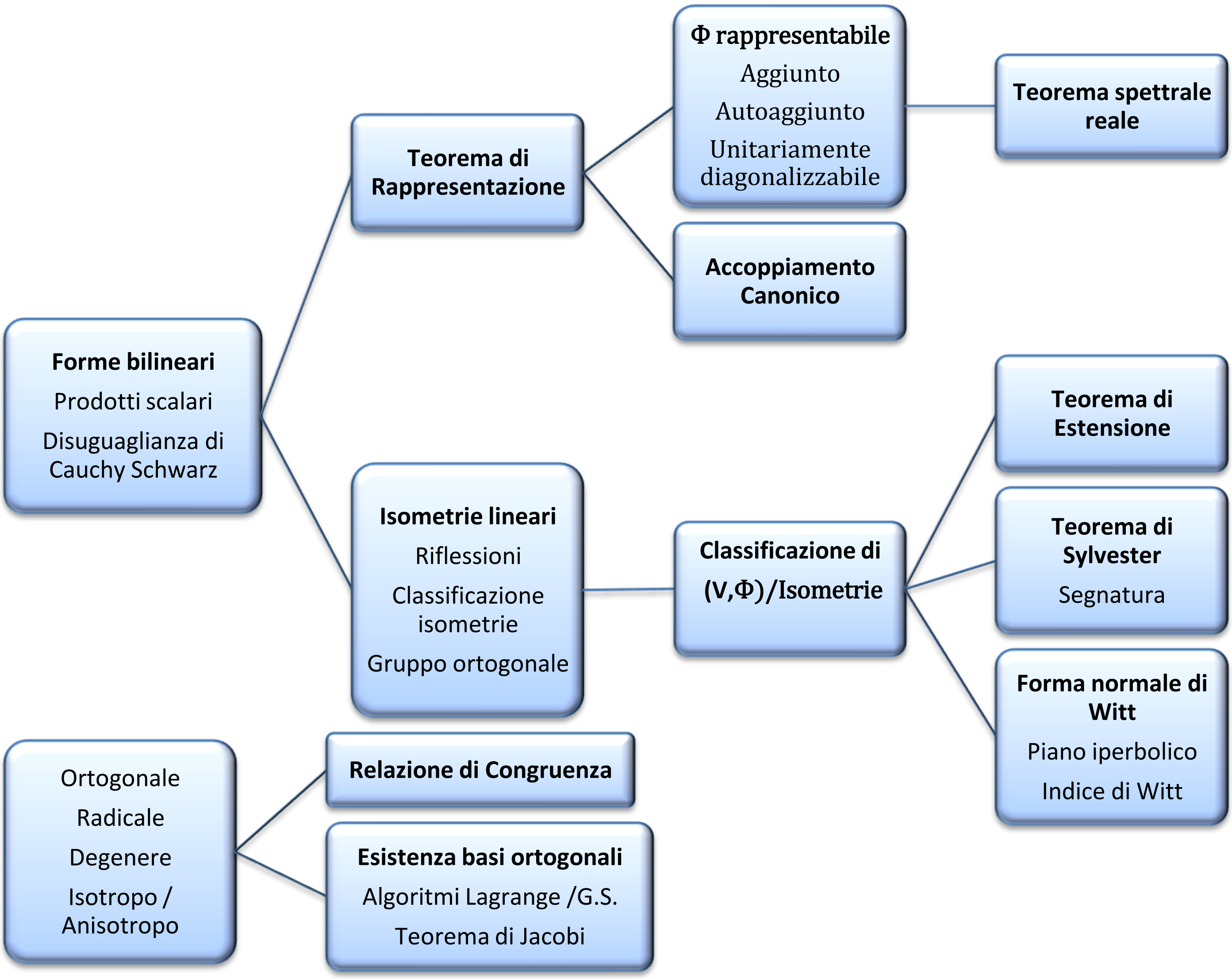
GAAL: Capitolo dei prodotti scalari



Definizione (Forma Bilineare):

Sia V , K-Spazio vettoriale.

Un'applicazione $b: V \times V \to K$ si dice **forma bilineare** su V se è lineare in ognuno dei due argomenti:

1- $b\left(v + v', w\right) = b(v, w) + b\left(v', w\right)$

2- $b(v, w') = b(v, w) + b(v, w')$

3- $b(kv, w) = b(v, kw) = kb(v, w)$

$\forall v, v', w, w' \in V$, $\forall k \in K$

Osservazione

Una forma bilineare si dice **simmetrica** se $(v, w) = b(w, v)$ $\forall$ $v, w \in V$

Una forma bilineare si dice **antisimmetrica** se $(v, w) = -b(w, v)$ $\forall$ $v, w \in V$

Definizione (Prodotto scalare):

È una forma bilineare simmetrica.

Osservazione:

La forma bilineare standard su K^n è detto **prodotto scalare standard**.

$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^t y$

Osservazione:

$(\mathrm{Scal}(V), +, \cdot)$ è un K-Spazio vettoriale

Notazione:

Il prodotto scalare di due vettori si indica con $< v, w >$ (*v* scalare *w*)

Disuguaglianza di Schwarz:

Se $v, w \in V$, allora:

$< v, w >^2 \leq < v, v >< w, w >$ Con uguaglianza $\leftrightarrow$ sono paralleli.

Isometrie:

Definizione (Isometria lineare):

$(V, \Phi) \to^{f} (W, \varphi)$ è un'isometria lineare se:

1- f è un ISOMORFISMO di spazi vettoriali

2- Rispetta i prodotti scalari; $\forall\, v, z \in V\ \Phi(v,z) = \varphi\big(f(v), f(z)\big)$

Definizione (Gruppo delle isometrie lineari):

$O(\Phi) = \{f \in GL(V) \mid \forall\, v, z \in V\ \Phi(v,z) = \Phi\big(f(v), f(z)\big)\}$

Definizione (Riflessioni):

Una riflessione parallela al vettore anisotropo v è una funzione $\rho_v : V \to V \mid \rho_v(w) = -\lambda v + z$

Con $w = \lambda v + z$ ottenuto mediante la scomposizione $V = \operatorname{span}(v) \perp Z_v$

Proprietà:

$\rho_v^2 = \mathrm{Id}$

$\rho_v \in O(\Phi)$

Teorema:

Le riflessioni generano $O(\Phi)$ ossia $\forall f \in O(\Phi)$ vale $f = \rho_1 \dots \rho_k$

Classificazione delle isometrie:

(V, Φ) ; Φ anisotropo ; $\dim V = n$; $f \in O(\Phi)$ isometria lineare.

Definizione (Punti fissi):

$\mathrm{Fix}(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$

Lemma:

Sotto le ipotesi di prima, se $\mathrm{Fix}(f) = \{0\} \to \exists \rho$ riflessione | $\dim\big(\mathrm{Fix}(\rho \circ f)\big) = 1$

Teorema:

Se $\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = k \to f$ è composizione di $n - k$ riflessioni.

Definizione (Cono isotropo):

Un cono $C_\Phi = \{x \in V \mid \Phi(x,x) = 0\}$ è l'insieme dei vettori isotropi.

Osservazione:

È chiuso per il prodotto per il campo ma non per combinazione lineare.

Definizione (Gruppo ortogonale):

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(\mathbb{R}^n) \mid A^t = A^{-1}\}$$

Osservazione:

È un caso specifico di $\mathrm{O}(\Phi)$ con $V = \mathbb{R}^n$; $\Phi = \langle\ \rangle_{\mathrm{Id}}$

Notazione:

Gli elementi di $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ si dicono Matrici Ortogonali.

Proprietà:

Ogni matrice ortogonale ha determinate 1 o -1 a seconda che sia composizione di un numero pari o dispari di riflessioni.

Classificazione delle isometrie euclidee:

$V = \mathbb{R}^3$; $\Phi = \langle\ \rangle_{\mathrm{Id}}$

Definizione (Isometria diretta):

È un'isometria composizione di un numero pari di riflessioni.

Definizione (Isometria inversa):

È un'isometria composizione di un numero dispari di riflessioni.

Proposizione:

Isometria diretta $\leftrightarrow \det f = 1$

Isometria inversa $\leftrightarrow \det f = -1$

Isometrie lineari di $\mathbb{R}^3$:

Composizione di tot riflessioni: $\begin{matrix} 0 & Identità \\ 1 & Riflessione \\ 2 & Rotazione \\ 3 & Riflessione\ rotatoria \end{matrix}$

Isometrie non lineari di $\mathbb{R}^2$:

Composizione di tot riflessioni: $\begin{matrix} 0 & Identità \\ 1 & Riflessione \end{matrix}$

2 può essere una traslazione o una rotazione.

Classifichiamo mediante i punti fissi:

$$\begin{matrix} Traslazione & \text{diretta} & \text{no fix} \\ Rotazione & \text{diretta} & \text{fix} \\ Riflessione & \text{inversa} & \text{fix} \\ Glide & \text{inversa} & \text{no fix} \end{matrix}$$

Osservazione su $\mathbb{R}^3$:

Abbiamo anche i *Twist* (Traslazioni parallele all'asse di rotazione) e le *Riflessioni Rotatorie* (Asse parallelo al piano di rotazione).

Proposizione **(Isomorfismo $\mathbf{Bil}(V) \to M_n(K)$):**

Sia V , K-Spazio vettoriale di dimensione n, sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base.
Associando ad ogni forma bilineare la sua matrice rispetto a E si ottiene una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathrm{Bil}(V)$ delle forme bilineari su V ed $M_n(K)$.

Definizione (Matrice associata):

Sia V , K-Spazio vettoriale di dimensione n, sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base e sia $b: V \times V \to K$ una forma bilineare su V.

La matrice che rappresenta b rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la matrice:
$A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ definita da: $\quad a_{ij} = b(e_i, e_j)$, $1 \le i, j \le n$

Osservazione (Simmetrica/Antisimmetrica):

Essendo $b(w, v) = y^t A x = x^t A^t y$ e quindi $b(v, w) = b(w, v) \leftrightarrow A^t = A$:

b è simmetrica $\leftrightarrow$ la matrice A è simmetrica.
b è antisimmetrica $\leftrightarrow$ la matrice A è antisimmetrica.

Definizione (Passaggio in coordinate):

$(V, \Phi) \to_{[\,]_B} (K^n, \langle\,\rangle_A)$ | $[\,]_B$ isometria $\to M_B(\Phi) = A$ e $\Phi(v, w) = [v]_B^t M_B(\Phi)[w]_B$

Relazione di Congruenza:

Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono congruenti se $\exists\, M \in GL_n(K)$ | $B = M^t A M$

Questa esprime la relazione esistente tra matrici A, B che rappresentano la forma bilineare b rispetto a due basi distinte. $A = (a_{ij}) = \left(b(e_i, e_j)\right)$; $B = (b_{ij}) = \left(b(f_i, f_j)\right)$

Proposizione:

Sia V , K-Spazio vettoriale di dimensione n.
Due matrici $A, B \in M_n(K)$ rappresentano la stessa forma bilineare b su V rispetto a due basi diverse $\leftrightarrow$ sono congruenti.

Cambiamento di coordinate:

Siano $M_B(\Phi)$ e $M_{B^I}(\Phi)$ allora:
$\Phi(v, w) = [v]_B^t M_B(\Phi)[w]_B$; $\Phi(v, w) = [v]_{B^I}^t M_{B^I}(\emptyset)[w]_{B^I}$

Per un opportuno $P \in GL(n, K)$

$$\begin{cases} [v]_B = P[v]_{B^I} \\ M_{B^I}(\Phi) = P^t M_B(\Phi) P \end{cases}$$

Definizione (Non degenere)

Il rango di una matrice associata dipende solo dalla forma bilineare e NON dalla base.
Se $\mathrm{rango}(r) = \dim \mathrm{V}$ diremo che la forma bilineare è **non degenere**, altrimenti **degenere**.

Proposizione:
Sono equivalenti le condizioni:

1. B è non degenere.
2. $\forall v \neq 0$ in V $\exists\, w \in V \mid b(v, w) \neq 0$
3. $\forall w \neq 0$ in V $\exists\, v \neq 0 \mid b(v, w) \neq 0$

Forme bilineari simmetriche:

Definizione (Ortogonale):

Sia Φ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$.
Un vettore $w \in V$ si dice ortogonale a v se $\Phi(v, w) = 0$.

Osservazione (Sottospazio ortogonale ad S):
$S^{\perp} = \{w \in V \mid \Phi(v, w) = 0\ \forall v \in V\}$
$S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V
$S^{\perp}$ è il sottospazio ortogonale ad S.

Notazione:
Se $S = \{v\}$ si indica con $v^{\perp}$

Definizione (Sottospazi ortogonali):

Due sottospazi U, W di V si dicono ortogonali se $U \subseteq W^{\perp}$ $(W \subseteq U^{\perp})$

Definizione (Radicale):

Il sottospazio $V^{\perp}$ è detto radicale di V.

Osservazione (Degenere):
(V, Φ) è non degenere $\leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$

Proposizione:
(V, Φ) è non degenere allora $\forall W$ sottospazio di V vale $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$
$V = W \perp W^{\perp} \leftrightarrow \Phi_{|W}$ non degenere.

Proposizione:
$\dim \mathrm{Rad}(\Phi) = n - \mathrm{Rango}\big(M_B(\Phi)\big)\ \forall B$ base di V

Proposizione:
(V, Φ) è non degenere $\leftrightarrow \forall B$ base di V $\det\big(M_B(\Phi)\big) \neq 0$

Definizione (Isotropo):

Un vettore si dice isotropo se $\Phi(v, v) = 0$ ossia $v \in v^{\perp}$

Osservazione:

0 è isotropo.

Osservazione:

Essere isotropi si mantiene nella combinazione lineare, $(v_1, \dots, v_n)$ isotropi $\rightarrow$ $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ è formato da vettori isotropi.

Notazione:

Un vettore non isotropo si dice **Anisotropo**.

Coefficienti di Fourier:

Dato (V, Φ) se v è non isotropo, $\forall w \in V$ vale:

$a_v(w) = \frac{\Phi(v,w)}{\Phi(v,v)}$ detto **Coefficiente di Fourier** di w rispetto a v.

Cioè $w - a_v(w)v \in v^{\perp}$; poiché $w = a_v(w)v + (w - a_v(w)v)$ e $< v > \cap\, v^{\perp} = \{0\}$ segue che:

$V =< v > \oplus v^{\perp}$

Osservazione:

$\frac{\Phi(v,w)}{\Phi(v,v)} v$ è la proiezione di w su v.

Definizione (Base ortogonale):

Se V ha dimensione finita ed $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V | i vettori che ne fanno parte siano a due a due ortogonale (Ossia $\Phi(e_i, e_j) = 0\ \forall i \neq j$).

Allora E è una **base ortogonale** per Φ.

Osservazione:

Se *E* è una base ortogonale allora $A = (a_{ij})$ che rappresenta *b* rispetto ad *E* è diagonale.

Osservazione:

Se $\exists$ una base ortogonale non è unica, $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n\}$ è ancora ortogonale.

Definizione (Base ortonormale):

Una base B si dice ortonormale se è ortogonale e $\forall i$ vale $\Phi(e_i, e_i) = 1$

Osservazione:

Su $\mathbb{C}$ riesco sempre a trovare una base ortonormale mentre su $\mathbb{R}$ no.

Teorema di esistenza delle Basi Ortogonali:

Se la caratteristica del campo $K \neq 2$ allora ogni (V, Φ) ammette basi ortogonali.

Osservazione (ATTENZIONE):
$\forall\, M\ \exists P$ invertibile | $P^t AP = D$ ma P non è necessariamente la base stessa.

Lemma base:
v anisotropo, $V = \mathrm{span}(v) \perp v^{\perp}$

Algoritmo di Lagrange (Di ortogonalizzazione):

Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$ base arbitraria di (V, Φ).

Se v_1 è isotropo applichiamo trasformazioni di base in maniera tale da ottenere al posto $(1,1)$ un valore diverso da 0.

Se v_1 è anisotropo:

$$B \to B_1 = \left(v_1, v_2 - \frac{\Phi(v_1, v_2)}{\Phi(v_1, v_1)} v_2, \dots, v_n - \frac{\Phi(v_1, v_n)}{\Phi(v_1, v_1)} v_1\right)$$

Questa è una base nella quale i nuovi v_i sono ortogonali a v_1.
Iterando con $v_1, \dots, v_n$ otteniamo una base ortogonale.

Osservazione:
Se effettuiamo trasformazioni di base, ossia non scambiamo i vettori di base, il determinante si conserva.

Algoritmo di Gram-Schmidt (Di ortonormalizzazione):

Ottenuta una base ortogonale con l'algoritmo di Lagrange si normalizzano i vettori $v_i \to \frac{v_i}{\sqrt{\Phi(v_i, v_i)}}$. Su $\mathbb{R}$ non è sempre possibile.

Proprietà:

Il processo di ortonormalizzazione lascia invariata la bandiera.
Ottenuta una successione di spazi *f* invarianti possiamo sempre ottenere una base ortogonale (O ortonormale) da essa.

Teorema di Jacobi:

$A = M_B(\Phi)$; $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2$, … , $D_n = \det A_n$ dove A_i è il minore principale di dimensione i.

Allora $\exists S$ base di V | $M_S(\Phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \frac{D_3}{D_2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

Classificazione di $^{(V,\Phi)}/_{\text{Isometrie}}$:

Vogliamo studiare quando (V,Φ) è isometrico a (V,Φ'), ossia esiste un'isometria che mi assegni l'uno all'altro.

Osservazione:
Possiamo studiare direttamente con lo stesso campo V in quanto dato W posso costruire $f: W \to (V,\varphi) \mid f$ isometria e $f^*(\varphi): W \times W \to K$ e $f^*(\varphi)(v,w) = \Psi\big(f(v), f(w)\big)$

Ossia $\big(W, f^*(\varphi)\big) \to_{f \text{ isometria}} (V,\varphi)$.

Proposizione:
I seguenti fatti sono equivalenti:

1. (V,Φ) e (V,Φ') sono isometrici.
2. $\forall B\ M_B(\Phi)$ è congruente a $M_B(\Phi')$
3. $\exists B, B' \mid M_B(\Phi) = M_{B'}(\Phi')$

Attenzione:
L'ultimo significa che costruendo la matrice come descritto diviene uguale, non che siano ottenibili l'uno dall'altro studiando le direttamente le basi come nella relazione di similitudine.

<u>Teorema di Estensione:</u>
Sia V K-spazio vettoriale (Su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), Φ non degenere, W_1 , W_2 due sottospazi di V della stessa dimensione | $\Phi_{|W_1}$ e $\Phi_{|W_2}$ siano non degeneri ; $\exists\ \beta: \big(W_1, \Phi_{|W_1}\big) \to \big(W_2, \Phi_{|W_2}\big)$ isometria.
Allora:

β si può estendere ad $f \in \mathrm{O}(\Phi)$ ossia $f_{|W_1} = \beta$.

Studio a meno di isometrie di sottospazi:

V K-spazio vettoriale (Su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), Φ non degenere, W_1 , W_2 due sottospazi di V ; W_1 e W_2 sono congruenti ; $\exists f \in \mathrm{O}(\Phi) | f(W_1) = W_2 \leftrightarrow$
$\big(W_1, \Phi_{|W_1}\big)$ e $\big(W_2, \Phi_{|W_2}\big)$ sono isometrici.

Studiamo distinguendo a seconda del campo di V:

Su $\mathbb{C}$:

Esistendo sempre una base ortonormale allora:
(V, Φ) è **isometrico** a $(V, \Phi') \leftrightarrow \dim \operatorname{rad}(\Phi) = \dim \operatorname{rad}(\Phi')$

Su $\mathbb{R}$:

Si può ridurre una matrice ad una diagonale formata da 0 , 1 , -1.

Definizione:

Indice di positività: $i_+(\Phi) = \max\{\dim W \ | \ W \text{ s.s.v.} V \text{ e } \Phi_{|W} \text{ è def} > 0\}$
Indice di negatività: $i_-(\Phi) = \max\{\dim W \ | \ W \text{ s.s.v.} V \text{ e } \Phi_{|W} \text{ è def} < 0\}$
Indice di nullità: $i_0(\Phi) = \max\{\dim W \ | \ W \text{ s.s.v.} V \text{ e } \Phi_{|W} = 0\}$

Osservazione:
$i_0(\Phi) = \dim \operatorname{rad}(\Phi)$

Definizione (Segnatura):

$\sigma(\Phi) = \big(i_+(\Phi) \, , \ i_-(\Phi) \, , \ i_0(\Phi)\big)$

Definizione (Matrice definita positiva):
M si dice definita positiva ($\text{def} > 0$) se $\sigma(M) = (n \, , \ 0 \, , \ 0)$

Definizione (Matrice semidefinita positiva):
M si dice semidefinita positiva ($\text{def} \geq 0$) se $\sigma(M) = (m \, , \ 0 \, , \ s) \mid (m + s = n)$

Definizione (Matrice definita negativa):
M si dice definita negativa ($\text{def} < 0$) se $\sigma(M) = (0 \, , \ n \, , \ 0)$

Definizione (Matrice semidefinita negativa):
M si dice semidefinita negativa ($\text{def} \leq 0$) se $\sigma(M) = (0 \, , \ m \, , \ s) \mid (m + s = n)$

Teorema di Sylvester (Di classificazione):

(V, Φ) è **isometrico** a $(V, \Phi') \leftrightarrow \sigma(\Phi) = \sigma(\Phi')$

Definizione (Piano iperbolico):

$(P, \Phi_{|P})$ è un piano iperbolico se:

1- $\dim P = 2$

2- $\Phi_{|P}$ è non degenere.

3- P contiene $v \neq 0$ isotropo.

Osservazione:

Su $\mathbb{C}$ la matrice è del tipo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Su $\mathbb{R}$ la matrice è del tipo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lemma (Base di Witt):

$(P, \Phi_{|P})$ su K piano iperbolico, v isotropo $\rightarrow \exists B = (v, z) \mid M_B(\Phi_{|P}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Dalla forma normale di Witt si può tornare alla forma cartesiana o di Sylvester ponendo $D = \left(\frac{v+z}{\sqrt{2}}, \frac{v-z}{i\sqrt{2}}\right)$, in $\mathbb{R}$ senza sfruttare i otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Forma normale di Witt:

È la decomposizione in somma diretta ortogonale di piani iperbolici ed una componente anisotropa (Completamente definita).

Letta in base di Witt una matrice diviene della forma: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \text{Anisotropo} \end{pmatrix}$

Osservazione:

Su $\mathbb{C}$ ottengo sempre una scomposizione in piani iperbolici più, se la dimensione dello spazio vettoriale è dispari, un vettore anisotropo.

Su $\mathbb{R}$ invece può esistere una componente anisotropa maggiore.

Definizione (Indice di Witt):

(V, Φ) non degenere. $W(\Phi) = \max\left(\dim W \mid W \text{ s.s.v. } V\ \Phi_{|W} = 0\right)$

Lemma:

1. $W(\Phi) = 0 \leftrightarrow \Phi$ è anisotropo.
2. $W(\Phi) \leq \frac{\dim V}{2}$

Proposizione:

Su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ $W(\Phi) = \#$ Piani iperbolici.

Teorema di Rappresentazione:

Idea:

Costruire sfruttando Φ una funzione canonica tra V e V^*

Dati (V, Φ) , V, V^* costruisco $\mathbb{F}_\Phi: V \to V^* \mid v \to \varphi_v$ con $\varphi_v: V \to K \mid \varphi_v(x) = \Phi(v, x)$

Osservazione:

$\forall v \ \ \varphi_v \in V^*$ e $\mathbb{F}_\Phi$ è lineare.

$\ker(\mathbb{F}_\Phi) = \{v \in V \mid \varphi_v = 0\}$

$\mathbb{F}_\Phi$ è iniettiva $\leftrightarrow$ Φ è non degenere.

Se è iniettiva $\mathbb{F}_\Phi$ è un ISOMORFISMO.

Proposizione:

$\exists B = (v_1, \dots, v_n)$ di $V \mid \big(\mathbb{F}_\Phi(v_1), \dots, \mathbb{F}_\Phi(v_n)\big)$ base di V^* ossia $\mathbb{F}_\Phi(v_i)\big(v_j\big) = \delta_{ij} = \Phi\big(v_i, v_j\big) \leftrightarrow M_B(\Phi) = \mathrm{Id}$ ossia B ortonormale.

Definizione (Φ-rappresentabile):

$\varphi \in V^*$ si dice Φ-rappresentabile se $\exists v \in V \mid \varphi = \varphi_v = \mathbb{F}_\Phi(v)$

Osservazione:

Φ non degenere $\to$ ogni funzionale è Φ-rappresentabile.

Osservazione:

$\mathrm{Im}(\mathbb{F}_\Phi) = \{\varphi \mid \mathrm{rad}(\varphi) \subseteq \ker \varphi\}$

Definizione (Φ-Aggiunto):

Idea:
$$\begin{array}{ccc} V & \to_f & V \\ \downarrow_{\mathbb{F}_\Phi} & & \downarrow_{\mathbb{F}_\Phi} \\ V^* & \leftarrow_{f^t} & V^* \end{array}$$
allora $f^* = \mathbb{F}_\Phi^{-1} \circ f^t \circ \mathbb{F}_\Phi$

Caratterizzazione:

Formale: $\Phi\big(v, f(w)\big) = \Phi(f^*(v), w)$

Matriciale: $A^* = M^{-1} A^t M$

Osservazione:

$(A^*)^* = A$

Osservazione:

Se Φ ammette una base ortonormale $M_B(\Phi) = \mathrm{Id}$, allora $A^* = A^t$

Definizione (Φ-Autoaggiunto):

$f^* = f$

Accoppiamento Canonico:

Idea:

Costruire un isomorfismo canonico tra $\mathrm{End}(V)$ e le forme bilineari.

Osservazione:

In pratica sfruttiamo $\mathbb{F}_\Phi$ con $\Phi = \langle\ \rangle$ prodotto scalare standard.

$\Psi\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V^* \times V, K) \mid f \to \Psi_f$

Con $\Psi_f\colon V^* \times V \to K \mid (\varphi, v) \to \varphi\big(f(v)\big)$

Quindi $\Psi(f) = \langle \varphi, f(v) \rangle$

Osservazione:

$\Psi(\mathrm{Id}) = \langle\ \rangle$

Idea:

Si dice canonico perché sfruttiamo il prodotto scalare standard, se sfruttiamo un differente prodotto scalare otteniamo:

$\Phi \in \mathrm{Bil}(V \times V, K)$; $\Psi_\Phi(f) = \Psi_{\Phi,f} \mid (w, v) \to \Phi\big(w, f(v)\big)$

Osservazione:

Sappiamo che $\mathrm{Scal}(V) \subseteq \mathrm{Bil}(V \times V, K)$ quindi la domanda è: per quali *f* la forma che ottengo è un prodotto scalare?

$\Psi_{\Phi,f}(w, v) = \Phi\big(w, f(v)\big) = \Phi(f(v), w)$

Proposizione:

$\Psi_{\Phi,f}$ è un prodotto scalare $\leftrightarrow f = f^*$ per Φ.

Osservazione:

Ogni endomorfismo autoaggiunto può essere associato ad un prodotto scalare.

Definizione (Unitariamente diagonalizzabile):

f è unitariamente diagonalizzabile se $\exists B$ ortonormale di autovettori, ossia $M_B(f) = BfB^{-1} = D$

Condizione necessaria:

f autoaggiunto.

Sullo spazio standard $(\mathbb{R}^n, \langle\ \rangle_{\mathrm{Id}})$:

A è unitariamente diagonalizzabile $\leftrightarrow \exists P \in O(n, \mathbb{R}) \mid P^t A P = P^{-1} A P = D$

Specializzazione sullo spazio standard:

$(V, \Phi) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \langle\ \rangle_{\mathrm{Id}})$

Abbiamo che V $\mathbb{R}$-Spazio ; Φ def > 0 ; $\exists B$ ortonormali, quindi:

$\Phi \to \langle\ \rangle_{\mathrm{Id}}$; $f \to A$; $f^* \to A^t$; $\mathrm{O}(\Phi) \to \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{P \in GL(V) \mid P^{-1} = P^t\}$

Teorema spettrale reale:

V $\mathbb{R}$-spazio ; $\dim V = n$; Φ def > 0 ; $f \in \mathrm{End}(V)$ allora:

f è unitariamente diagonalizzabile $\leftrightarrow f = f^*$

Lemma 1:

$f = f^* \rightarrow \mathrm{Spettro}(f) \neq \emptyset$

Lemma 2:

$Z_v = v^{\perp}$ è f-invariante.

Formulazioni equivalente e implicazioni:

1. Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile.
2. Ogni endomorfismo autoaggiunto è diagonalizzabile.
3. $M_D^B(\mathrm{Id}) \in \mathrm{O}(n)$è ortogonale se le basi sono ortonormali.