GAAL: Capitolo di approfondimento specifico

Algoritmo per il calcolo dell'inversa:

Data una matrice invertibile è possibile ricavare la sua inversa applicando il seguente algoritmo:

$(M|Id)$ →Eseguo trasformazioni di Gauss sulla $M \rightsquigarrow$ Id eseguendo le stesse operazioni sulla matrice a destra.

Una volta ottenuta al posto di M l'identità la matrice a destra sarà M^{-1}.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to^{r1\to r2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to^{r2\to r2-3\cdot r1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to^{r2\to -\frac{r2}{8}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \to^{r1\to r1-3\cdot r2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right)$$

Esempio di costruzione di una trasformazione affine:

Costruire una trasformazione affine $f: K^2 \to K^3 \mid f(P_i) = Q_i$ con:

$$\begin{cases} P_0 = \binom{0}{2} \\ P_1 = \binom{1}{3} \\ P_2 = \binom{-1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Verificare che siano affinemente indipendenti, scelgo una base e sviluppo:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{P_0P_2} = P_1 - P_0 = \binom{1}{1} \\ \overrightarrow{P_0P_1} = P_2 - P_0 = \binom{-1}{0} \end{matrix} \text{ linearmente indipendenti} \to \text{affinemente indipendenti}$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{Q_0Q_2} = Q_1 - Q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{Q_0Q_1} = Q_2 - Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ linearmente indipendenti} \to \text{affinemente indipendenti}$$

2. Costruiamo l'om. che assegni ai vettori individuati fissata una base quelli di arrivo.

$$\binom{1}{1} \to^f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \binom{-1}{0} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{che è} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Individuiamo la traslazione applicando l'omomorfismo al punto di origine e osservando sottraendolo al nuovo punto base e costruiamo la matrice associata alla trasformazione affine descritta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \binom{0}{2} + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio esercizio di costruzione di una base duale:

Dato uno spazio vettoriale V ; $\dim V = n$; $B = (e_1, \dots, e_n)$ possiamo sempre costruire una base di V^* sfruttando il teorema di rappresentazione mediante un prodotto scalare.

L'accoppiamento canonico prevede:

$$B^* = (e^1, \dots, e^n) \mid \langle e_i | e^j \rangle = e^j(e_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Esempio:

$V = \mathbb{R}^2$; $B = \left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right)$ cerco B^*

$$b^1 = (x \quad y) \mid (x \quad y)\binom{1}{0} = 1 \to x = 1 \,;\, (1 \quad y)\binom{1}{1} = 0 \to y = -1$$

$$b^2 = (z \quad k) \mid (z \quad k)\binom{1}{0} = 0 \to z = 1 \,;\, (0 \quad k)\binom{1}{1} = 0 \to k = 1$$

Quindi $B^* = \big((1 \quad -1), (0 \quad 1)\big)$

Esempio esercizio di ϕ-rappresentazione:

Dato un funzionale $\varphi \in V^*$ si dice che è ϕ-rappresentabile per mezzo di $v \in V$ se $\varphi = \mathbb{F}_\phi(v)$

Cerco in pratica un funzionale tale che: $\phi(v, x) = \varphi(x)\ \forall x \in V$

Imponendo un sistema ad *n* incognite si ricava.

Idea:

Se applico la funzione sui vettori di base so già quale valore devono assumere e dimezzo i calcoli.

Studiare una simmetria:

Se abbiamo da costruire una riflessione scegliamo una base B formata dal vettore della simmetria e da due vettori ortogonali, sfruttiamo la formula $M_C(\rho) = BM_B(\rho)B^{-1}$ per ottenere la riflessione in C.

Avendo una isometria si capisce di quante riflessioni è composta studiando Fix, il luogo dei punti fissi dato dall'INTERSEZIONE degli ortogonali ai vettori.

Se ho già scoperto che devo ottenere una riflessione posso scegliere il primo dei due vettori che forma la riflessione in maniera ARBITRARIA e il secondo lo ottengo dal primo.

La matrice di Jordan Reale:

Dato un endomorfismo reale $f : V \to V$ (anche non triangolabile) il complessificato $f_C : V_C \to V_C$ è | $f_{C|V} = f$ e $p_f(t) = p_{f_C}(t) \in R[t]$.

Allora la decomposizione primaria di V_C relativa a p_{f_C} può presentare addendi diretti f_C-invarianti di due tipi:

1. $\ker(f_C - \lambda I)^m$ quando λ è reale di molteplicità m.
   In questo caso $\ker(f_C - \lambda I)^m$ è il complessificato di $\ker(f - \lambda I)^m$.

2. $\ker(f_C - \alpha I)^m \oplus \ker(f_C - \bar{\alpha} I)^m$ quando $\alpha \neq \bar{\alpha}$; entrambi hanno molteplicità m.
   Questo addendo è invariante per la coniugio $V_C, z \to \bar{z}$ ed è il complessificato della sua parte reale cioè del luogo dei suoi punti tali che $z = \bar{z}$.

Nel primo caso si lavora su $\ker(f - \lambda)^m$ come prima e ne risulta una base di Jordan per la restrizione di f che è anche una base di Jordan reale per la restrizione di f_C a $\ker(f_C - \lambda I)^m$.

Nel secondo caso, poiché f_C è il complessificato di f reale, risulta che se $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di Jordan per la restrizione di f_C a $\ker(f_C - \alpha I)^m$allora $\bar{B} = \{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_m}\}$ è una base di Jordan per la restrizione di f_C a $\ker(f_C - \bar{\alpha} I)^m$.

Prendendo le parti reali e immaginarie dei vettori di $\boldsymbol{B}$:

$$\frac{(v_j + \overline{v_J})}{2} \; ; \; -i\frac{(v_j - \overline{v_J})}{2}$$

Si effettua un cambiamento di base da B ad una base reale B_R che è per definizione una base di Jordan reale della restrizione di f alla parte reale di $\ker(f_C - \alpha I)^m \oplus \ker(f_C - \bar{\alpha} I)^m$.

La corrispondente matrice rappresentativa è detta in **forma di Jordan reale**.

Questa `e diagonale a blocchi dove ogni blocco reale relativo alla coppia di autovalori $(\alpha, \bar{\alpha})$ è indicato con:

$$J_R(\alpha, 2s)$$

Questo presenta lungo la diagonale s blocchi 2×2 della **forma:**

$\begin{pmatrix} |\alpha| \cos\theta & -|\alpha| \sin\theta \\ |\alpha| \sin\theta & |\alpha| \cos\theta \end{pmatrix}$ con $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$

mentre al di sopra della diagonale presenta blocchi uguali alla matrice identità 2×2