Capitolo VI:

Esempi famosi

Giulio Del Corso

<u>Sfera S^n:</u>

Varietà n-dimensionale senza bordo.

> n-varietà:
> Significa che ogni punto ha un intorno localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

T2

Connessa
Connessa per archi
Semplicemente connessa

Compatta
Localmente compatta (In quanto localmente omeomorfa ad uno spazio euclideo)

E' uno Spazio di Tychonoff ed uno Spazio di Baire (segue da T2 e Localmente compatto)

Osservazione S^2:

La sfera di Riemann è la più semplice superficie di Riemann compatta ed è dunque utile per definire le funzioni meromorfe.

Osservazione su S^3:

La congettura di Poincaré afferma che ogni 3-varietà semplicemente connessa, compatta e senza bordo (Chiusa) è omeomorfa ad S^3.

Generalizzazione ad S^n:

Ogni varietà chiusa n-dimensionale omotopicamente equivalente alla sfera S^n è ad essa omeomorfa.

Gruppo fondamentale:

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$
$\pi_1(S^n) = e\ ; n \geq 2$

Piano Proiettivo $\mathbb{P}^{\boldsymbol{n}}(\mathbb{R})$:

T2
Compatto
Connesso

Osservazione $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}(\mathbb{R})$:
E' omeomorfa ad S^1

Osservazione $\mathbb{P}^{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$:

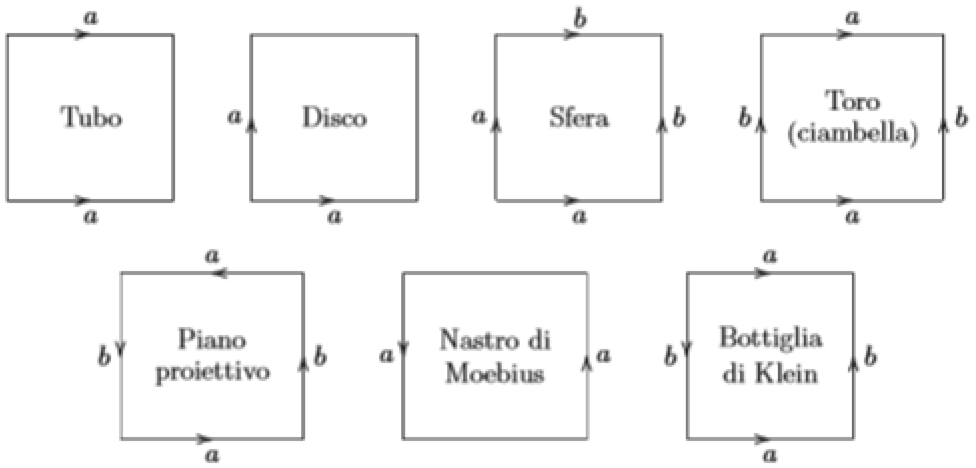
2-Varietà

Localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^2$

Rivestimento universale:
Mappa da $S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con relazione antipodale.

Gruppi fondamentale:
$\pi_1\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\right) = \mathbb{Z}$
$\pi_1\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\right) = \mathbb{Z}_2\,; n \geq 2$
$\pi_1\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\right) = e$

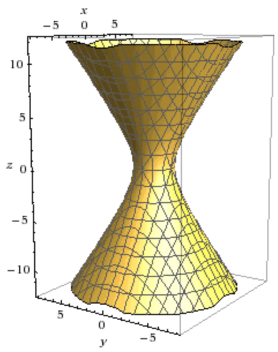
Sartoria topologica:



Funzioni in $\mathbb{R}^3$:

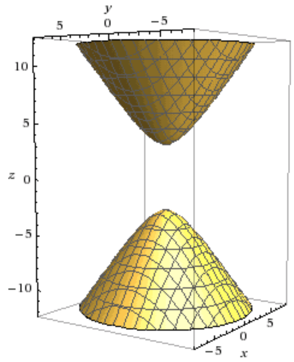
Iperboloide iperbolico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



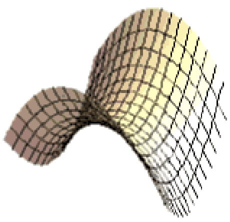
Iperboloide ellittico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



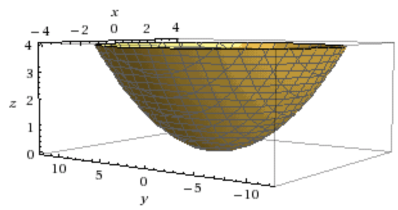
Paraboloide iperbolico:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



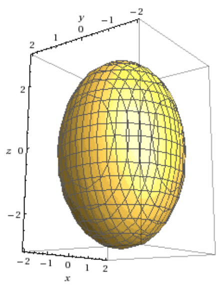
Paraboloide ellittico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



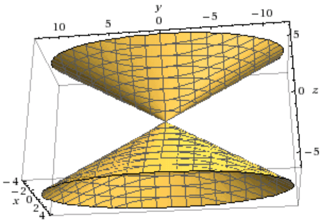
Ellissoide reale:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



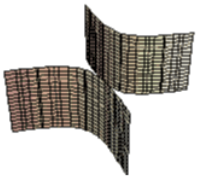
Cono reale:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



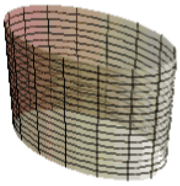
Cilindro iperbolico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro ellittico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro parabolico:

$$x^2 + 2ay$$