Esercizi: terzo foglio

Agnese Gini

8 dicembre 2015

1 Esercizio 62

Consideriamo il seguente diagramma commutativo in $S^{-1}\mathcal{C}$, dove $a, b, c, d \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, f e g sono morfismi in $\mathcal{C}$ mentre α e β sono morfismi di $S^{-1}\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, "\beta"] & d
\end{tikzcd}$$

Se S è un sistema localizzante per la categoria $\mathcal{C}$, abbiamo visto che i morfismi α e β possono essere rappresentati come composizione di un elemento di $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ e l'inverso di un elemento di S, più specificatamente esistono $\delta, \beta_0 \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ e $r, t \in S$ tali che α e β sono rispettivamente e equivalenti a δr^{-1} e $\beta_0 t^{-1}$. Il diagramma allora può essere scritto nel seguente modo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & x \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "\delta"] & b \arrow[d, "g"] \\
c & v \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "\beta_0"] & d
\end{tikzcd}$$

Usando ancora una volta che S è un sistema localizzante, dato che $fs \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ e $t \in S$ sappiamo che esistono un $q \in S$ e h un morfismo di $\mathcal{C}$ che fanno commutare il seguente quadrato nella categoria di partenza

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "q"'] & v \arrow[d, "t"] \\
x \arrow[r, "fr"] & c
\end{tikzcd}$$

Osserviamo però che, poiché $g\alpha = \beta f$ ovvero $g\delta r^{-1} = \beta_0 t^{-1} f$, a partire dal fatto che $frq = th$ componendo da entrambe le parti $\beta_0 t^{-1} frq = \beta_0 t^{-1} th$ abbiamo che $g\delta r^{-1} rq = g\delta q = \beta_0 h$. Allora il seguente diagramma è commutativo in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
a \arrow[dd, "f"'] & & b \arrow[dd, "g"] \\
 & u \arrow[uu, "q"] \arrow[dd, "h"] & \\
c & & d \\
 & v \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "\beta_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Notando infine che $s \coloneqq rq \in S$ e che $\alpha = \delta r^{-1} = \delta q q^{-1} r^{-1} = (\delta q) s^{-1}$. Ponendo quindi $\alpha_0 \coloneqq \delta q$ abbiamo la tesi:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & u \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "g"'] \\
c & v \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "\beta_0"] & d
\end{tikzcd}$$

2 Esercizio 63

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Vogliamo mostrare che valgono le seguenti proprietà riguardanti i triangoli distinti in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

TR1

a. Il triangolo

$$X^\bullet = X^\bullet \longrightarrow 0 \longrightarrow X^\bullet[1]$$

è distinto.

b. Se un triangolo è isomorfo ad un triangolo distinto è distinto.

c. Ogni morfismo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si completa a triangolo distinto.

TR2 Il triangolo

$$A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} C^\bullet \xrightarrow{w} A^\bullet[1]$$

è distinto se e solo se è distinto il triangolo

$$B^\bullet \xrightarrow{v} C^\bullet \xrightarrow{w} A^\bullet[1] \xrightarrow{-u[1]} B^\bullet[1]$$

TR3 Dati due triangoli distinti, se esistono due morfismi nella categoria derivata α e β come segue

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & B^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"'] & C^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & A^\bullet[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
X^\bullet \arrow[r, "u_1"] & Y^\bullet \arrow[r, "v_1"] & Z^\bullet \arrow[r, "w_1"] & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

allora esiste un morfismo $\varphi \in \operatorname{Mor} \mathcal{D}(\mathcal{A})$ che fa commutare il diagramma.

Prima di passare alla dimostrazione esplicita di questi fatti è bene fare alcune osservazioni, richiamare e mostrare alcune proprietà riguardo i triangoli distinti. Iniziamo ricordando che un *triangolo* di complessi è

$$A^\bullet \xrightarrow{\ u\ } B^\bullet \xrightarrow{\ v\ } C^\bullet \xrightarrow{\ w\ } A^\bullet[1]$$

dove $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Com}(\mathcal{A}))$ mentre i morfismi $u, v, w \in \operatorname{Mor} \mathcal{E}$ dove e può essere, a seconda dei casi, $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$, $\operatorname{Kom}(\mathcal{A})$ oppure $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.
In particolare un triangolo in $\mathcal{E}$ è *distinto* se e solo è isomorfo a un triangolo della forma

$$X^\bullet \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } \operatorname{Cil}(f) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cono}(f) \xrightarrow{-\delta} X^\bullet[1]$$

per qualche morfismo $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$. Dove, sottolineiamo, la nozione di isomorfismo è quella della categoria $\mathcal{E}$ in questione, mentre $\tilde{f}^n\colon X^n \to X^n \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$, $\pi^n\colon X^n \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^n$ e $\delta\colon X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1}$ sono rispettivamente i morfismi $x \mapsto (x, 0, 0)$ $(a, b, c) \mapsto (b, c)$ e $(x, y) \mapsto x$.
Questa nozione è particolarmente utile perché, si vede facilmente, se abbiamo un triangolo distinto allora abbiamo anche una successione esatta lunga in coomologia

$$\dashrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \dashrightarrow \quad .$$

Abbiamo mostrato che valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 1. In $\operatorname{Kom} \mathcal{A}$ un triangolo è distinto se e solo se è della forma

$$X^\bullet \xrightarrow{\ f\ } Y^\bullet \longrightarrow \operatorname{Cono}(f) \xrightarrow{-\delta} X^\bullet[1]$$

Teorema 1. In $\operatorname{Kom} \mathcal{A}$ valgono **TR1**,**TR2** e **TR3**, opportunamente riformulate.

Mostriamo un corollario di questo teorema che ci servirà dopo:

Corollario 1. In **TR3** se α e β sono quasi isomorfismi allora lo è anche φ.

Dimostrazione. Ricordiamo che presi due morfismi omotopi $\alpha_1 \sim \alpha$ allora $H^\bullet(\alpha_1) = H^\bullet(\alpha)$; consideriamo le due successioni esatte lunghe in comologia e i morfismi indotti

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & H^n(A) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(\alpha)"'] & H^n(B) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(\beta)"'] & H^n(C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^n(\varphi)"'] & H^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(\alpha)"'] & H^{n+1}(B) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "H^{n+1}(\beta)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & H^n(X) \arrow[r] & H^n(Y) \arrow[r] & H^n(Z) \arrow[r] & H^{n+1}(X) \arrow[r] & H^{n+1}(Y) \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dove per ipotesi $H^n(\alpha)$ e $H^n(\beta)$ sono isomorfismi per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che la categoria $\mathcal{A}$ è abeliana, usando il lemma dei cinque si ha che $H^n(\varphi)$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque φ è un quasi isomorfismo. $\square$

Vorremmo utilizzare che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è la localizzazione di $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, rispetto al sistema localizzante dei quasi isomorfismi, e sfruttare per la dimostrazione di **TR1**, **TR2** e **TR3** il Teorema 1. Esplicitiamo a tal fine la relazione tra i triangoli distinti in queste due categorie (che discende banalmente dalla definizione):

Lemma 1. Un triangolo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è distinto se e solo se è isomorfo all'immagine, tramite il funtore localizzante Q, di un triangolo distinto in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

Possiamo finalmente provare le tre proprietà sui triangoli nella categoria derivata:

Dimostrazione.

TR1

a. Il triangolo

$$X^\bullet = X^\bullet \longrightarrow 0 \longrightarrow X^\bullet[1]$$

è distinto $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ e quindi lo è in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

b. Ovvio per definizione.

c. Consideriamo un qualsiasi $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$; dato che $S :=$ {quasi isomorfismi} è un sistema localizzante, esistono $s \in S$ e $g \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Kom}(\mathcal{A}))$ tali che $u = gs^{-1}$ e usando **TR1c** di Kom abbiamo che $g\colon E^\bullet \to B^\bullet$ si completa ad un triangolo distinto in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

$$E^\bullet \xrightarrow{g} B^\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cono}(g) \xrightarrow{-\delta} E^\bullet[1]$$

E perciò

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & B^\bullet \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Cono}(g) \arrow[r, "-\delta"] & E^\bullet[1] \arrow[d, "{s[1]}"'] \\
X^\bullet \arrow[ur, "u"] & & & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

Detto $v = s[1]\delta$ abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
E^\bullet & \xrightarrow{g} & B^\bullet & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cono}(g) & \xrightarrow{-\delta} & E^\bullet[1] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle s} & & \Big\| & & \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle s[1]} \\
X^\bullet & \xrightarrow{u} & B^\bullet & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cono}(g) & \xrightarrow{-\delta} & X^\bullet[1]
\end{array}$$

Ci basta osservare che in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ questo è un isomorfismo di triangoli e visto che per costruzione il triangolo di sopra è distinto lo è anche quello di sotto, dunque abbiamo esibito un completamento di u a triangolo distinto.

TR2 È vero perché grazie al Lemma 1 ci si riconduce a **TR2** in Kom.

TR3 Consideriamo due triangoli distinti, e due morfismi nella categoria derivata α e β come segue

$$\begin{array}{ccccccc}
A^\bullet & \xrightarrow{u} & B^\bullet & \xrightarrow{v} & C^\bullet & \xrightarrow{w} & A^\bullet[1] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha[1]} \\
X^\bullet & \xrightarrow{u_1} & Y^\bullet & \xrightarrow{v_1} & Z^\bullet & \xrightarrow{w_1} & X^\bullet[1]
\end{array}$$

Senza perdere di generalità possiamo, usando il Lemma 1, ridurci a considerare due triangoli distinti in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$[1]; usando perciò quanto provato nell'Esercizio 62 sappiamo che possiamo a partire dal primo quadrato costruire un diagramma commutativo in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc}
A^\bullet & \xrightarrow{u} & B^\bullet & \xrightarrow{v} & C^\bullet & \xrightarrow{w} & A^\bullet[1] \\
\Big\uparrow{\scriptstyle s} & & \Big\uparrow{\scriptstyle r} & & & & \\
E^\bullet & \xrightarrow{n} & F^\bullet & & & & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_0} & & & & \\
X^\bullet & \xrightarrow{u_1} & Y^\bullet & \xrightarrow{v_1} & Z^\bullet & \xrightarrow{w_1} & X^\bullet[1]
\end{array}$$

Grazie a **TR2** possiamo completare n a un triangolo distinto in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.

[1] Ci basta, un volta trovato il morfismo che stiamo cercando, comporlo con gli isomorfismi tra i triangoli di partenza e quelli in Kom.

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[r, "u"] & B^\bullet \arrow[r, "v"] & C^\bullet \arrow[r, "w"] & A^\bullet[1] \\
E^\bullet \arrow[u, "s"] \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & F^\bullet \arrow[u, "r"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta_0"'] & G^\bullet \arrow[r, "l"] & E^\bullet[1] \arrow[u, "{s[1]}"'] \arrow[d, "{\alpha_0[1]}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "u_1"] & Y^\bullet \arrow[r, "v_1"] & Z^\bullet \arrow[r, "w_1"] & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

Per **TR3** di Kom esistono due morfismi t e φ_0:

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[r, "u"] & B^\bullet \arrow[r, "v"] & C^\bullet \arrow[r, "w"] & A^\bullet[1] \\
E^\bullet \arrow[u, "s"] \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & F^\bullet \arrow[u, "r"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta_0"'] & G^\bullet \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[r, "l"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"'] & E^\bullet[1] \arrow[u, "{s[1]}"'] \arrow[d, "{\alpha_0[1]}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "u_1"] & Y^\bullet \arrow[r, "v_1"] & Z^\bullet \arrow[r, "w_1"] & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

Infine usando il Corollario 1 abbiamo che $t \in S$ e quindi $\varphi = \varphi_0 t^{-1}$ è il morfismo di $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ che cercavamo.

$\square$

3 Esercizio 66

i) Consideriamo il seguente morfismo, non 0, di complessi di gruppi abeliani con $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot mn"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "0"'] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot m"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

Dico che questo morfismo è omotopo a zero tramite la seguente omotopia

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] \arrow[dl, "\cdot n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot mn"'] \arrow[dl, "\cdot n"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "0"'] \arrow[dl, "\cdot n"'] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot m"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

C'è sostanzialmente da verificare che lo sia per morfismo $\cdot mn$, ma banalmente $(\cdot mn) = (\cdot m)(\cdot n) + 0$.

ii) Consideriamo il morfismo definito dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "\cdot 1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 2"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 1"'] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

Questo morfismo non è omotopicamente equivalente a zero, se esistesse infatti un omotopia h dovrebbe valere la condizione $id_{\mathbb{Z}} = \cdot 1 = h \circ (\cdot 2)$, ma gli unici endomorfismi di $\mathbb{Z}$ invertibili sono $\pm id_{\mathbb{Z}}$. Tuttavia questo morfismo di complessi è zero nella categoria derivata; per dimostrare questa affermazione ci serviremo dell'Esercizio 64:

Lemma 2. $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ è zero se e solo se esiste un quasi isomorfismo t tale che ft è omotopicamente equivalente a zero.

Ci basta dunque trovare un quasi isomorfismo che soddisfi queste ipotesi; a tale proposito consideriamo il morfismo di complessi

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 1"] \arrow[d, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 4"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

È ben definito infatti

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \bar{1} \arrow[d, mapsto] \\
2 \arrow[r, mapsto] & \bar{4}
\end{tikzcd}$$

Inoltre è un quasi isomorfismo poiché passando in coomologia otteniamo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 4"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Consideriamo quindi la composizione di questi due morfismi:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "\cdot 1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 2"] \arrow[ddl, dashed, "\cdot 1"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 1"] \arrow[d, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 4"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sfruttando che $\bar{8} \equiv \bar{2} \mod 6$ abbiamo che il morfismo $\cdot 1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ da che questa composizione è omotopa a zero, e dunque nulla in $\mathcal{D}(A)$.

iii) Prendiamo il morfismo di complessi

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

In ogni punto del complesso la coomologia è zero in quanto bordi e cocicli sono sempre isomorfismi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi $H^\bullet(id) = 0$; tuttavia questo morfismo non può essere omotopo a zero in quanto dovrebbe esistere un h tale che per ogni $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $x = h(\cdot 2)(x) + (\cdot 2)h(x) = 4h(x) = 0$, assurdo.

4 Esercizio 67

Sia $\mathcal{A}$ una categoria semisemplice; per mostrare che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è naturalmente equivalente alla categoria dei complessi con tutti i bordi nulli, $\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$, esibiremo un'equivalenza di categorie tra queste due categorie. Con lo scopo di avere una maggiore chiarezza dimostremo prima alcuni lemmi che ci permetteranno di fare ciò.

Lemma 3. Sia $\mathcal{A}$ una categoria semisemplice e $X^\bullet$ un complesso. Allora $X^\bullet$ è quasi isomorfo al complesso $Y_X^\bullet \in \mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$ tale che $Y^n = H^n(X)$.

Dimostrazione. Sia un complesso $X^\bullet$ con bordo ∂, indicando con $Z^n(X)$ il cociclo $n-$esimo e con $B^{n+1}(X) = \partial^n(X)$ abbiamo la seguente sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow Z^n(X) \xrightarrow{i} X^n \longrightarrow B^{n+1}(X) \longrightarrow 0$$

Dato che $\mathcal{A}$ è semisemplice allora $X^n = Z^n(X) \oplus B^{n+1}(X)$. Usando poi che $H^n(X)$ è il conucleo di $B^n \to Z^n$ abbiamo anche che la seguente su successione esatta:

$$0 \longrightarrow B^n(X) \xrightarrow{i} Z^n(X) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow 0$$

E quindi $X^n = Z^n(X) \oplus B^{n+1}(X) = B^n(X) \oplus H^n(X) \oplus B^{n+1}(X)$.
La proiezione sulla seconda coordinata

$$s^n \colon B^n(X) \oplus H^n(X) \oplus B^{n+1}(X) \to H^n(X)$$

è tale che se $(a, h, b) \in X^n$ allora $s^{n+1} \circ \partial^n(a, h, n) = s^{n+1}(b, 0, 0) = 0$ e perciò induce un quasi isomorfismo[2]

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & X^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] \arrow[d, "s^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "s^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & H^{n-1}(X) \arrow[r, "0"] & H^n(X) \arrow[r, "0"] & H^{n+1}(X) \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

che è quello che cercavamo. □

Lemma 4. Siano $A^\bullet$ e $B^\bullet$ due complessi, allora esiste una bigezione tra $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ e $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})}(Y_A^\bullet, Y_B^\bullet)$.

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{rccc}
\Phi\colon & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})}(Y_A^\bullet, Y_B^\bullet) \\
& f & \longmapsto & H^\bullet(f)
\end{array}$$

un'applicazione. Mostriamo in primo luogo che è ben definita: siano $f = f_0 s^{-1}$ e $g = g_0 t^{-1}$, con s e t quasi isomorfismi, due morfismi equivalenti in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$; allora esistono u, v quasi isomorfismi tali che

$$\begin{tikzcd}
& Z^\bullet \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\
X^\bullet \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "f_0"' near start] & & Y^\bullet \arrow[d, "g_0"] \arrow[dll, "t" near start] \\
A^\bullet & & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

[2]La coomologia del secondo complesso è uguale a quella del primo per costruzione e $H^\bullet(s) = id$

sia un diagramma commutativo. Allora[3]

$$
\begin{aligned}
H^\bullet(f) &= H^\bullet(f_0)H^\bullet(s)^{-1} \\
&= H^\bullet(f_0)H^\bullet(u)H^\bullet(u)^{-1}H^\bullet(s)^{-1} \\
&= H^\bullet(f_0u)H^\bullet(su)^{-1} \\
&= H^\bullet(g_0v)H^\bullet(tv)^{-1} \\
&= H^\bullet(g_0)H^\bullet(v)H^\bullet(v)^{-1}H^\bullet(t)^{-1} \\
&= H^\bullet(g_0)H^\bullet(t)^{-1} = H^\bullet(g)
\end{aligned}
$$

e quindi Φ non dipende dal rappresentate scelto. Chiaramente Φ è suriettiva visto che $H^\bullet(f) \in \Phi^{-1}(H^\bullet(f))$; ma è anche iniettiva: per il Lemma 3 esiste s_A (la proiezione sulla seconda coordinata) un isomorfismo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tra $A^\bullet$ e $Y_A^\bullet$, prese allora $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ tali che $H^\bullet(f) = H^\bullet(g)$, abbiamo $f = s_B{}^{-1} \circ H^\bullet(f) \circ s_A = s_B{}^{-1} \circ H^\bullet(g) \circ s_A = g$. E dunque Φ è bigettiva.

□

Ponendo

$$
\begin{array}{rccc}
G\colon & \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Com}_0(\mathcal{A}) \\
& X^\bullet & \longmapsto & Y_X^\bullet \\
& f & \longmapsto & H^\bullet(f)
\end{array}
$$

allora otteniamo un funtore ben definito.
Vogliamo mostrare che è anche un'equivalenza di categoria usando la seguente proposizione (vista a lezione[4]):

Proposizione 2. Sia $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un funtore, se valgono i seguenti fatti:

i Se $F(x)$ è isomorfo $F(y)$ allora x è isomorfo a y,

ii Per ogni $b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ esiste c in $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ tale che $F(c)$ è isomorfo a b,

iii Per ogni x, y c'è una biezione tra $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(x), F(y))$

allora è un'equivalenza di categorie.

Preso un complesso $X^\bullet$, il Lemma 3 ci dice che è isomorfo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ a $G(X^\bullet)$; per mostrare la proprietà *i* basta quindi comporre l'isomorfismo in Com_0 (che è un isomorfismo anche nella categoria derivata) con quelli in partenza. *ii* è ovvia in quanto se $Y^\bullet \in \mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$, che si immerge in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, allora $Y^\bullet = G(Y^\bullet)$. *iii* è il Lemma 4. E dunque G è proprio l'equivalenza cercata.

5 Esercizio 68

$\Leftarrow$ Consideriamo una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

[3]Sto usando che funzioni omotope danno lo stesso morfismo.

[4]In verità sul mio quaderno è dimostrata, però ho il dubbio che fosse stata lasciata per esercizio.

Applicando il funtore $\mathrm{Ext}(C, \_)$ otteniamo una la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,A) \xrightarrow{f\circ\_} \mathrm{Hom}(C,B) \xrightarrow{g\circ\_} \mathrm{Hom}(C,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(C,A) \dashrightarrow$$

Per ipotesi $\mathrm{Ext}^1(C,A) = 0$ e perciò $g \circ \_$ è suriettiva e dunque esiste $h \in \mathrm{Hom}(C,B)$ tale che $g \circ h = id_C$, ossia la successione spezza.

$\Rightarrow$ Invece di mostrare direttamente il viceversa, è più interessante mostrare un risultato un po' più generale a proposito delle categorie semisemplici. Tuttavia per maggiore leggibilità, soprattutto per fissare la notazione, ci è utile richiamare alcune cose fatte a lezione. Abbiamo visto che è ben definito il funtore

$$\begin{array}{rccc} D\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & A & \longmapsto & \underline{A}^{\bullet} \\ & f & \longmapsto & \underline{f} \end{array}$$

dove $\underline{A}^{\bullet}$ è il complesso con tutti oggetti nulli eccetto che nell'indice 0:

$$\dashrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \dashrightarrow$$

mentre se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ allora $\underline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\bullet}, \underline{B}^{\bullet})$ è

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}.$$

Indicato con $\underline{B}^{\bullet}[i]$ lo shift a sinistra del complesso, abbiamo definito

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\bullet}, \underline{B}^{\bullet}[i]).$$

Se la categoria $\mathcal{A}$ è semisemplice abbiamo visto nell'Esercizio 67 che esiste un'equivalenza di categorie tra $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$; usando la stessa notazione, si ha che i complessi che sono nell'immagine di D sono tali che $G \circ D(B) = D(B)$, altre parole i complessi $\underline{B}^{\bullet}$ ottenuti a partire da oggetti di $\mathcal{A}$ vanno in se stessi. Il Lemma 4 perciò ci permette di scrivere la seguente uguaglianza

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\bullet}, \underline{B}^{\bullet}[i]).$$

Per la particolare forma di questi complessi allora diventa chiaro che per ogni $i \neq 0$ $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B) = 0$. Il caso di $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}$ è banalmente un corollario di questo fatto più generale.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}.$$