

# Metodi numerici per il calcolo della funzione segno e della decomposizione polare

Hergert Gjoni

12 Luglio 2019

# Elenco dei contenuti

- Funzioni di matrice
  - Funzione segno

# Elenco dei contenuti

- Funzioni di matrice
  - Funzione segno
- Decomposizione polare

- Funzioni di matrice
  - Funzione segno
- Decomposizione polare
- Metodi numerici
  - Metodo di Newton
  - Iterazioni di Padé

- Funzioni di matrice
  - Funzione segno
- Decomposizione polare
- Metodi numerici
  - Metodo di Newton
  - Iterazioni di Padé
- Esperimenti numerici

# Funzioni di matrice

## Definizione: funzione di matrice

Siano dati:

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p) = Z^{-1}AZ$  forma di Jordan associata ad  $A$

Definiamo  $f(A)$  la matrice

$$f(A) := Z \text{diag}(f(J_1), \dots, f(J_p)) Z^{-1}$$

dove

$$f(J_k) := \left[ \begin{array}{cccc} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} m_k$$



# Funzione segno

## Definizione: Funzione segno

Sia dato  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re}(z) = 0\}$  : la funzione

$$\operatorname{sign}(z) := \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

è detta *funzione segno* di  $z$ .

# Funzione segno

## Definizione: Funzione segno

Sia dato  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Re}(z) = 0\}$  : la funzione

$$\operatorname{sign}(z) := \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

è detta *funzione segno* di  $z$ .

## Definizione: Funzione segno di matrice

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  avente autovalori non immaginari puri. Sia  $J = Z^{-1}AZ$  forma di Jordan associata ad  $A$ , con  $J = \operatorname{diag}(J_-, J_+)$ .

Si definisce *funzione segno* di  $A$  la funzione

$$\operatorname{sign}(A) := Z \begin{bmatrix} -I_p & \\ & I_q \end{bmatrix} Z^{-1}$$

# Proprietà della funzione segno

# Proprietà della funzione segno

Sia  $S = \text{sign}(A)$ , allora

- $S^2 = I$ , dove  $I$  è la matrice identità
- $S$  è diagonalizzabile con autovalori  $\pm 1$
- $SA = AS$
- Se  $A$  è reale allora anche  $S$  è reale
- $(I + S)/2$  e  $(I - S)/2$  sono proiezioni sui sottospazi invarianti associati agli autovalori con parte reale positiva e con parte reale negativa

# Decomposizione polare

## Teorema

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertibile. Allora esistono e sono uniche  $U$  matrice unitaria e  $H$  matrice Hermitiana e definita positiva tale che  $A = UH$ .

## Teorema

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertibile. Allora esistono e sono uniche  $U$  matrice unitaria e  $H$  matrice Hermitiana e definita positiva tale che  $A = UH$ .

## Definizione: Decomposizione polare di una matrice

La decomposizione  $A = UH$  si chiamerà *Decomposizione polare* di  $A$ .





Esistono applicazioni che fanno uso sia della funzione segno sia della decomposizione polare. Alcune di esse sono:

Esistono applicazioni che fanno uso sia della funzione segno sia della decomposizione polare. Alcune di esse sono:

- Ricerca di sottospazi invarianti di  $\mathbb{C}^n$  (Funzione segno)

Esistono applicazioni che fanno uso sia della funzione segno sia della decomposizione polare. Alcune di esse sono:

- Ricerca di sottospazi invarianti di  $\mathbb{C}^n$  (Funzione segno)
- Ortogonalizzazione ottimale: data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cercare la matrice ortogonale più "vicina" ad  $A$ . (Decomposizione polare)
  - L'ortogonalizzazione ottimale viene usata per trovare soluzioni numeriche ortogonali di determinate equazioni differenziali matriciali.

Tra la funzione segno di matrice e la decomposizione polare esistono delle relazioni. Le relazioni che ci interessano maggiormente sono le **relazioni numeriche**:

Tra la funzione segno di matrice e la decomposizione polare esistono delle relazioni. Le relazioni che ci interessano maggiormente sono le **relazioni numeriche**:

- Esistono metodi numerici per il calcolo della funzione segno di matrice.

Tra la funzione segno di matrice e la decomposizione polare esistono delle relazioni. Le relazioni che ci interessano maggiormente sono le **relazioni numeriche**:

- Esistono metodi numerici per il calcolo della funzione segno di matrice.
- È possibile ereditare da tali metodi ulteriori metodi numerici per il calcolo della decomposizione polare di matrice.

Tra i diversi metodi numerici per il calcolo della funzione segno quelli che vedremo noi saranno



Tra i diversi metodi numerici per il calcolo della funzione segno quelli che vedremo noi saranno

- Metodo di Newton

Tra i diversi metodi numerici per il calcolo della funzione segno quelli che vedremo noi saranno

- Metodo di Newton
- Iterazioni di Padé
  - Iterazioni standard di Padé
  - Iterazioni reciproche di Padé
  - Iterazioni duali di Padé

# Metodo di Newton

## Definizione: Metodo di Newton

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalori non immaginari puri definiamo *Metodo di Newton* il metodo iterativo dato dalla successione:

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad k \geq 0 \quad X_0 = A.$$

## Definizione: Metodo di Newton

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalori non immaginari puri definiamo *Metodo di Newton* il metodo iterativo dato dalla successione:

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad k \geq 0 \quad X_0 = A.$$

Il metodo di Newton ha convergenza quadratica a  $\text{sign}(A)$ .

## Definizione: Metodo di Newton

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalori non immaginari puri definiamo *Metodo di Newton* il metodo iterativo dato dalla successione:

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad k \geq 0 \quad X_0 = A.$$

Il metodo di Newton ha convergenza quadratica a  $\text{sign}(A)$ .

Il metodo di Newton può presentare dei problemi di convergenza iniziale se  $\rho(A) \gg 1$  oppure se alcuni suoi autovalori sono molto vicini all'asse immaginario.

# Metodo di Newton con scaling

# Metodo di Newton con scaling

Il **metodo di Newton con scaling** è un metodo definito dalla successione

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-1}), \quad k \geq 0, \mu_k > 0 \quad X_0 = A.$$



# Metodo di Newton con scaling

Il **metodo di Newton con scaling** è un metodo definito dalla successione

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-1}), \quad k \geq 0, \mu_k > 0 \quad X_0 = A.$$

I parametri  $\mu_k$  accelerano la convergenza iniziale.

# Metodo di Newton con scaling

Il **metodo di Newton con scaling** è un metodo definito dalla successione

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-1}), \quad k \geq 0, \mu_k > 0 \quad X_0 = A.$$

I parametri  $\mu_k$  accelerano la convergenza iniziale.

I parametri più utilizzati sono

- determinantal scaling:  $\mu_k = |\det(X_k)|^{-1/n}$
- spectral scaling:  $\mu_k = \sqrt{\rho(X_k^{-1})/\rho(X_k)}$
- norm scaling:  $\mu_k = \sqrt{\|X_k^{-1}\|/\|X_k\|}$ , per un opportuna norma  $\|\cdot\|$ .

# Metodo di Newton con scaling

Il **metodo di Newton con scaling** è un metodo definito dalla successione

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-1}), \quad k \geq 0, \mu_k > 0 \quad X_0 = A.$$

I parametri  $\mu_k$  accelerano la convergenza iniziale.

I parametri più utilizzati sono

- determinantal scaling:  $\mu_k = |\det(X_k)|^{-1/n}$
- spectral scaling:  $\mu_k = \sqrt{\rho(X_k^{-1})/\rho(X_k)}$
- norm scaling:  $\mu_k = \sqrt{\|X_k^{-1}\|/\|X_k\|}$ , per un opportuna norma  $\|\cdot\|$ .

Il metodo ha ancora convergenza quadratica.

# Approssimanti di Padé

## Definizione: Approssimante di Padé

Data una funzione scalare  $f(x)$  diremo che  $r_{km}(x) = p_k(x)/q_m(x)$ , dove  $p_k$  è un polinomio di grado  $k$  e  $q_m$  è un polinomio di grado  $m$ , è una  $[k/m]$  approssimante di Padé di  $f$  se  $q_m(0) = 1$  e  $f(x) - r_{km}(x) = O(x^{k+m+1})$ .

## Definizione: Approssimante di Padé

Data una funzione scalare  $f(x)$  diremo che  $r_{km}(x) = p_k(x)/q_m(x)$ , dove  $p_k$  è un polinomio di grado  $k$  e  $q_m$  è un polinomio di grado  $m$ , è una  $[k/m]$  approssimante di Padé di  $f$  se  $q_m(0) = 1$  e  $f(x) - r_{km}(x) = O(x^{k+m+1})$ .

- L'approssimante di Padé se esiste è unica.

# Iterazione di Padé

## Definizione: Iterazione di Padé

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalori non immaginari puri chiameremo *Iterazione di Padé* l'iterazione data dalla successione

$$X_{k+1} = X_k(p_\ell(1 - X_k^2))(q_m(1 - X_k^2))^{-1}, \quad X_0 = A.$$

dove  $p_\ell(z)/q_m(z)$  è la  $[\ell/m]$  approssimante di Padé della funzione  $g(z) = (1 - z)^{-1/2}$ .



## Definizione: Iterazione di Padé

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalori non immaginari puri chiameremo *Iterazione di Padé* l'iterazione data dalla successione

$$X_{k+1} = X_k(p_\ell(1 - X_k^2))(q_m(1 - X_k^2))^{-1}, \quad X_0 = A.$$

dove  $p_\ell(z)/q_m(z)$  è la  $[\ell/m]$  approssimante di Padé della funzione  $g(z) = (1 - z)^{-1/2}$ .

Se  $\ell \geq m - 1$  l'iterazione di Padé

- Converge a  $\text{sign}(A)$  con ordine di convergenza  $\ell + m + 1$  se  $\|I - A^2\| < 1$  per ogni norma subordinata  $\|\cdot\|$ .
- Per  $\ell = m - 1$ ,  $\ell = m$  converge globalmente a  $\text{sign}(A)$  con ordine  $\ell + m + 1$  (**Iterazione principale di Padé**).

## Teorema (Higham)

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertibile avente la decomposizione polare  $A = UH$ . Sia  $g$  una funzione della forma  $g(X) = Xh(X^2)$ . Supponiamo che l'iterazione  $X_{k+1} = g(X_k)$  converga a  $\text{sign}(X_0)$  con ordine di convergenza  $m$ , con  $X_0 = H$ . Se  $g(X)^* = g(X^*)$  allora la successione

$$Y_{k+1} = Y_k h(Y_k^* Y_k), \quad k \geq 0 \quad Y_0 = A$$

converge a  $U$  con ordine di convergenza  $m$ .

# Metodi numerici per la decomposizione polare

Possiamo fare uso del precedente teorema per ereditare metodi numerici per la decomposizione polare. Possiamo elencare i seguenti metodi:

Possiamo fare uso del precedente teorema per ereditare metodi numerici per la decomposizione polare. Possiamo elencare i seguenti metodi:

- Metodo di Newton

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-*}), k \geq 0, \quad X_0 = A.$$

Il metodo ha convergenza quadratica.

Possiamo fare uso del precedente teorema per ereditare metodi numerici per la decomposizione polare. Possiamo elencare i seguenti metodi:

- Metodo di Newton

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-*}), k \geq 0, \quad X_0 = A.$$

Il metodo ha convergenza quadratica.

- Iterazione di Padé

$$X_{k+1} = X_k p_\ell(I - X_k^* X_k) q_m(I - X_k^* X_k)^{-1}, k \geq 0, \quad X_0 = A$$

Il metodo ha convergenza locale o globale di ordine  $\ell + m + 1$ .

# Metodo di Newton con scaling

Analogamente al caso della funzione segno, per le stesse ragioni, viene applicata una scalatura al metodo di Newton.

**Metodo di Newton con scaling:**

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-*}), k \geq 0, \mu_k > 0, \quad X_0 = A.$$

# Metodo di Newton con scaling

Analogamente al caso della funzione segno, per le stesse ragioni, viene applicata una scalatura al metodo di Newton.

**Metodo di Newton con scaling:**

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-*}), k \geq 0, \mu_k > 0, \quad X_0 = A.$$

Le scalature più usate sono:

- Optimal scaling

$$\mu_k^{\text{opt}} = (\sigma_1(X_k)\sigma_n(X_k))^{-1/2}$$

- $1, \infty$ -norm scaling

$$\mu_k^{1,\infty} = \left( \frac{\|X_k^{-1}\|_1 \|X_k^{-1}\|_\infty}{\|X_k\|_1 \|X_k\|_\infty} \right)^{1/4}$$

- Frobenius norm scaling

$$\mu_k^F = \left( \frac{\|X_k^{-1}\|_F}{\|X_k\|_F} \right)^{1/2}$$

# Metodo di Newton con scaling

Analogamente al caso della funzione segno, per le stesse ragioni, viene applicata una scalatura al metodo di Newton.

**Metodo di Newton con scaling:**

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(\mu_k X_k + \mu_k^{-1} X_k^{-*}), k \geq 0, \mu_k > 0, \quad X_0 = A.$$

Le scalature più usate sono:

- Optimal scaling

$$\mu_k^{\text{opt}} = (\sigma_1(X_k)\sigma_n(X_k))^{-1/2}$$

- $1, \infty$ -norm scaling

$$\mu_k^{1,\infty} = \left( \frac{\|X_k^{-1}\|_1 \|X_k^{-1}\|_\infty}{\|X_k\|_1 \|X_k\|_\infty} \right)^{1/4}$$

- Frobenius norm scaling

$$\mu_k^F = \left( \frac{\|X_k^{-1}\|_F}{\|X_k\|_F} \right)^{1/2}$$

Il metodo ha convergenza quadratica.



In tutti i metodi mostrati finora l'inversione di matrice gioca un ruolo fondamentale. Noi mostreremo tale affermazione restringendoci al metodo di Newton con scaling per decomposizioni polari.

## Definizioni

Sia  $X$  una matrice, sia  $G$  la sua inversa effettivamente calcolata in aritmetica floating point con un algoritmo  $\text{Inv}$ . Diremo che  $\text{Inv}$  è

- Numericamente stabile per  $X$  (NS) se

$$\|G - X^{-1}\|_F \leq \varepsilon \text{cond}_2(X) \|G\|_2$$

- Left-residual stabile per  $X$  (LRS) se

$$\|GX - I\|_F \leq \varepsilon \|G\|_2 \|X\|_2$$

- Right-residual stabile per  $X$  (RRS) se

$$\|XG - I\|_F \leq \varepsilon \|G\|_2 \|X\|_2$$

- Numericamente corretto per  $X$  (NC) se

$$G = (X + \Delta_X)^{-1} + \Delta_G$$

con

$$\|\Delta_X\|_F \leq \varepsilon_X \|X\|_2,$$

$$\|\Delta_G\|_F \leq \varepsilon_G \|G\|_2.$$

- Diremo che Inv è:
  - Alt per  $X$  se è LRS oppure RRS per  $X$
  - Conj per  $X$  se è sia LRS che RRS per  $X$

- Diremo che Inv è:
  - Alt per  $X$  se è LRS oppure RRS per  $X$
  - Conj per  $X$  se è sia LRS che RRS per  $X$
- Se vale che  $\varepsilon_X + \varepsilon_G + \varepsilon_X \varepsilon_G \leq \varepsilon$  e  $\varepsilon \|X\|_2 \|G\|_2 < 1$  allora vale

$$\text{NC} \implies \text{Conj} \implies \text{Alt} \implies \text{NS}$$

- Diremo che Inv è:
  - Alt per  $X$  se è LRS oppure RRS per  $X$
  - Conj per  $X$  se è sia LRS che RRS per  $X$
- Se vale che  $\varepsilon_X + \varepsilon_G + \varepsilon_X \varepsilon_G \leq \varepsilon$  e  $\varepsilon \|X\|_2 \|G\|_2 < 1$  allora vale

$$\text{NC} \implies \text{Conj} \implies \text{Alt} \implies \text{NS}$$

- Si dimostra che se si applica ad una matrice  $A$  il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari) e Inv è NC per ogni matrice della successione effettivamente calcolata (in aritmetica floating point) allora il metodo è numericamente stabile all'indietro.

- Diremo che Inv è:
  - Alt per  $X$  se è LRS oppure RRS per  $X$
  - Conj per  $X$  se è sia LRS che RRS per  $X$
- Se vale che  $\varepsilon_X + \varepsilon_G + \varepsilon_X \varepsilon_G \leq \varepsilon$  e  $\varepsilon \|X\|_2 \|G\|_2 < 1$  allora vale

$$\text{NC} \implies \text{Conj} \implies \text{Alt} \implies \text{NS}$$

- Si dimostra che se si applica ad una matrice  $A$  il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari) e Inv è NC per ogni matrice della successione effettivamente calcolata (in aritmetica floating point) allora il metodo è numericamente stabile all'indietro.
- Mostreremo mediante esperimenti numerici che una proprietà più debole rispetto alla proprietà NC non è una condizione sufficiente per la stabilità all'indietro del metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).

# Esperimenti numerici

# Esperimenti numerici

Sia  $A$  la nostra matrice e sia  $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^s$  la successione di matrici effettivamente calcolate (in aritmetica floating point) usando il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).



# Esperimenti numerici

Sia  $A$  la nostra matrice e sia  $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^s$  la successione di matrici effettivamente calcolate (in aritmetica floating point) usando il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).

Definiamo

- $\tilde{U} = \tilde{X}_s$

- Per ogni  $k = 0, \dots, s$   $\tilde{H}_k := \frac{1}{2}(\tilde{U}^* \tilde{X}_k + \tilde{X}_k^* \tilde{U})$

$$\tilde{X}_k \approx \tilde{U} \tilde{H}_k, (A \approx \tilde{U} \tilde{H}, \tilde{H} := \tilde{H}_0).$$

# Esperimenti numerici

Sia  $A$  la nostra matrice e sia  $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^s$  la successione di matrici effettivamente calcolate (in aritmetica floating point) usando il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).

Definiamo

- $\tilde{U} = \tilde{X}_s$
- Per ogni  $k = 0, \dots, s$   $\tilde{H}_k := \frac{1}{2}(\tilde{U}^* \tilde{X}_k + \tilde{X}_k^* \tilde{U})$

$\tilde{X}_k \approx \tilde{U} \tilde{H}_k$ , ( $A \approx \tilde{U} \tilde{H}$ ,  $\tilde{H} := \tilde{H}_0$ ).

Definiamo le seguenti quantità (errore sinistro, errore destro, errore relativo):

# Esperimenti numerici

Sia  $A$  la nostra matrice e sia  $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^s$  la successione di matrici effettivamente calcolate (in aritmetica floating point) usando il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).

Definiamo

- $\tilde{U} = \tilde{X}_s$
- Per ogni  $k = 0, \dots, s$   $\tilde{H}_k := \frac{1}{2}(\tilde{U}^* \tilde{X}_k + \tilde{X}_k^* \tilde{U})$

$\tilde{X}_k \approx \tilde{U} \tilde{H}_k$ , ( $A \approx \tilde{U} \tilde{H}$ ,  $\tilde{H} := \tilde{H}_0$ ).

Definiamo le seguenti quantità (errore sinistro, errore destro, errore relativo):

- $e_k^{(L)} = \frac{\|I - G_k \tilde{X}_k\|_F}{\|\tilde{X}_k\|_2 \|G_k\|_2}$
- $e_k^{(R)} = \frac{\|I - \tilde{X}_k G_k\|_F}{\|\tilde{X}_k\|_2 \|G_k\|_2}$

# Esperimenti numerici

Sia  $A$  la nostra matrice e sia  $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^s$  la successione di matrici effettivamente calcolate (in aritmetica floating point) usando il metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari).

Definiamo

- $\tilde{U} = \tilde{X}_s$
- Per ogni  $k = 0, \dots, s$   $\tilde{H}_k := \frac{1}{2}(\tilde{U}^* \tilde{X}_k + \tilde{X}_k^* \tilde{U})$

$\tilde{X}_k \approx \tilde{U} \tilde{H}_k$ , ( $A \approx \tilde{U} \tilde{H}$ ,  $\tilde{H} := \tilde{H}_0$ ).

Definiamo le seguenti quantità (errore sinistro, errore destro, errore relativo):

- $e_k^{(L)} = \frac{\|I - G_k \tilde{X}_k\|_F}{\|\tilde{X}_k\|_2 \|G_k\|_2}$
- $e_k^{(R)} = \frac{\|I - \tilde{X}_k G_k\|_F}{\|\tilde{X}_k\|_2 \|G_k\|_2}$
- $\delta_k = \frac{\|\tilde{X}_k - \tilde{U} \tilde{H}_k\|_F}{\|\tilde{X}_k\|_2}$

## Proposizione

Data la successione  $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ ,  $Y_0 = A$  generata dal metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari) vale la disuguaglianza

$$\|Y_k - U\|_2 \leq \|Y_k - Y_k^{-*}\|_2$$

per ogni  $k \geq 0$ .

## Proposizione

Data la successione  $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ ,  $Y_0 = A$  generata dal metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari) vale la disuguaglianza

$$\|Y_k - U\|_2 \leq \|Y_k - Y_k^{-*}\|_2$$

per ogni  $k \geq 0$ .

Introduciamo allora la quantità

$$\beta_k = \|\tilde{X}_k - G_k^*\|_F.$$

## Proposizione

Data la successione  $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ ,  $Y_0 = A$  generata dal metodo di Newton con scaling (per decomposizioni polari) vale la disuguaglianza

$$\|Y_k - U\|_2 \leq \|Y_k - Y_k^{-*}\|_2$$

per ogni  $k \geq 0$ .

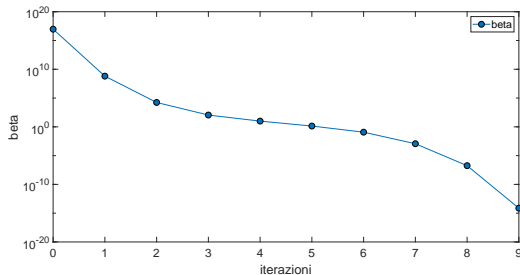
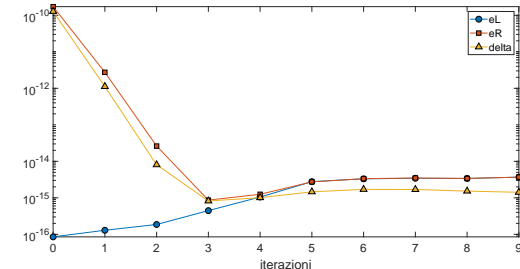
Introduciamo allora la quantità

$$\beta_k = \|\tilde{X}_k - G_k^*\|_F.$$

Effettueremo gli esperimenti con Matlab (usando i  $\mu_k$  in precedenza elencati) e

- Quando  $\beta_k \leq 1.5$  porremo  $\mu_k$  uguale a 1.
- Arrestiamo il processo quando  $\beta_k \leq \sqrt{2\nu_d}n^{1/4}$ , dove  $\nu_d \approx 2.2 \times 10^{-16}$ .

Sia  $L=qr(\text{vand}(25))$ ,  $\text{vand}(25) = [v_{ij}]$ ,  $v_{ij} = (j/25)^{i-1}$ :

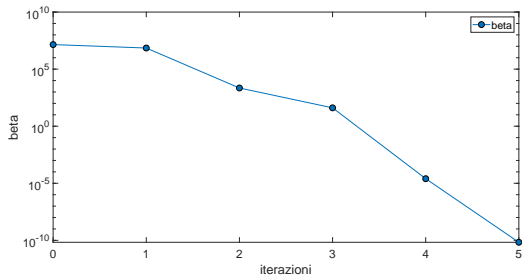
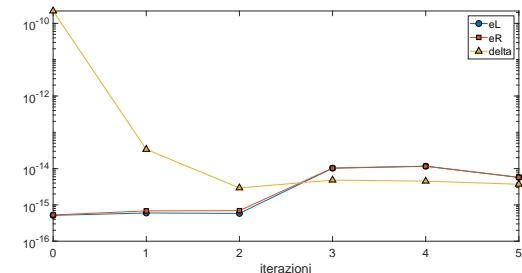


## Esperimento 1

- $n = 25$
- $A=QL^T$ :
- Algoritmo:  
Inv di Matlab
- Scaling:  
 $1, \infty$ -norm scaling
- $\|\tilde{U}^T \tilde{U} - I\|_F \approx 2.68 \times 10^{-15}$
- Gli autovalori di  $\tilde{H}$  sono positivi



Sia  $\alpha = \sqrt{\sigma_{\max}\sigma_{\min}}$ , sia  $d = [10^7, \sqrt{2} \times 10^{-17}, 1, 1, \sqrt{5} \times 10^{-8}, 10^{-7}]$ :



## Esperimento 2:

- $n = 6$
- $A = Q \cdot \text{diag}(d) \cdot P^T$
- Scaling:  
Optimal scaling
- Algoritmo: **InvSVD**
- $\|\tilde{U}^T \tilde{U} - I\|_F \approx 1.31 \times 10^{-15}$
- Gli autovalori di  $\tilde{H}$  sono tutti positivi