_i = \sum \theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{e} \quad D^2 e_i = \sum \Theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{con} \quad \Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha$$

Dove e_i è un frame, θ_α la **matrice di connessione** di 1-forme e Θ_α la **matrice di curvatura** di 2-forme.

Possiamo estendere:

$$D : \mathcal{A}^q(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(E)$$

Con $D(\psi \otimes \epsilon) = d\psi \otimes \epsilon + (-1)^q \psi \wedge D(\epsilon)$

Notazione e richiami

Connessione e curvatura

Data una connessione $D : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(E)$, su un banalizzante U_α:

$$De_i = \sum \theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{e} \quad D^2 e_i = \sum \Theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{con} \quad \Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha$$

Dove e_i è un frame, θ_α la **matrice di connessione** di 1-forme e Θ_α la **matrice di curvatura** di 2-forme.

Possiamo estendere:

$$D : \mathcal{A}^q(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(E)$$

Con $D(\psi \otimes \epsilon) = d\psi \otimes \epsilon + (-1)^q \psi \wedge D(\epsilon)$
Inoltre possiamo esprimere la connessione metrica come:

$$\theta = \partial h \cdot h^{-1}$$

Notazione e richiami

Connessione e curvatura

Data una connessione $D : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(E)$, su un banalizzante U_α:

$$De_i = \sum \theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{e} \quad D^2 e_i = \sum \Theta_{\alpha,ij} e_j \quad \text{con} \quad \Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha$$

Dove e_i è un frame, θ_α la **matrice di connessione** di 1-forme e Θ_α la **matrice di curvatura** di 2-forme.

Possiamo estendere:

$$D : \mathcal{A}^q(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(E)$$

Con $D(\psi \otimes \epsilon) = d\psi \otimes \epsilon + (-1)^q \psi \wedge D(\epsilon)$
Inoltre possiamo esprimere la connessione metrica come:

$$\theta = \partial h \cdot h^{-1}$$

Sotto il cambio di banalizzante si ha:

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \Theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} \qquad \text{e} \qquad \theta_\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Descrizione prima classe di Chern

Attraverso $H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$ abbiamo:

Descrizione prima classe di Chern

Attraverso $H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$ abbiamo:

Teorema (c_1 attraverso una connessione)

Sia $L \to M$ un line bundle, θ una connessione, si ha:

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] \in H^2_{DR}(M)$$

.

Descrizione prima classe di Chern

Attraverso $H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$ abbiamo:

Teorema (c_1 attraverso una connessione)

Sia $L \to M$ un line bundle, θ una connessione, si ha:

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] \in H^2_{DR}(M)$$

.

Teorema (c_1 come classe fondamentale)

se $L = [D]$ con $D \in Div(M)$ e η_D classe fondamentale di D:

$$c_1(L) = \eta_D \in H^2_{DR}(M)$$

.

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $c_1(L)$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

In coomologia di Čech su $\{U_\alpha\}$ banalizzanti con $U_{\alpha\beta}$ semplicemente connessi, definiamo:

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $c_1(L)$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

In coomologia di Čech su $\{U_\alpha\}$ banalizzanti con $U_{\alpha\beta}$ semplicemente connessi, definiamo:

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\log g_{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad z_{\alpha\beta\gamma} = w_{\alpha\beta} + w_{\beta\gamma} - w_{\alpha\gamma}$$

Chiaramente $\{z_{\alpha\beta\gamma}\} \in Z^2(U, \mathbb{Z})$.

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $c_1(L)$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathcal{O}_M^\star \longrightarrow 0$$

In coomologia di Čech su $\{U_\alpha\}$ banalizzanti con $U_{\alpha\beta}$ semplicemente connessi, definiamo:

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\log g_{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad z_{\alpha\beta\gamma} = w_{\alpha\beta} + w_{\beta\gamma} - w_{\alpha\gamma}$$

Chiaramente $\{z_{\alpha\beta\gamma}\} \in Z^2(U, \mathbb{Z})$.

$$z_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}\left(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma}\right)$$

Possiamo vedere questo cociclo in $H^2(M, \mathbb{C})$.

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$:

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha = d\theta_\alpha$$

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$:

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha = d\theta_\alpha$$

Ripercorrendo De Rham astratto:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^\infty_M \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \xrightarrow{d} \Lambda^3 \xrightarrow{d} \dots$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^\infty_M \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1_d \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Z}^1_d \longrightarrow \Lambda^1_M \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2_d \longrightarrow 0$$

e i morfismi di bordo nelle sequenze lunghe ci forniscono una mappa:

$$\frac{H^0(M, \mathcal{Z}^2_d)}{dH^0(M, \Lambda^1_M)} \xrightarrow{\delta_1} H^1(M, \mathcal{Z}^1_d) \xrightarrow{\delta_2} H^2(M, \mathbb{C})$$

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Descriviamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$:

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha = d\theta_\alpha$$

Ripercorrendo De Rham astratto:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^\infty_M \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \xrightarrow{d} \Lambda^3 \xrightarrow{d} \dots$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^\infty_M \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1_d \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Z}^1_d \longrightarrow \Lambda^1_M \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2_d \longrightarrow 0$$

e i morfismi di bordo nelle sequenze lunghe ci forniscono una mappa:

$$\frac{H^0(M, \mathcal{Z}^2_d)}{dH^0(M, \Lambda^1_M)} \xrightarrow{\delta_1} H^1(M, \mathcal{Z}^1_d) \xrightarrow{\delta_2} H^2(M, \mathbb{C})$$

Ancora una volta, scrivendo la mappa di bordo usando la coomologia di Čech, si ha che:

$$\delta_1(\Theta) = \{\theta_\beta - \theta_\alpha\}_{\alpha,\beta} \in Z^1(\mathcal{Z}^1_d)$$

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Esplicitiamo la matrice di connessione:

$$\theta_\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}$$

$$\text{da cui} \quad \theta_\beta - \theta_\alpha = -dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} = -d(\log g_{\alpha\beta})$$

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Esplicitiamo la matrice di connessione:

$$\theta_\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}$$

$$\text{da cui} \quad \theta_\beta - \theta_\alpha = -dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} = -d(\log g_{\alpha\beta})$$

Quindi sappiamo esplicitare:

$$\begin{aligned} \delta_2\delta_1(\Theta) &= \delta_2(\{-d(\log g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta}) = \\ &= \{-(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma})\}_{\alpha,\beta,\gamma} \in H^2(M, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Dimostrazione $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}\Theta]$

Esplicitiamo la matrice di connessione:

$$\theta_\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}$$

$$\text{da cui} \quad \theta_\beta - \theta_\alpha = -dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} = -d(\log g_{\alpha\beta})$$

Quindi sappiamo esplicitare:

$$\begin{aligned}\delta_2\delta_1(\Theta) &= \delta_2(\{-d(\log g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta}) = \\ &= \{-(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma})\}_{\alpha,\beta,\gamma} \in H^2(M,\mathbb{C})\end{aligned}$$

da cui:

$$\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = \left\{\frac{1}{2\pi i}(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma})\right\}_{\alpha,\beta,\gamma} = c_1(L)$$

sotto l'identificazione $H^2_{DR}(M) \simeq H^2(M,\mathbb{C})$.

Classe fondamentale η_D

$N \subset M$ sottovarietà complessa, compatta, $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} N = k$.

Classe fondamentale η_D

$N \subset M$ sottovarietà complessa, compatta, $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} N = k$.

$$H^{2n-2k}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\phi \mapsto \int_N \phi$$

Classe fondamentale η_D

$N \subset M$ sottovarietà complessa, compatta, $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} N = k$.

$$H^{2n-2k}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\phi \mapsto \int_N \phi$$

Teorema (Dualità di Poincaré)

$$H^{2k}_{DR}(M) \times H^{2n-2k}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\psi, \phi) \mapsto \int \psi \wedge \phi$$

è un accoppiamento perfetto (ricordiamo M compatta).

Classe fondamentale η_D

$N \subset M$ sottovarietà complessa, compatta, $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} N = k$.

$$H^{2n-2k}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\phi \mapsto \int_N \phi$$

Teorema (Dualità di Poincaré)

$$H^{2k}_{DR}(M) \times H^{2n-2k}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\psi, \phi) \mapsto \int \psi \wedge \phi$$

è un accoppiamento perfetto (ricordiamo M compatta).

Esiste $\eta_N \in H^{2k}_{DR}(M)$ tale che

$$\phi \mapsto \int \eta_N \wedge \phi = \int_N \phi$$

Classe fondamentale η_D

Teorema (Stokes per varietà analitiche)

Sia $\phi \in \mathcal{A}^{2n-2k-1}(M)$, V una sottovarietà analitica di codimensione complessa k, si ha:

$$\int_V d\phi = 0$$

Classe fondamentale η_D

Teorema (Stokes per varietà analitiche)

Sia $\phi \in \mathcal{A}^{2n-2k-1}(M)$, V una sottovarietà analitica di codimensione complessa k, si ha:

$$\int_V d\phi = 0$$

Definizione (Classe fondamentale di un divisore)

Sia $D = \sum a_i V_i \in Div(M)$, la seguente mappa è ben posta

$$H^{2n-2}_{DR}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\phi \mapsto \sum a_i \int_{V_i} \phi$$

e possiamo quindi definire $\eta_D \in H^2_{DR}(M)$ come prima.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Mostriamo che $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = \eta_D$, cioè:

$$\int \frac{i}{2\pi}\Theta \wedge \phi = \sum_i a_i \int_{V_i} \phi \quad \forall \phi \in H^{2n-2}_{DR}(M)$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Mostriamo che $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = \eta_D$, cioè:

$$\int \frac{i}{2\pi}\Theta \wedge \phi = \sum_i a_i \int_{V_i} \phi \quad \forall \phi \in H^{2n-2}_{DR}(M)$$

Basta mostrarlo per $D = V$.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Mostriamo che $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = \eta_D$, cioè:

$$\int \frac{i}{2\pi}\Theta \wedge \phi = \sum_i a_i \int_{V_i} \phi \quad \forall \phi \in H^{2n-2}_{DR}(M)$$

Basta mostrarlo per $D = V$.
$\psi_\alpha : [V]_{|U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ banalizzanti e $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ metrica.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Mostriamo che $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = \eta_D$, cioè:

$$\int \frac{i}{2\pi}\Theta \wedge \phi = \sum_i a_i \int_{V_i} \phi \quad \forall \phi \in H^{2n-2}_{DR}(M)$$

Basta mostrarlo per $D = V$.
$\psi_\alpha : [V]_{|U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ banalizzanti e $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ metrica. s sezione, localmente:

$$h(s(x), s(x)) = h_\alpha(x)|\psi_\alpha(s(x))|^2$$

dove $|\cdot|$ è la norma euclidea.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Abbiamo

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = d(\partial h_\alpha \cdot h_\alpha^{-1}) = \bar{\partial}\partial \log h_\alpha$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Abbiamo

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = d(\partial h_\alpha \cdot h_\alpha^{-1}) = \bar{\partial}\partial \log h_\alpha$$

s olomorfa non nulla su U, localmente:

$$\bar{\partial}\partial \log(h(s,s)) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha |\psi_\alpha \circ s|^2) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha)$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Abbiamo

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = d(\partial h_\alpha \cdot h_\alpha^{-1}) = \bar{\partial}\partial \log h_\alpha$$

s olomorfa non nulla su U, localmente:

$$\bar{\partial}\partial \log(h(s,s)) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha |\psi_\alpha \circ s|^2) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha)$$

Sia s olomorfa nulla solo su V.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Abbiamo

$$\Theta_\alpha = d\theta_\alpha = d(\partial h_\alpha \cdot h_\alpha^{-1}) = \bar{\partial}\partial \log h_\alpha$$

s olomorfa non nulla su U, localmente:

$$\bar{\partial}\partial \log(h(s,s)) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha |\psi_\alpha \circ s|^2) = \bar{\partial}\partial \log(h_\alpha)$$

Sia s olomorfa nulla solo su V.

$$\frac{i}{2\pi}\int \Theta \wedge \phi = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{2\pi}\int_{M\setminus D(\epsilon)} \bar{\partial}\partial \log(h(s,s)) \wedge \phi$$

Dove $D(\epsilon) = \{x \in M \text{ t. c. } |s(x)| < \epsilon\}$.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{2\pi}\int_{M\setminus D(\epsilon)} \bar\partial\partial \log(h(s,s)) \wedge \phi = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)} (\partial - \bar\partial)\log(h(s,s)) \wedge \phi \quad \text{usando Stokes} \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)} (\partial - \bar\partial)\log(h_\alpha) \wedge \phi + 2i \cdot Im(\partial \log(\psi_\alpha \circ s)) \wedge \phi
\end{aligned}
$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2\pi}\int_{M\setminus D(\epsilon)} \bar\partial\partial\log(h(s,s))\wedge\phi = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)}(\partial-\bar\partial)\log(h(s,s))\wedge\phi \quad \text{usando Stokes} \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)}(\partial-\bar\partial)\log(h_\alpha)\wedge\phi + 2i\cdot Im(\partial\log(\psi_\alpha\circ s))\wedge\phi
\end{aligned}$$

$(\partial-\bar\partial)\log(h_\alpha)$ è limitata, $f_\alpha = \psi_\alpha \circ s$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{2\pi}\int_{M\setminus D(\epsilon)} \bar\partial\partial \log(h(s,s)) \wedge \phi = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)} (\partial - \bar\partial)\log(h(s,s)) \wedge \phi \quad \text{usando Stokes} \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{\partial D(\epsilon)} (\partial - \bar\partial)\log(h_\alpha) \wedge \phi + 2i \cdot Im(\partial \log(\psi_\alpha \circ s)) \wedge \phi
\end{aligned}
$$

$(\partial - \bar\partial)\log(h_\alpha)$ è limitata, $f_\alpha = \psi_\alpha \circ s$:

$$
\int_{V\cap U_\alpha} \phi = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial D(\epsilon)\cap U_\alpha} Im(\partial \log(f_\alpha)) \wedge \phi
$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \dots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \dots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.
$\phi = \alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha$ dove $w' = (w_2, \dots, w_n)$.

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.
$\phi = \alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha$ dove $w' = (w_2, \ldots, w_n)$.

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \partial \log(f_\alpha) \wedge \phi = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \wedge (\alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha)$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \dots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.
$\phi = \alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha$ dove $w' = (w_2, \dots, w_n)$.

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \partial \log(f_\alpha) \wedge \phi = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \wedge (\alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha) =$$

$$= - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|w_1| = \epsilon / h_i(w)\} \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \alpha' \wedge dw' \wedge d\bar{w}' = \quad \text{(Teorema di Cauchy)}$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.
$\phi = \alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha$ dove $w' = (w_2, \ldots, w_n)$.

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \partial \log(f_\alpha) \wedge \phi = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \wedge (\alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha) =$$

$$= - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|w_1| = \epsilon / h_i(w)\} \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \alpha' \wedge dw' \wedge d\bar{w}' = \quad \text{(Teorema di Cauchy)}$$

$$= -2\pi i \int_{\{|w_1| = 0\} \cap \Delta} \alpha'(0, w_2, \ldots, w_n) \wedge dw' \wedge d\bar{w}' = -2\pi i \int_{V \cap \Delta} \phi$$

Dimostrazione $c_1([D]) = \eta_D$

Dato $z_0 \in V \cap U_\alpha$ liscio, siano $w = (w_1, \dots, w_n)$ in Δ per cui $w_1 = f_\alpha$.
$\phi = \alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha$ dove $w' = (w_2, \dots, w_n)$.

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \partial \log(f_\alpha) \wedge \phi = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D(\epsilon) \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \wedge (\alpha' dw' \wedge d\bar{w}' + \alpha) =$$

$$= - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|w_1| = \epsilon / h_i(w)\} \cap \Delta} \frac{dw_1}{w_1} \alpha' \wedge dw' \wedge d\bar{w}' = \quad \text{(Teorema di Cauchy)}$$

$$= -2\pi i \int_{\{|w_1| = 0\} \cap \Delta} \alpha'(0, w_2, \dots, w_n) \wedge dw' \wedge d\bar{w}' = -2\pi i \int_{V \cap \Delta} \phi$$

Supponendo ϕ reale si ha la tesi.

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

$E \to M$ di rango k, generalizziamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$.

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

$E \to M$ di rango k, generalizziamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$.
Vorremmo $c_r(E) \in H^{2r}_{DR}(M)$.

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

$E \to M$ di rango k, generalizziamo $\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right]$.
Vorremmo $c_r(E) \in H^{2r}_{DR}(M)$.
Abbiamo due problemi:

- $\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$ non definita globalmente.
- Θ_α non è una forma, ma una matrice $k \times k$ di 2 forme.

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

Mappe invarianti per coniugio

Focalizziamo la nostra attenzione sulle funzioni analitiche:

$$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad F(A) = F(gAg^{-1}) \quad \forall g \in GL_n(\mathbb{C})$$

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

Mappe invarianti per coniugio

Focalizziamo la nostra attenzione sulle funzioni analitiche:

$$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad F(A) = F(gAg^{-1}) \quad \forall g \in GL_n(\mathbb{C})$$

Ha senso valutare F come sopra nella curvatura metrica.

Classi di Chern su fibrati vettoriali di dimensione arbitraria

Mappe invarianti per coniugio

Focalizziamo la nostra attenzione sulle funzioni analitiche:

$$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad F(A) = F(gAg^{-1}) \quad \forall g \in GL_n(\mathbb{C})$$

Ha senso valutare F come sopra nella curvatura metrica.

Sia $P : \mathfrak{M}_{n^2} \to \mathbb{C}$ invariante omogeneo di grado k, possiamo definire $P(\Theta) \in \mathcal{A}^{2k}(M)$.

Polinomi invarianti elementari

Definizione (Polinomi elementari invarianti)

Sia $A \in \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$, definiamo i polinomi $P^i : \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$:

$$\det(A + t \cdot I) = \sum_{i=0}^{n} P^{n-k}(A) \cdot t^k$$

Si osservi che P^i è di grado i.

Polinomi invarianti elementari

Definizione (Polinomi elementari invarianti)

Sia $A \in \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$, definiamo i polinomi $P^i : \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$:

$$\det(A + t \cdot I) = \sum_{i=0}^{n} P^{n-k}(A) \cdot t^k$$

Si osservi che P^i è di grado i.

λ_i autovalori, si ha:

$$P^k(A) = \sum_{\#I=k} \det(A_{I,I}) = \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Funzioni olomorfe invarianti

$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa invariante.

Funzioni olomorfe invarianti

$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa invariante.
$F_{|Diag} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si scrive come

$$F_{|Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Funzioni olomorfe invarianti

$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa invariante.
$F_{|Diag} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si scrive come

$$F_{|Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Se A è diagonalizzabile:

$$F(A) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = G(P^1(A), \dots, P^n(A))$$

Funzioni olomorfe invarianti

$F : \mathfrak{M}_{n^2} \simeq \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa invariante.
$F_{|Diag} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si scrive come

$$F_{|Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Se A è diagonalizzabile:

$$F(A) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = G(P^1(A), \dots, P^n(A))$$

Per densità:

$$F(A) = G(P^1(A), \dots, P^n(A)) \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$$

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$
- la classe $[P(\Theta)] \in H^{2k}_{DR}(M)$ non dipende dalla connessione scelta.

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$
- la classe $[P(\Theta)] \in H^{2k}_{DR}(M)$ non dipende dalla connessione scelta.

Servono i seguenti strumenti:

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$
- la classe $[P(\Theta)] \in H^{2k}_{DR}(M)$ non dipende dalla connessione scelta.

Servono i seguenti strumenti:

- costruire una connessione su $E^\star$ e $\mathrm{Hom}(E, E)$,

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$
- la classe $[P(\Theta)] \in H^{2k}_{DR}(M)$ non dipende dalla connessione scelta.

Servono i seguenti strumenti:

- costruire una connessione su $E^\star$ e $\mathrm{Hom}(E, E)$,
- seconda identità di Bianchi,

Ultimo passo prima della definizione di c_i

Proposizione

Sia P polinomio invariante omogeneo, $\deg P = k$:

- $dP(\Theta) = 0$
- la classe $[P(\Theta)] \in H^{2k}_{DR}(M)$ non dipende dalla connessione scelta.

Servono i seguenti strumenti:

- costruire una connessione su $E^\star$ e $\mathrm{Hom}(E, E)$,
- seconda identità di Bianchi,
- formula di polarizzazione.

Costruzione delle connessioni

$E \to M$ fibrato vettoriale complesso, U_α, $g_{\alpha\beta}$ e θ_α definito come solito.

Costruzione delle connessioni

$E \to M$ fibrato vettoriale complesso, U_α, $g_{\alpha\beta}$ e θ_α definito come solito.
$E^\star \to M$ ha mappe di transizione $g^\star_{\alpha\beta} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}_{\alpha\beta}$.

$$E^\star \rightsquigarrow -\,{}^{\mathrm{t}}\theta_\alpha \qquad \text{facile verifica}$$

Costruzione delle connessioni

$E \to M$ fibrato vettoriale complesso, U_α, $g_{\alpha\beta}$ e θ_α definito come solito.
$E^\star \to M$ ha mappe di transizione $g^\star_{\alpha\beta} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}_{\alpha\beta}$.

$$E^\star \rightsquigarrow -\,{}^{\mathrm{t}}\theta_\alpha \qquad \text{facile verifica}$$

Connessione su $\mathrm{Hom}(E, E) \simeq E \otimes E^\star$.

Costruzione delle connessioni

$E \to M$ fibrato vettoriale complesso, U_α, $g_{\alpha\beta}$ e θ_α definito come solito.
$E^\star \to M$ ha mappe di transizione $g^\star_{\alpha\beta} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}_{\alpha\beta}$.

$$E^\star \rightsquigarrow -\,{}^{\mathrm{t}}\theta_\alpha \qquad \text{facile verifica}$$

Connessione su $\mathrm{Hom}(E, E) \simeq E \otimes E^\star$.

$$F \otimes F' \rightsquigarrow D_F \otimes 1 + 1 \otimes D_{F'} \quad \text{verifica la regola di Leibnitz}$$

Costruzione delle connessioni

$E \to M$ fibrato vettoriale complesso, U_α, $g_{\alpha\beta}$ e θ_α definito come solito.
$E^\star \to M$ ha mappe di transizione $g^\star_{\alpha\beta} = {}^{\mathrm{t}}g^{-1}_{\alpha\beta}$.

$$E^\star \rightsquigarrow -\,{}^{\mathrm{t}}\theta_\alpha \qquad \text{facile verifica}$$

Connessione su $\mathrm{Hom}(E, E) \simeq E \otimes E^\star$.

$$F \otimes F' \rightsquigarrow D_F \otimes 1 + 1 \otimes D_{F'} \quad \text{verifica la regola di Leibnitz}$$

quindi su $\mathrm{Hom}(E, E) \simeq E \otimes E^\star$ poniamo:

$$D \otimes 1 + 1 \otimes D^\star$$

che chiameremo D con abuso di notazione

Seconda identità di Bianchi

$D^2 : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(E)$ è C^∞ lineare.

Seconda identità di Bianchi

$D^2 : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(E)$ è C^∞ lineare.
Induce $E \longrightarrow \wedge^2 TM^\star \otimes E$ di fibrati vettoriali.

Seconda identità di Bianchi

$D^2 : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(E)$ è C^∞ lineare.
Induce $E \longrightarrow \wedge^2 TM^\star \otimes E$ di fibrati vettoriali.

$$\mathrm{Hom}(E, \wedge^2 TM^\star \otimes E) = \wedge^2 TM^\star \otimes E^\star \otimes E \quad \text{da cui} \quad \Theta \in \mathcal{A}^2(E \otimes E^\star)$$

Seconda identità di Bianchi

$D^2 : \mathcal{A}^0(E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(E)$ è C^∞ lineare.
Induce $E \longrightarrow \wedge^2 TM^\star \otimes E$ di fibrati vettoriali.

$$\mathrm{Hom}(E, \wedge^2 TM^\star \otimes E) = \wedge^2 TM^\star \otimes E^\star \otimes E \quad \text{da cui} \quad \Theta \in \mathcal{A}^2(E \otimes E^\star)$$

Teorema (Seconda identità di Bianchi)

Fissata una connessione θ su E, usando la notazione già definita:

$$D\Theta = 0 \quad \mathit{in} \quad \mathcal{A}^3(E \otimes E^\star)$$

Seconda identità di Bianchi - dimostrazione

Sia D una connessione, $p \in M$, esiste $U \ni p$ tale che $\theta_U(p) = 0$.

Seconda identità di Bianchi - dimostrazione

Sia D una connessione, $p \in M$, esiste $U \ni p$ tale che $\theta_U(p) = 0$.

$$D\Theta = \sum_{i,j} \left[d \left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) e_i \otimes e_j^\star + \right.$$
$$\left. + \left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) \sum_k \left(\theta_k e_k \otimes e_j^\star + \theta_k e_i \otimes e_k^\star \right) \right]$$

Seconda identità di Bianchi - dimostrazione

Sia D una connessione, $p \in M$, esiste $U \ni p$ tale che $\theta_U(p) = 0$.

$$D\Theta = \sum_{i,j} \left[d \left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) e_i \otimes e_j^\star + \right.$$

$$\left. + \left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) \sum_k \left(\theta_k e_k \otimes e_j^\star + \theta_k e_i \otimes e_k^\star \right) \right] = 0$$

Seconda identità di Bianchi - dimostrazione

Sia D una connessione, $p \in M$, esiste $U \ni p$ tale che $\theta_U(p) = 0$.

$$D\Theta = \sum_{i,j} \left[d\left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) e_i \otimes e_j^\star + \right.$$

$$\left. + \left(d\theta_{i,j} + \sum_k \theta_{i,k} \wedge \theta_{k,j} \right) \sum_k \left(\theta_k e_k \otimes e_j^\star + \theta_k e_i \otimes e_k^\star \right) \right] = 0$$

$\implies$ nulla globalmente.

Formula di polarizzazione

Definizione (forma di polarizzazione)

$P^k : \mathfrak{M}_{n^2} \to \mathbb{C}$ polinomio invariante elementare, poniamo $\tilde{P}^k : (\mathfrak{M}_{n^2})^k \to \mathbb{C}$:

$$\tilde{P}^k(A^1, A^2, \dots, A^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S^k} \sum_{\# I = k} \det(A_I^\tau)$$

Dove A_I^τ ha come i-esima colonna la i-esima colonna di $A_{I,I}^{\tau(i)}$.

Formula di polarizzazione

Definizione (forma di polarizzazione)

$P^k : \mathfrak{M}_{n^2} \to \mathbb{C}$ polinomio invariante elementare, poniamo $\tilde{P}^k : (\mathfrak{M}_{n^2})^k \to \mathbb{C}$:

$$\tilde{P}^k(A^1, A^2, \ldots, A^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S^k} \sum_{\# I = k} \det(A_I^\tau)$$

Dove A_I^τ ha come i-esima colonna la i-esima colonna di $A_{I,I}^{\tau(i)}$.

$\tilde{P}^k$ forma k-lineare e $\tilde{P}^k(A, \ldots, A) = P^k(A)$.

Formula di polarizzazione

Definizione (forma di polarizzazione)

$P^k : \mathfrak{M}_{n^2} \to \mathbb{C}$ polinomio invariante elementare, poniamo $\tilde{P}^k : (\mathfrak{M}_{n^2})^k \to \mathbb{C}$:

$$\tilde{P}^k(A^1, A^2, \ldots, A^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S^k} \sum_{\# I = k} \det(A_I^\tau)$$

Dove A_I^τ ha come i-esima colonna la i-esima colonna di $A_{I,I}^{\tau(i)}$.

$\tilde{P}^k$ forma k-lineare e $\tilde{P}^k(A, \ldots, A) = P^k(A)$. In generale

Sia $P : \mathfrak{M}_{n^2} \to \mathbb{C}$ polinomio invariante omogeneo di grado k, esiste $\tilde{P}$ forma k-lineare tale che $\tilde{P}(A, \ldots, A) = P(A)$.

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Date $A^i \in \mathcal{A}^{d_i}(\mathrm{Hom}(E, E))$, si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \dots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \dots, DA^i, \dots A^k)$$

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Date $A^i \in \mathcal{A}^{d_i}(\mathrm{Hom}(E, E))$, si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \ldots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \ldots, DA^i, \ldots A^k)$$

Come per l'identità di Bianchi.

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Date $A^i \in \mathcal{A}^{d_i}(\mathrm{Hom}(E, E))$, si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \ldots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \ldots, DA^i, \ldots A^k)$$

Come per l'identità di Bianchi. $DA^i = dA^i + ($ dipendenza lineare da $\theta)$.

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Date $A^i \in \mathcal{A}^{d_i}(\mathrm{Hom}(E, E))$, si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \ldots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \ldots, DA^i, \ldots A^k)$$

Come per l'identità di Bianchi. $DA^i = dA^i +$ (dipendenza lineare da θ).
Fissato un punto esiste una carta per cui $\theta_\alpha(P) = 0$.

Dimostrazione proposizione - 1/2

$\tilde{P}$ polarizzazione di P invariante, $\deg P = k$.

$$\tilde{P} : \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_1}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{n^2}(\Lambda^{d_k}) \longrightarrow \Lambda^{\sum d_i}$$

Date $A^i \in \mathcal{A}^{d_i}(\mathrm{Hom}(E, E))$, si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \dots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \dots, DA^i, \dots A^k)$$

Come per l'identità di Bianchi. $DA^i = dA^i +$ (dipendenza lineare da θ).
Fissato un punto esiste una carta per cui $\theta_\alpha(P) = 0$.
Per "vere" matrici di forme si ha:

$$d\tilde{P}(A^1, \dots, A^k) = \sum_i (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} \tilde{P}(A^1, \dots, dA_i, \dots A_k)$$

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \dots, D\Theta, \dots \Theta)$$

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \dots, D\Theta, \dots \Theta) = 0$$

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \dots, D\Theta, \dots \Theta) = 0$$

Secondo punto: date D e D', poniamo $\eta = D - D' \in \mathcal{A}^1(\mathrm{Hom}(E, E))$ e $D_t = D + t(D' - D) = D + t\eta$.

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \dots, D\Theta, \dots \Theta) = 0$$

Secondo punto: date D e D', poniamo $\eta = D - D' \in \mathcal{A}^1(\mathrm{Hom}(E, E))$ e $D_t = D + t(D' - D) = D + t\eta$.
Vogliamo $\frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t)$ esatta.

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \dots, D\Theta, \dots \Theta) = 0$$

Secondo punto: date D e D', poniamo $\eta = D - D' \in \mathcal{A}^1(\mathrm{Hom}(E, E))$ e $D_t = D + t(D' - D) = D + t\eta$.
Vogliamo $\frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t)$ esatta.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t = D_t\eta$$

Dimostrazione proposizione - 2/2

Sostituendo:

$$dP(\Theta) = d\tilde{P}(\Theta, \ldots, \Theta) = \sum_i \tilde{P}(\Theta, \ldots, D\Theta, \ldots \Theta) = 0$$

Secondo punto: date D e D', poniamo $\eta = D - D' \in \mathcal{A}^1(\mathrm{Hom}(E, E))$ e $D_t = D + t(D' - D) = D + t\eta$.
Vogliamo $\frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t)$ esatta.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t = D_t\eta$$

$$d(k\tilde{P}(\eta, \Theta_t, \ldots, \Theta_t)) = k\tilde{P}(D_t\eta, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) =$$

$$= k\tilde{P}(\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}(\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t)$$

Definizione di c_i

Sia Φ l'algebra graduata di polinomi invarianti per $E \to M$, abbiamo:

$$W : \Phi \longrightarrow H^{2\star}_{DR}(M)$$
$$P \mapsto [P(\Theta)]$$

Definizione di c_i

Sia Φ l'algebra graduata di polinomi invarianti per $E \to M$, abbiamo:

$$W : \Phi \longrightarrow H^{2\star}_{DR}(M)$$
$$P \mapsto [P(\Theta)]$$

Definizione (Classi di Chern)

$E \to M$, $\mathrm{rk}_E = k$, D connessione qualunque. Definiamo l'i-**esima classe di Chern**:

$$c_i(E) = \left[P^i(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta) \right] \in H^{2i}_{DR}(M) \qquad \text{e} \qquad c(E) = \sum_{i \geq 0} c_i(E)$$

Definizione di c_i

Sia Φ l'algebra graduata di polinomi invarianti per $E \to M$, abbiamo:

$$W : \Phi \longrightarrow H^{2\star}_{DR}(M)$$
$$P \mapsto [P(\Theta)]$$

Definizione (Classi di Chern)

$E \to M$, $\mathrm{rk}_E = k$, D connessione qualunque. Definiamo l'i-**esima classe di Chern**:

$$c_i(E) = \left[P^i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) \right] \in H^{2i}_{DR}(M) \qquad \text{e} \qquad c(E) = \sum_{i \geq 0} c_i(E)$$

Questa estende c_1 data in precedenza.

Proprietà della classe di Chern

Funtorialità

$f : M \longrightarrow N$ mappa C^∞:

$$c_r(f^\star E) = f^\star c_r(E) \quad \text{e} \quad c(f^\star E) = f^\star c(E)$$

Proprietà della classe di Chern

Funtorialità

$f : M \longrightarrow N$ mappa C^∞:

$$c_r(f^\star E) = f^\star c_r(E) \quad \text{e} \quad c(f^\star E) = f^\star c(E)$$

La classe di Chern non dipende dalla struttura olomorfa.

Proprietà della classe di Chern

Funtorialità

$f : M \longrightarrow N$ mappa C^∞:

$$c_r(f^\star E) = f^\star c_r(E) \quad \text{e} \quad c(f^\star E) = f^\star c(E)$$

La classe di Chern non dipende dalla struttura olomorfa.

Classe di Chern duale

Usando la connessione duale $-\,{}^t\theta_\alpha$: $c_r(E^\star) = (-1)^r c_r(E)$

Proprietà della classe di Chern

Funtorialità

$f : M \longrightarrow N$ mappa C^∞:

$$c_r(f^\star E) = f^\star c_r(E) \quad \text{e} \quad c(f^\star E) = f^\star c(E)$$

La classe di Chern non dipende dalla struttura olomorfa.

Classe di Chern duale

Usando la connessione duale $-{}^t\theta_\alpha$: $c_r(E^\star) = (-1)^r c_r(E)$

formula del prodotto di Whitney

$$c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$$

Proprietà della classe di Chern

Funtorialità

$f : M \longrightarrow N$ mappa C^∞:

$$c_r(f^\star E) = f^\star c_r(E) \quad \text{e} \quad c(f^\star E) = f^\star c(E)$$

La classe di Chern non dipende dalla struttura olomorfa.

Classe di Chern duale

Usando la connessione duale $-\,{}^{\mathrm{t}}\theta_\alpha$: $c_r(E^\star) = (-1)^r c_r(E)$

formula del prodotto di Whitney

$$c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$$

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad \text{vale} \quad c(G) = c(E) \cdot C(F)$$

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span\left\{\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$.

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$
$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span\left\{\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$. Il campo vettoriale $l(X)\frac{\partial}{\partial X_i}$ con l lineare passa al quoziente.

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$
$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span\left\{\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$. Il campo vettoriale $l(X)\frac{\partial}{\partial X_i}$ con l lineare passa al quoziente.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\mathcal{R}} T'\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

Data $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$:

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, n$$
$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span\left\{\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=1,\ldots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$. Il campo vettoriale $l(X)\frac{\partial}{\partial X_i}$ con l lineare passa al quoziente.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\mathcal{R}} T'\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

Data $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$:

$$\mathcal{R}(\sigma) = \pi_\star\left(\sum \sigma_i(X)\frac{\partial}{\partial X_i}\right)$$

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$
$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span\left\{\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$. Il campo vettoriale $l(X)\frac{\partial}{\partial X_i}$ con l lineare passa al quoziente.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\mathcal{R}} T'\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

Data $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$:

$$\mathcal{R}(\sigma) = \pi_\star\left(\sum \sigma_i(X)\frac{\partial}{\partial X_i}\right)$$

$\mathcal{R}$ suriettiva, con kernel $(X_0, \dots, X_n)$.

Un esempio: calcoliamo $c(T'\mathbb{P}^n)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, nella carta U_0:

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\pi_\star \frac{\partial}{\partial X_0} = \sum \frac{X_j}{X_0^2} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$T'_P\mathbb{P}^n = Span \left\{ \pi_\star \frac{\partial}{\partial X_i} \right\}_{i=1,\dots,n}$ con $\sum X_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$. Il campo vettoriale $l(X) \frac{\partial}{\partial X_i}$ con l lineare passa al quoziente.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\mathcal{R}} T'\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

Data $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$:

$$\mathcal{R}(\sigma) = \pi_\star \left(\sum \sigma_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i} \right)$$

$\mathcal{R}$ suriettiva, con kernel $(X_0, \dots, X_n)$. Sia $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \omega$:

$$c(T'\mathbb{P}^n) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}) = (1+\omega)^{n+1}$$

Grassmanniane

Definizione (Grassmanniane)

$Gr(k,V) = \{\Lambda \subset V| \quad \text{sottospazio di dim } V = k\}$. Possiamo rappresentare un elemento:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

A meno dell'azione sinistra di $GL_k(\mathbb{C})$.

Grassmanniane

Definizione (Grassmanniane)

$Gr(k, V) = \{\Lambda \subset V| \quad \text{sottospazio di dim } V = k\}$. Possiamo rappresentare un elemento:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

A meno dell'azione sinistra di $GL_k(\mathbb{C})$. Varietà di dimensione $k(n-k)$.

Grassmanniane

Definizione (Grassmanniane)

$Gr(k, V) = \{\Lambda \subset V| \quad \text{sottospazio di dim } V = k\}$. Possiamo rappresentare un elemento:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

A meno dell'azione sinistra di $GL_k(\mathbb{C})$. Varietà di dimensione $k(n-k)$.
Aperti $U_I = \{\Lambda| \text{ minore colonne I invertibile}\}$.

Grassmanniane

Definizione (Grassmanniane)

$Gr(k,V) = \{\Lambda \subset V| \quad \text{sottospazio di } \dim V = k\}$. Possiamo rappresentare un elemento:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

A meno dell'azione sinistra di $GL_k(\mathbb{C})$. Varietà di dimensione $k(n-k)$.
Aperti $U_I = \{\Lambda|$ minore colonne I invertibile$\}$.
Ad esempio $U_{(1,\dots,k)}$ ha rappresentanti della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \star, & \dots & \star \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$$

Bandiere e decomposizione

$\mathbb{P}^n = Gr(1, \mathbb{C}^{n+1})$, possiamo scrivere $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \mathbb{C}^0$.

Bandiere e decomposizione

$\mathbb{P}^n = Gr(1, \mathbb{C}^{n+1})$, possiamo scrivere $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \mathbb{C}^0$.
Una bandiera $\mathbf{V} = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots V_n = V\}$ con $\dim V_i = i$.

Bandiere e decomposizione

$\mathbb{P}^n = Gr(1, \mathbb{C}^{n+1})$, possiamo scrivere $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \mathbb{C}^0$.
Una bandiera $\mathbf{V} = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots V_n = V\}$ con $\dim V_i = i$.
Per $\Lambda \in Gr(k, V)$ generico, $\Lambda \cap V_i = \max\{0, i+k-n\}$. Poniamo:

$$W_{a_1,\dots,a_k} = \left\{ \Lambda \in Gr(k,V) \;\middle|\; \begin{array}{c} \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) = i \quad \text{e} \\ \dim(\Lambda \cap V_j) < i \text{ per } j < n-k+i-a_i \end{array} \right\}$$

con a_i non crescente e $a_i \leq n-k$.

Bandiere e decomposizione

$\mathbb{P}^n = Gr(1, \mathbb{C}^{n+1})$, possiamo scrivere $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \mathbb{C}^0$.
Una bandiera $\mathbf{V} = \{ V_1 \subset V_2 \subset \ldots V_n = V \}$ con $\dim V_i = i$.
Per $\Lambda \in Gr(k, V)$ generico, $\Lambda \cap V_i = \max\{0, i + k - n\}$. Poniamo:

$$W_{a_1,\ldots,a_k} = \left\{ \Lambda \in Gr(k, V) \;\middle|\; \begin{array}{c} \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) = i \quad \text{e} \\ \dim(\Lambda \cap V_j) < i \text{ per } j < n - k + i - a_i \end{array} \right\}$$

con a_i non crescente e $a_i \leq n - k$. Si ha:

$$\overline{W_{a_1,\ldots,a_k}} = \{\Lambda \in Gr(k, V) \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) \geq i\}$$

Bandiere e decomposizione

$\mathbb{P}^n = Gr(1, \mathbb{C}^{n+1})$, possiamo scrivere $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \mathbb{C}^0$.
Una bandiera $\mathbf{V} = \{V_1 \subset V_2 \subset \ldots V_n = V\}$ con $\dim V_i = i$.
Per $\Lambda \in Gr(k, V)$ generico, $\Lambda \cap V_i = \max\{0, i + k - n\}$. Poniamo:

$$W_{a_1,\ldots,a_k} = \left\{ \Lambda \in Gr(k, V) \;\middle|\; \begin{array}{c} \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) = i \quad \text{ e} \\ \dim(\Lambda \cap V_j) < i \text{ per } j < n - k + i - a_i \end{array} \right\}$$

con a_i non crescente e $a_i \leq n - k$. Si ha:

$$\overline{W_{a_1,\ldots,a_k}} = \{\Lambda \in Gr(k, V) \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) \geq i\}$$

Si riesce facilmente a descrivere $W_{a_1,\ldots,a_k} \simeq \mathbb{C}^{k(n-k)-\sum a_i}$.

Omologia delle Grassmanniane

I $W_{a_1,\ldots,a_k}$ forniscono una decomposizione cellulare di $Gr(k, V)$

Omologia delle Grassmanniane

I $W_{a_1,\dots,a_k}$ forniscono una decomposizione cellulare di $Gr(k, V)$

Teorema (Omologia delle Grassmanniame)

L'omologia singolare a coefficienti interi è generata liberamente dai cicli $\sigma_{a_1,\dots a_k} = [\overline{W_{a_1,\dots a_k}}]$ *in codimensione* $2\sum a_i$.

Omologia delle Grassmanniane

I $W_{a_1,\dots,a_k}$ forniscono una decomposizione cellulare di $Gr(k, V)$

Teorema (Omologia delle Grassmanniame)

L'omologia singolare a coefficienti interi è generata liberamente dai cicli $\sigma_{a_1,\dots a_k} = [\overline{W_{a_1,\dots a_k}}]$ in codimensione $2\sum a_i$.
I $\sigma_{a_1,\dots a_k}$ sono detti **cicli di Shubert**.

$\sigma_{a_1,\dots a_k}$ è indipendente dalla bandiera scelta.

Struttura di algebra sull'omologia

Definizione ($H_\star(M, \mathbb{Z})$ come algebra)

Possiamo costruire:

$$H_{n-k_1}(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k_2}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k_1-k_2}(M, \mathbb{Z})$$

Data dall'intersezioni dei cicli.

Struttura di algebra sull'omologia

Definizione ($H_\star(M, \mathbb{Z})$ come algebra)

Possiamo costruire:

$$H_{n-k_1}(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k_2}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k_1-k_2}(M, \mathbb{Z})$$

Data dall'intersezioni dei cicli.

Nel caso $n - k_1 = k_2$ si ottiene:

Teorema (Dualità di Poincaré)

$$H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \times H_k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

è **unimodulare**.

Struttura di algebra sull'omologia

Definizione ($H_\star(M,\mathbb{Z})$ come algebra)

Possiamo costruire:

$$H_{n-k_1}(M,\mathbb{Z}) \times H_{n-k_2}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k_1-k_2}(M,\mathbb{Z})$$

Data dall'intersezioni dei cicli.

Nel caso $n-k_1=k_2$ si ottiene:

Teorema (Dualità di Poincaré)

$$H_{n-k}(M,\mathbb{Z}) \times H_k(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

è **unimodulare**. *Inoltre:*

$$H_{n-k}(M,\mathbb{Q}) \times H_k(M,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_0(M,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

Accoppiamento perfetto.

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.
Fibrato quoziente universale $Q_V = \frac{V \times Gr(k,V)}{S}$.

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.

Fibrato quoziente universale $Q_V = \frac{V \times Gr(k,V)}{S}$.

$$0 \longrightarrow S_V \longrightarrow V \times Gr(k, V) \longrightarrow Q_V \longrightarrow 0$$

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.
Fibrato quoziente universale $Q_V = \frac{V \times Gr(k,V)}{S}$.

$$0 \longrightarrow S_V \longrightarrow V \times Gr(k, V) \longrightarrow Q_V \longrightarrow 0$$

Il seguente è un isomorfismo naturale:

$$\star : Gr(k, V) \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$$
$$\Lambda \mapsto Ann(\Lambda) = \{l \in V^\star \mid l(\Lambda) = 0\}$$

Osservazione

Il fibrato $S_{V^\star} \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$ ha come pullback attraverso $\star$ $Q_V^\star \longrightarrow Gr(k, V)$.

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.
Fibrato quoziente universale $Q_V = \frac{V \times Gr(k,V)}{S}$.

$$0 \longrightarrow S_V \longrightarrow V \times Gr(k, V) \longrightarrow Q_V \longrightarrow 0$$

Il seguente è un isomorfismo naturale:

$$\star : Gr(k, V) \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$$
$$\Lambda \mapsto Ann(\Lambda) = \{l \in V^\star \mid l(\Lambda) = 0\}$$

Osservazione

Il fibrato $S_{V^\star} \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$ ha come pullback attraverso $\star$ $Q_V^\star \longrightarrow Gr(k, V)$.
Il fibrato $Q_{V^\star} \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$ ha come pullback attraverso $\star$ $S_V^\star \longrightarrow Gr(k, V)$.

Fibrati vettoriali su $Gr(k, V)$

Definizione

Fibrato tautologico $S_V \subset V \times Gr(k, V) \to Gr(k, V)$ tale che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.
Fibrato quoziente universale $Q_V = \frac{V \times Gr(k,V)}{S}$.

$$0 \longrightarrow S_V \longrightarrow V \times Gr(k, V) \longrightarrow Q_V \longrightarrow 0$$

Il seguente è un isomorfismo naturale:

$$\star : Gr(k, V) \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$$
$$\Lambda \mapsto Ann(\Lambda) = \{l \in V^\star \mid l(\Lambda) = 0\}$$

Osservazione

Il fibrato $S_{V^\star} \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$ ha come pullback attraverso $\star$ $Q_V^\star \longrightarrow Gr(k, V)$.
Il fibrato $Q_{V^\star} \longrightarrow Gr(n-k, V^\star)$ ha come pullback attraverso $\star$ $S_V^\star \longrightarrow Gr(k, V)$.

Gauss-Bonnet I

Teorema (Gauss-Bonnet I)

$$c_r(S) = (-1)^r \cdot \sigma^\star_{1,\dots,1}$$

Dove $\sigma^\star_{1,\dots,1}$ *è il duale di Poicaré di* $\sigma_{1,\dots,1}$.

Gauss-Bonnet I

Teorema (Gauss-Bonnet I)

$$c_r(S) = (-1)^r \cdot \sigma^\star_{1,\dots,1}$$

Dove $\sigma^\star_{1,\dots,1}$ è il duale di Poicaré di $\sigma_{1,\dots,1}$.

Per la dimostrazione occorre esplicitare $\sigma^\star_{1,\dots,1}$, si dimostra che:

$$\sigma^\star_{1,\dots,1}(\sigma_a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = n-k,\dots,n-k,n-k-1,\dots,n-k-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Fibrati vettoriali come pullback del fibrato tautologico

Sia $V \subset H^0(M, \mathcal{O}(E))$, $\dim V = n$, tale che $\forall x \; Span\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V} = E_x$.

Fibrati vettoriali come pullback del fibrato tautologico

Sia $V \subset H^0(M, \mathcal{O}(E))$, $\dim V = n$, tale che $\forall x$ $Span\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V} = E_x$.
Definiamo $\Lambda_x \in V$ spazio delle sezioni che si annulla in x ($\dim \Lambda_x = n - k$).

$$
\begin{aligned}
i_V : M &\longrightarrow Gr(n-k, V) \simeq Gr(k, V^\star) \\
x &\mapsto \Lambda_x
\end{aligned}
$$

Localmente in $Gr(k, V^\star)$, $\sigma_i = \sum a_{ij} e_j$:

$$
x \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{n,1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k}(x) & \dots & a_{n,k}(x) \end{pmatrix}
$$

Fibrati vettoriali come pullback del fibrato tautologico

Sia $V \subset H^0(M, \mathcal{O}(E))$, $\dim V = n$, tale che $\forall x$ $Span\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V} = E_x$.
Definiamo $\Lambda_x \in V$ spazio delle sezioni che si annulla in x ($\dim \Lambda_x = n - k$).

$$\begin{aligned} i_V : M &\longrightarrow Gr(n-k, V) \simeq Gr(k, V^\star) \\ x &\mapsto \Lambda_x \end{aligned}$$

Localmente in $Gr(k, V^\star)$, $\sigma_i = \sum a_{ij} e_j$:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{n,1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k}(x) & \dots & a_{n,k}(x) \end{pmatrix}$$

Ora, in $S^\star \longrightarrow Gr(k, V^\star)$, si vede che $V \subset H^0(G(k, V^\star), \mathcal{O}(S^\star))$.

Fibrati vettoriali come pullback del fibrato tautologico

Sia $V \subset H^0(M, \mathcal{O}(E))$, $\dim V = n$, tale che $\forall x \; Span\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V} = E_x$.
Definiamo $\Lambda_x \in V$ spazio delle sezioni che si annulla in x ($\dim \Lambda_x = n - k$).

$$\begin{aligned} i_V : M &\longrightarrow Gr(n-k, V) \simeq Gr(k, V^\star) \\ x &\mapsto \Lambda_x \end{aligned}$$

Localmente in $Gr(k, V^\star)$, $\sigma_i = \sum a_{ij} e_j$:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{n,1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k}(x) & \dots & a_{n,k}(x) \end{pmatrix}$$

Ora, in $S^\star \longrightarrow Gr(k, V^\star)$, si vede che $V \subset H^0(G(k, V^\star), \mathcal{O}(S^\star))$.

$$E = i_V^\star S^\star$$

Fibrati vettoriali come pullback del fibrato tautologico

Sia $V \subset H^0(M, \mathcal{O}(E))$, $\dim V = n$, tale che $\forall x \; Span\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V} = E_x$.
Definiamo $\Lambda_x \in V$ spazio delle sezioni che si annulla in x ($\dim \Lambda_x = n - k$).

$$\begin{aligned} i_V : M &\longrightarrow Gr(n-k, V) \simeq Gr(k, V^\star) \\ x &\mapsto \Lambda_x \end{aligned}$$

Localmente in $Gr(k, V^\star)$, $\sigma_i = \sum a_{ij} e_j$:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{n,1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,k}(x) & \dots & a_{n,k}(x) \end{pmatrix}$$

Ora, in $S^\star \longrightarrow Gr(k, V^\star)$, si vede che $V \subset H^0(G(k, V^\star), \mathcal{O}(S^\star))$.

$$E = i_V^\star S^\star$$

Il pullback di σ_i intesa in $H^0(G(k, V^\star), \mathcal{O}(S^\star))$ è σ_i sezione di $E \to M$.

Gauss-Bonnet II

Luogo di degenerazione

Date $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sezioni di $E \to M$, possiamo definire:

$$D(\sigma)_i = \{x \mid \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

Gauss-Bonnet II

Luogo di degenerazione

Date $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sezioni di $E \to M$, possiamo definire:

$$D(\sigma)_i = \{x \mid \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

Sotto ipotesi di "genericità" e regolarità di σ_i, D_i orientabile e rappresenta un ciclo in omologia.

Gauss-Bonnet II

Luogo di degenerazione

Date $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sezioni di $E \to M$, possiamo definire:

$$D(\sigma)_i = \{x \mid \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

Sotto ipotesi di "genericità" e regolarità di σ_i, D_i orientabile e rappresenta un ciclo in omologia.

Teorema (Gauss-Bonnet II)

$c_r(E)$ è il duale di Poincaré del ciclo di degenerazione D_{k-r+1}.

Gauss-Bonnet II

Luogo di degenerazione

Date $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sezioni di $E \to M$, possiamo definire:

$$D(\sigma)_i = \{x \mid \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

Sotto ipotesi di "genericità" e regolarità di σ_i, D_i orientabile e rappresenta un ciclo in omologia.

Teorema (Gauss-Bonnet II)

$c_r(E)$ è il duale di Poincaré del ciclo di degenerazione D_{k-r+1}.

Caso line bundle

L'enunciato è una generalizzazione del caso di $c_1([D])$ con D divisore.

Gauss-Bonnet II

Luogo di degenerazione

Date $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sezioni di $E \to M$, possiamo definire:

$$D(\sigma)_i = \{x \mid \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

Sotto ipotesi di "genericità" e regolarità di σ_i, D_i orientabile e rappresenta un ciclo in omologia.

Teorema (Gauss-Bonnet II)

$c_r(E)$ è il duale di Poincaré del ciclo di degenerazione D_{k-r+1}.

Caso line bundle

L'enunciato è una generalizzazione del caso di $c_1([D])$ con D divisore.
Se s sezione di $[V]$, D_1 è proprio il luogo di zeri di s.

Una descrizione assiomatica

Le seguenti determinano univocamente la classe di Chern:

Descrizione assiomatica

Sia c_i che associa ad ogni fibrato un elemento di $H^{2i}(M, \mathbb{Z})$, tale che:

- $c_0(E) = 1$
- $f : X \longrightarrow Y$, E su Y: $f^\star c_r(E) = c_r(f^\star E)$
- Whitney: $c(E \oplus F) = c(E) \smile c(F)$
- Normalizzazione: $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = 1 - H$ dove H duale di Poincaré di un iperpiano.