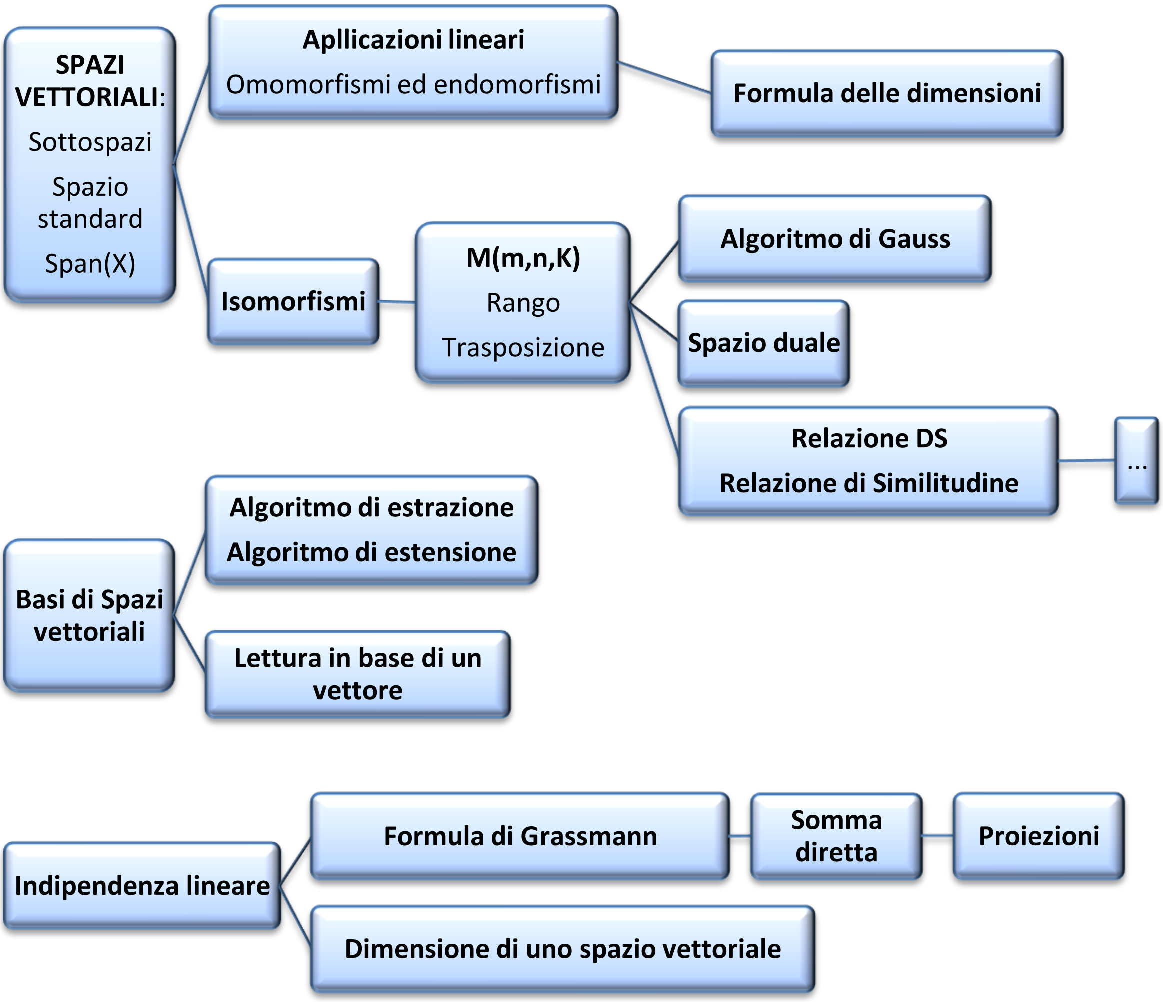
GAAL: Capitolo di introduzione



Definizione (Spazio vettoriale):

Uno spazio vettoriale su K è dato da un insieme $V \neq \emptyset$ munito della seguente struttura:

$(V, +, \cdot)$ |

$+ \; V \times V \to V \quad (V, +)$ Gruppo abeliano

$\cdot \; K \times V \to V$ Moltiplicazione per gli scalari

$\forall v \in V \; 1v = v$

$\forall t, s \in K, v \in V \quad (ts)v = t(sv)$

$\forall t, s \in K, v \in V \quad (s + t)v = sv + tv$

$\forall t \in K, v, w \in V \quad t(v + w) = tv + tw$

Definizione (Sottospazio vettoriale):

Dato V spazio vettoriale, $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale se $0 \in W$ e W è chiuso per le operazioni.

Osservazione:

$\dim(V) = n$; W sottospazio di V, allora $\dim(W) \leq \dim(V) = n$

Definizione (Span(X) o Sottospazio di *V* generato dall'insieme *X*):

$\mathrm{Span}(X) = \{v \in V | v \text{ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di X}\}$

Proprietà:

$X \subseteq \mathrm{Span}(X)$

$\mathrm{Span}(X)$ è un sottospazio vettoriale di V (Per $X \subseteq V$)

$\forall W$ sottospazio di $V | X \subseteq W \subseteq \mathrm{Span}(X) \to W = \mathrm{Span}(X)$

Ossia è il più piccolo contenente X.

Osservazione (Seconda caratterizzazione):

$X \subseteq V; X \neq \emptyset; V(X) = \{W | W \text{ sottospazio di } V \; e \; X \subseteq W\}$ allora $\cap_{W \in V(X)} W = \mathrm{Span}(x)$

Definizione (Finitamente generato):

V è finitamente generato se $\exists x$ finito | $V = \mathrm{Span}(X)$

Esempio:

K^n è finitamente generato. $K^n = \mathrm{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$; $K[t]$ non è finitamente generato.

Definizione (Applicazioni lineari o Omomorfismi fra spazi vettoriali):

V, W K-spazi vettoriali $f: V \to W$ è lineare se:

$\forall v_1, v_2 \in V$ $f(v_1 +_V v_2) = f(v_1) +_W f(v_2)$

$\forall v \in V, \forall t \in K$ $f(t \cdot_V v) = t \cdot_W f(v)$

Osservazione:

Formano un gruppo per la composizione, $\mathrm{Hom}(V_K, W_K)$.

Notazione:

$\mathrm{End}(V_K) = \mathrm{Hom}(V_K, V_K)$

Isomorfismi: V, W finitamente generati sono Isomorfi $\leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Osservazione:

Z insieme (O spazio vettoriale), V K-spazio vettoriale, allora:

$V^Z = \{f: Z \to V\}$ è uno spazio vettoriale, inoltre:

$\mathrm{Hom}(Z, V_K)$ sottospazio vettoriale di V^Z

Proprietà $f: V \to Z$ lineare:

- $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$ sottospazio vettoriale di V
- $\mathrm{Im}(f) = \{z \in Z | \exists v \in V\ f(v) = z\}$ sottospazio vettoriale di Z
- f iniettiva $\leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$
- f è un isomorfismo se è Bigettiva ($\exists f^{-1}$) e f^{-1}è lineare
- $\mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f)) \leq n$
- f è iniettiva $\leftrightarrow \{f(v_1), \dots f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti

- $f: V \to W$ è un isomorfismo $\leftrightarrow (f(v_1), \dots f(v_n))$ è una base di W
- f è completamente determinato da $(f(v_1), \dots f(v_n))$.

  Inoltre per ogni scelta dei vettori $\{w_1, \dots, w_n\}$ di arrivo $\exists!$ g lineare $V \to W |$
  $g(v_1) \to w_1, \dots, g(v_n) \to w_n$

- $\mathrm{Im}(g|_{\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ e $g \circ f = 0 \leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$

Formula delle dimensioni:

$f: V \to W$ lineare; $\mathrm{Dim}(V) = n$; allora:

$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)$

Corollario:

$\dim(V) = \dim(W)$; $f: V \to W$ lineare; allora: f iniettivo $\leftrightarrow f$ surgettivo

Definizione (Linearmente indipendenti):

Sia $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$, i vettori di *X* sono linearmente indipendenti se:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

Definizione (Dimensione di uno Spazio vettoriale):

È il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che si possano individuare.

Formula di Grassmann:

$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$

Osservazione:

$W + Z = \mathrm{Span}(W \cup Z)$

Definizione (Somma diretta):

$W \oplus Z$ se $W \cap Z = \{0\}$; $\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z)$

Notazione:

Diciamo che *Z* è un Supplementare.

Definizione (Base):

Sia V finitamente generato, una base $B = \{v_1, \dots v_n\}$ di V è un sottoinsieme finito e ordinato | $V = \mathrm{Span}(B)$; I vettori di *B* sono linearmente indipendenti.

Algoritmo di Estrazione:

$V = Span(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \neq 0$

Costruisco per induzione con la convenzione: $(Tenuti|da\ valutare) = (S|D)$

Passo base: $(x_1|x_2, \dots, x_n)$

Valuto se posso ottenere x_2 da S; se si lo tengo, altrimenti lo elimino.

Passo induttivo: $(S_{n-1}|D_{n-1})$

Applico lo stesso ragionamento con il primo vettore v di D_{n-1}

Test: v è combinazione Lineare di S_{n-1}?

Si: $(S_n = S_{n-1}|D_n = D_{n-1} \setminus \{v\})$

No: $(S_n = S_{n-1} \cup \{v\}|D_n = D_{n-1} \setminus \{v\})$

Itero fino a $D = \emptyset$

Proposizione:

S_{finale} è una base.

Osservazione:

Ogni spazio finitamente generato ammette basi.

Algoritmo di Estensione:

$V = Span(x_1, \ldots, x_n) \quad Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ linearmente indipendenti

$\{z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n\} \to Span(Z \cup X) \supseteq \mathrm{Span}(X)$

Applicando l'Algoritmo di Estrazione ottengo una base.

Proposizione:

$V = Span(x_1, \ldots, x_n); V \supseteq Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ linearmente indipendenti $\to m \leq n$

Corollario:

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ due basi di $V \to m = n$

Lemma:

Fissato una base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ di V allora:

$\forall v \in V\ \exists!\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = v\ ;\ a_j \in K$

Osservazione:

Non esiste una scelta privilegiata della base.

Coordinate di un vettore v rispetto alla base X:

$$[v]_X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Osservazione:

Il vettore è INTRINSECO, le coordinate sono RELATIVE alla base.

Isomorfismo di passaggio alle coordinate e specializzazione su K^n:

$A: K^n \to K^m \mid x \to Ax = x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^n)$; $\mathrm{Ker}(A) =$ soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$

Formula delle dimensioni:

$$\dim(K^n) = \dim\big(\mathrm{Sol}(Ax = 0)\big) + \mathrm{rango}(A)$$

<table>
<tr><td>Astratto</td><td rowspan="3">$V \to^{[\,]_B} K^n$
Isomorfismo di passaggio alle coordinate (Rispetto alla base B). In modo unico.
Non è un Isomorfismo canonico perché dipende dalla base.</td><td>Spazio Standard</td></tr>
<tr><td>$V; \dim(V) = n$
∄ una base privilegiata</td><td>$K^n; \dim(K^n) = n$
$(e_1, \ldots, e_n)$ Base canonica</td></tr>
<tr><td>$V = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$</td><td>$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Rispetto alla Canonica</td></tr>
</table>

Matrice associata rispetto alle basi B e D:
Serve quando lo spazio vettoriale di partenza e di arrivo hanno due basi distinte; quindi ottengo prima la lettura in base canonica e poi compongo.

$$\begin{array}{ccc} V_B & \to^{f} & W_D \\ \downarrow^{[\,]_B} & & \downarrow^{[\,]_D} \\ K^n & \to^{M_D^B(f)} & K^m \end{array}$$

$$M_D^B(f) = [\,]_D \circ f \circ [\,]_B^{-1}$$

Matrice del cambiamento di base:

$$\begin{array}{ccc} V_B & \to^{Id(v)} & W_{B^I} \\ \downarrow^{[\,]_B} & & \downarrow^{[\,]_{B^I}} \\ K^n & \to^{M_{B^I}^B(Id(v))} & K^n \end{array}$$

$$M_{B^I}^B(Id(v)) = [\,]_{B^I} \circ Id(v) \circ [\,]_B^{-1}$$

Osservazione:
Le matrici di cambiamento di base sono l'una l'inverso dell'altra.

Idea:
In pratica dato il vettore letto in base *B* voglio sapere quanto vale in base B^I.
Per fare questo lo leggo in base canonica $(B)\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}_C$ e poi leggo il vettore della base canonica in base B^I; ossia $(B^I)^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}_{B^I}$.
In totale quindi ottengo $M_{B^I}^B(Id(v)) = (B^I)^{-1}(B)$

Formula del cambiamento di base: $[v]_{B^I} = M_{B^I}^B(Id(v))[v]_B$

Isomorfismo di passaggio alle coordinate (Versione leggera):

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{V} & \to^{\boldsymbol{f}} & \boldsymbol{W} \\ \downarrow^{[\,]_{\boldsymbol{B}}} & & \downarrow^{[\,]_{\boldsymbol{D}}} \\ \boldsymbol{K^n} & \to & \boldsymbol{K^m} \end{array}$$

Avendo un vettore v letto in base C vale la relazione: $\boldsymbol{M_B v_B = v_c}$ con M_B matrice che contiene i vettori di base B.

Definizione (Spazio prodotto):
V, W K-spazi vettoriali; lo Spazio prodotto definito con le operazioni:
$+ \; V \times W \to V \times W \mid (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
$\cdot \; K(V \times W) \to V \times W \mid \lambda(v, w) \to (\lambda v, \lambda w)$

Lemma:
$\dim(V) = n \,;\, \dim(W) = m \to \dim(V \times W) = m + n$

Spazio standard:

Come spazio standard su un campo K si intende lo spazio vettoriale K^n con n dimensione dello spazio.

Osservazione:

È uno spazio vettoriale dove esiste una scelta privilegiata della base.
Base canonica: $C = (e_1, \dots, e_n)$

Costruzione di $\boldsymbol{M(m, n, K)}$ e parallelismo con $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$:

Idea:

È possibile associare mediante isomorfismo $(\mathrm{Hom}(K^n, K^m), +, \cdot) = (M(m, n, K), +, \cdot) |\, f \to A_f$

Osservazione:

Mantiene la struttura di gruppo e la composizione diventa il prodotto di matrici.
$K^n \to^A K^m \to^B K^s$; la matrice associata è: $C = A \cdot B$

Osservazione:

Ogni applicazione descritta da una matrice è lineare.
Ogni applicazione lineare è rappresentata da una matrice.

Idea:

Ridurre lo studio di ogni applicazione lineare allo studio di matrici

Individuare il $\mathbf{Ker}(\boldsymbol{f})$ sfruttando le matrici:

$f: V \to W$ lineare, cerco $\mathrm{Ker}(f)$, quindi passo a $A_f: K^n \to K^m$
$\mathrm{Ker}\left(A_f\right) = \{x | A \cdot x = 0\}$.
Quindi sto cercando semplicemente le soluzioni del sistema.

Esempio:

$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in Q^2 | A \cdot x = 0\}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \binom{x_1}{x_2} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ossia $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ In questo caso $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ e la funzione è iniettiva.

Individuare il $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$ sfruttando le matrici:

Capire se $B \in K^M$; $B \in Im(f)$? Basta risolvere il sistema lineare non omogeneo: $A \cdot x = B$

Notazione:

$GL(K^N) = \{A \in M(n, K) | A \cdot K^N \to K^N \text{ è invertibile}\}; \exists A^{-1} | A \circ A^{-1} = Id_n$
$\text{Rango } A = \dim(\text{Span(Colonne di } A))$; $\text{Rango } A^t = \dim(\text{Span(Righe di } A))$

Osservazione:

$\text{Rango } A = \text{Rango } A^t$

<u>Algoritmo di Gauss:</u>

Algoritmo per ottenere una Matrice a Scalini: $A_{m\times n} \rightsquigarrow \hat{A}_{m\times n}$

Ogni passo può essere compiuto applicando un'operazione elementari sulle righe di *A*.

Operazioni elementari:

1) Scambio; $R_J \leftrightarrow R_K$ *Es.* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2) Moltiplicazione per $c \neq 0$; $R_J \leftrightarrow cR_j$ *Es.* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3) Addizione righe: $R_J \leftrightarrow R_j + cR_k$ *Es.* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Ottengo una matrice con gli 1 a scalini. Riesco in questo modo ad ottenere una base diversa da quella di partenza.

Corollario:

$\mathrm{Span}\big(\mathrm{Righe}(A)\big) = \mathrm{Span}\left(\mathrm{Righe}\big(\hat{A}\big)\right)$

Corollario:

Rango $A =$ Rango $\hat{A} = \#$ pivot

Corollario:

$(A \quad | \quad B)$; $(\hat{A} \quad | \quad \hat{B})$ sono equivalenti.

<u>Lemma di Rouché-Capelli:</u> *(Applicazione ai sistemi lineari)*

$Ax = B$; $\exists$ soluzioni $\leftrightarrow B \in \mathrm{Span}(\mathrm{Colonne}(A))$.

Non voglio che siano indipendenti quindi equivale a:

Rango $(A \quad | \quad B) =$ Rango A

Quindi posso applicare Gauss e confrontare.

Corollario:

Ogni *A* invertibile è prodotto di matrici elementari.

Spazio Duale:

V K-Spazio vettoriale; $V^* = Hom(V, K)$ è lo **spazio duale** di V.

$\varphi \in V^*$ è un **funzionale** su V.

Sia $f \in Hom(V, W)$; la trasposta di f è: $V^* \leftarrow^{f^t} W^*$ Ossia; $V \rightarrow^{f} W \rightarrow^{\varphi} K$; $f^t(\varphi) = \varphi \circ f$

La base duale $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* è costruita nel seguente modo: $v_j^*(v_i) = \begin{matrix} 0 \; se \; i \neq j \\ 1 \; se \; i = j \end{matrix}$

Vale anche: $V_B \rightarrow^{f} W_D$; $V_{B^*}^* \leftarrow^{f^t} W_{D^*}^*$ e dunque $M_{B^*}^{D^*}(f^t) = \left(M_D^B(f)\right)^t$

Da cui $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f^t))$ e Rango A_f = Rango ${A_f}^t$

Definizione (Annullatore):

$$\mathrm{Ann}(W) = \{\varphi \in V^* | \varphi_{|W} = 0 \text{ oppure } \varphi(w) = 0 \; \forall w \in W\}$$

Proprietà:

$\mathrm{Ann}(W)$ è un sottospazio di V^*

$\dim(\mathrm{Ann}(W)) = \dim(V) - \dim(W)$

$\exists$ un Isomorfismo Canonico $f: V \rightarrow V^*$ | $\forall B$ base di V $\varphi_{B^*} \circ \varphi_B = f$

<u>Relazione Destra-Sinistra: $(\boldsymbol{DS})$ su $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$</u>

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ sono $f \sim_{DS} g \leftrightarrow \exists h \in GL(W)\ ;\ \exists k \in GL(V)\ |\ g = h \circ f \circ k$

Osservazione:

È una relazione di equivalenza.

<u>Insieme quoziente:</u>

$\mathrm{Hom}(V; W)/_{\sim_{DS}}$

Teorema:

I seguenti fatti sono equivalenti

1) $f \sim_{DS} g$
2) $\exists B, B^I$ basi di V, D, D^I basi di $W | M_D^B(f) = M_{D^I}^{B^I}(g)$

Teorema:

$f \sim_{DS} g \leftrightarrow \mathrm{Dim}\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(g))$

Abbiamo un **invariante completo** di equivalenza, la dimensione dell'immagine.

Conseguenza importante:

$\forall f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ | $\dim f = r$ $\exists$ B di V e D di W | $M_B^D(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Relazione di Coniugio o Similitudine:</u>

Endomorfismi coniugati:

$f, g \in \mathrm{End}(V)$ si dicono coniugati $(f \sim g)$ se $\exists h \in GL(V)|\ g = h \circ f \circ h^{-1}$

Matrici simili:

Passando in coordinate: $A, B \in M(n, K)$ sono simili se $\exists$ $P \in GL(n, K)|\ B = PAP^{-1}$

Proposizione:

V spazio vettoriale $\dim(V) = n, f, g \in \mathrm{End}(V)$.

I seguenti fatti sono equivalenti:

1) $f \sim g$
2) Comunque si scelga una base B di V $M_B(f)$ e $M_B(g)$ sono simili.
3) $\exists$ B, B^I basi di V | $M_B(f) = M_{B^I}(g)$