- Un esempio di spazio non primo-numerabile:

Sia $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vediamo che, se $\omega = \pi(\mathbb{Z})$, ω non ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Sia infatti per assurdo $\{U_n\}$ tale sistema. Allora, poiché U_n è intorno, contiene un aperto Ω il quale $\pi^{-1}(\Omega) \supseteq \mathbb{Z}$.

Posso dire allora che $\pi^{-1}(U_n) \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m^n \supseteq \mathbb{Z}$ con I_m^n intervallo aperto centrato in m di ampiezza minore di $\frac{1}{2}$. (In questo modo $\forall n_1, n_2, m_1, m_2, m_1 \neq m_2$ $I_{m_1}^{n_1} \cap I_{m_2}^{n_2} = \phi$).

Dunque, considero allora $J_m \subsetneq I_m^m$ (esiste), J_m intorno di $m \in \mathbb{Z}$.

Sia allora $I^* = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} J_m$

I^* è intorno di $\mathbb{Z}$.

Allora $\pi(I^*)$ è intorno di ω. (È un aperto saturo, quindi $\pi(I^*)$ è aperto)

Ma nessun $\bar{U}_n$ sta in quell' intorno, perché

$$\pi^{-1}(\pi(I^*)) = I^*$$

Se $\bar{U}_n \subseteq \pi(I^*) \Rightarrow$

$$\pi^{-1}(\bar{U}_n) \subseteq \underbrace{\pi^{-1}(\pi(I^*))}_{= I^*}$$

— (Basta verificarlo a mano)

Ma $\pi^{-1}(\bar{U}_n) \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I^n_m$

$$\Rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I^n_m \subseteq I^*.$$

ASSURDO. $\square$