GAAL Osservazioni utili:

Determinanti:

- Trucco matrici: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$
- Quindi $P_M(t) = P_A(t)P_C(t)$;
- $A \in M(2k+1, R)$ antisimmetrica $\rightarrow \det A = 0$
- T. Rouché Capelli: Un sistema lineare è risolubile $\leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{completa})$
- Formula dello sviluppo di Laplace
- Metodo di Cramer: A^{-1} si costruisce come $a_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{\det A_{i,j}}{\det A}$
- Il determinante NON è un invariante per congruenza (A meno che non siano SOLO trasformazioni di base) ma il segno si.
- **Determinante di Vandermonde:** Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ Allora:

$$\det M = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

- Il **polinomio caratteristico** si mantiene per trasposizione.
- L'**aggiunta** si mantiene per trasposizione; $(\widetilde{M})^t = \widetilde{(M^t)}$

- **Rappresentazione Cartesiana:** $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x + 2y - z = 0 \,; 2x - y + t = 0\}$
- **Rappresentazione Parametrica:** $Es.\ W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- Per dimostrare che due endomorfismi sono simili devo confrontare non solo il polinomio caratteristico (Con abbinati autovalori con molteplicità) ma anche la successione dei nuclei.

- Se $M^2 = M$, **proiezione**, allora posso scriverlo come: $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Se $M^2 = \mathrm{Id}$, **involuzione**, allora posso scriverlo come: $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id} \end{pmatrix}$

- La **traccia** è invariante per similitudine.

- Se moltiplico a destra e a sinistra per ottenere un a matrice simile e scelgo una base formata da generatori del nucleo allora andranno comunque in 0.

- Proprietà ortogonale:
  - $\mathrm{S}_\mathrm{n}^{\perp} = \mathrm{A}_\mathrm{n}$
  - $A \subseteq A^{\perp\perp}$ e = se Φ è non degenere
  - $A \subseteq B \rightarrow A^{\perp} \supseteq B^{\perp}$
  - $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$
  - $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ e = se Φ è non degenere

- L'ortogonalità si può scambiare; $(\ker T)^{\perp} = \mathrm{Im}(T^*) \rightarrow \ker T = \left(\mathrm{Im}(T^*)\right)^{\perp}$

- Trucco utile es. 30-25
- Per capire se possono esistere sottospazi con segnatura data cercare le possibili intersezioni assurde; $(2,1,0)$; $\sigma(1,02)$ prendere quella di $\dim 2$.
- Smontare con quello che mi serve e poi completare: $x = \frac{x+f(x)}{2} + \frac{x+f(x)}{2}$

- $P_f(t) \in R_{[t]}$ di grado dispari $\rightarrow P_f(t)$ ha almeno una radice reale.

- (V, Φ) | tutti i $v \in V$ isotropi $\leftrightarrow$ Identicamente nullo
-
- Esempi utili prodotti scalari, $V = M(n, R)$:
  - $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A^t B)$ definito positivo
  - $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ non degenere

- f si dice isometria diretta ($\det f = 1$) se composizione di un numero pari di riflessioni
- Ogni isometria diretta è una rotazione. (Se riflessione e rotazione Riflessione Rotatoria).

- $\mathrm{Ker}(F_\Phi) = \mathrm{Rad}(\Phi)$; $\mathrm{Im}(F_\Phi) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\Phi))$

- Trucco utile: Triangolare (Polinomio fatt.) E Simmetrico $\rightarrow$ Diagonale

- $S, T \in \mathrm{End}(V) \rightarrow \mathrm{Spettro}(T \circ S) = \mathrm{Spettro}(\mathrm{S} \circ \mathrm{T})$
- Se $\exists\ \lambda$ autovalore $\rightarrow \lambda \in K$
- $T: V \rightarrow V$ spazio vettoriale metrico è detto normale se $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|\ \forall v \in V$
  Equivalenti:
  - T normale
  - $< T(v), T(v) > = < T^*(v), T^*(v) >$
  - $T \circ T^* = T^* \circ T$

Teoremi relativi ai minori:
- **T1:** Se $A \in M(m, n, K)$ e sia B un minore invertibile $p \times p$, allora le righe (colonne) di A che concorrono a formare B sono linearmente indipendenti.
- **T2:** Il rango di $A \in M(m, n, K)$ è il massimo degli ordini dei minori invertibili.

- Criterio dei Minori Orlati: Sia $A \in M(m,n,K)$; $B \in M(r,K)$; $\det B \neq 0$. Se tutti i minori orlati hanno determinante nullo allora $\mathrm{rk}(B) = r$

Basi cicliche: Sia $A \in M(n,C)$; $v \in C^n$ induce una base ciclica se v ; Av ; A^2V ; … ; $A^{n-1}v$ sono linearmente indipendenti.
Proposizione: Sono fatti equivalenti

- $p_a = q_a$
- $\exists$ una base ciclica di C^n per A

Matrici compagne: Sia $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in K_{[t]}$

$$C_f = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_1 \\ 1 & \ddots & & -a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_n \end{pmatrix} ;\ P_{C_f} = (-1)^n f$$

Oss: Utile per contro esempi, uso le matrici compagne per indicare la matrice con polinomio minimo assegnato.
Segue che A e A^t hanno gli stessi autovalori con stessa molteplicità algebrica

- A è diagonalizzabile $\leftrightarrow$ A^t è diagonalizzabile

Bandiera o ventaglio: Una bandiera si sottospazi f-invarianti è una successione $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n$
Equivalente:

- f triangolabile
- $\exists$ base a bandiera f-invariante

- Nell'aggiunta se le basi rispetto a cui sto lavorando sono ortogonali vale: $A^* = A^t$
- A è simile ad A^t
- Se $M^tAM = A$ e M è ortogonale $\rightarrow$ $M^{-1}AM = A$
- Se $M^{-1}AM = A\ \forall A \in GL(V) \rightarrow A = \lambda\mathrm{Id}$
- Se $A \in M_n(R)$ ortogonale con tutti gli autovalori reali $\rightarrow$ Simmetrica e diagonalizzabile
- È NILPOTENTE $\leftrightarrow$ ha solo l'autovalore 0.
- Sia M^* aggiunta di M $\rightarrow$ $M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^*$
- Anisotropo $\rightarrow$ definito > 0 (o < 0) e nessun piano iperbolico.