<u>Capitolo V:</u>

Analisi Complessa

Giulio Del Corso

Idea:

Questo volume contiene i teoremi e le proposizioni più utilizzate negli esercizi. Non riporto quindi né dimostrazioni né definizioni ma solo proprietà utili ed esempi.

Indice:

Idea:

Definizioni equivalenti di funzione olomorfa, condizioni di Cauchy - Riemann.
Regole di derivazione per le funzioni di una variabile complessa.

Funzioni differenziabili:

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $f(x, y)$ una funzione reale o complessa definita in D.
Diciamo che f è differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se esiste una funzione lineare $ah + bk$ di variabili h, k reali tale che:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \alpha\sqrt{h^2 + k^2}$$

Per valori sufficientemente piccoli di h, k. α è una funzione reale di h, k il cui valore assoluto tende a 0 quando $\sqrt{h^2 + k^2}$ tende a 0.

Osservazione:

Se una funzione è differenziabile allora le costanti a, b sono univocamente determinate dalle derivate parziali:

$$\begin{cases} a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Osservazione:

L'esistenza delle derivate parziali non garantisce la differenziabilità.
Se in un intorno del punto però esistono sempre le derivate parziali e queste sono funzioni continua allora f è differenziabile.

Osservazione:

Una funzione con derivate parziali continue in un aperto D si dice differenziabile con continuità in D.

Definizione (Funzione olomorfa):
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ piano complesso e sia f una funzione di variabile complessa $x + \boldsymbol{i}y$ in D.
$f(z)$ si dice funzione olomorfa nel punto $z_0 \in D$ se:
$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u}$ esiste.
(u è una variabile complessa)

Osservazione:
E' equivalente a dire che nel piano complesso in quel punto la funzione è derivabile.

Condizione equivalente:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = c(h + \boldsymbol{i}k) + \alpha(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$

Quindi vedendo la funzione come a due variabili reali questa è differenziabile.

<u>**Condizioni di Cauchy - Riemann:**</u>
Proposizione:
f è olomorfa in un punto se e solo se la funzione (Considerata in funzione delle variabili reali x ed y) è differenziabile nel punto e vale la seguente relazione fra le fra le derivate parziali di f:
$\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Equivalente:
Se $f = P + iQ$ com P,Q funzioni reali allora otteniamo la condizione di Cauchy - Riemann:
$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Osservazione:
Sono condizioni necessarie e sufficienti alla derivabilità nel punto.

Calcolo della derivata complessa:
Esistono quatto formulazioni equivalenti della derivata:
$f'(x) = P_x + iQ_x$
$f'(x) = Q_y - iP_y$
$f'(x) = P_x - iP_y$
$f'(x) = Q_y + iQ_x$

Osservazione:
Valgono le normali leggi di derivazione per somma di funzioni o funzioni composte.

Derivazione per funzioni a variabili complesse:

Dato il differenziale della funzione a due variabili reali x, y:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Osservando che per la variabile complessa $z = x + \boldsymbol{i}y$; $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$ vale:

$$dz = dx + \boldsymbol{i}dy \; ; d\bar{z} = dx - \boldsymbol{i}dy$$

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \; ; \; dy = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}(dz - d\bar{z})$$

Sostituendolo nel differenziale:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}$$

Introduciamo la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \; ; \; \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Allora vale la relazione:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

La condizione di Cauchy - Riemann può essere scritta come:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Corollario:

Se f è una funzione olomorfa su un aperto connesso D e la parte reale $\left(\mathrm{Re}(f) = \frac{(f+\bar{f})}{2}\right)$ è costante allora f è costante.

Osservazione (Funzioni continue):

Una funzione complessa è continua in un punto z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Idea:

Serie di potenze: serie formali e serie convergenti.
Operazioni con le serie.
Raggio di convergenza e convergenza sui dischi.
Funzioni analitiche (le funzioni analitiche sono olomorfe).
Le serie di potenze definiscono funzioni analitiche.

Definizione (Serie formale):

Dato un campo K:

Polinomi:

$K[X] = \{successioni\ di\ numeri\ in\ K\ quasi\ ovunque\ nulle\} = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\}$

Serie formali:

$K\big[[X]\big] = \{successioni\ di\ numeri\ in\ K\} = \{s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n\}$

Operazioni su $K\big[[X]\big]$:

$\sum a_n x^n, \sum b_n x^n \in K\big[[X]\big]$

Allora:

$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum c_n x^n \mid c_i = a_i + b_i$

$(\sum a_n x^n) \cdot (\sum b_n x^n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \big(a_j b_{p-j}\big) x^p$

Osservazione:

Somma e prodotto sono distributivi l'uno rispetto all'altro.

Elemento neutro:

L'elemento neutro per la somma è la serie formale $0 = \sum 0\, x^n$

L'elemento neutro per il prodotto è la serie formale $1 = (1 - x) \sum_{i\geq 0} x^i$

Osservazione:

Vedendo $K\big[[X]\big]$ come uno spazio vettoriale con base infinita $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ allora:

$K\big[[X]\big]$ è un'algebra commutativa

$K[X]$ è una sottoalgebra di $K\big[[X]\big]$

Altrimenti possiamo vederlo come un anello commutativo (Dominio di integrità) rispetto alle operazioni descritte trascurando il prodotto per scalari.

Notazione (Algebra):

Un'algebra su un campo K è un K-Spazio vettoriale dotato (Oltre alle usuali operazioni di somma e di prodotto per scalare) di un'ulteriore operazione, il "prodotto", fra vettori.

Questa operazione deve essere una forma bilineare.

Definizione (Ordine di una serie formale):

$s \in K[[X]]$; $w(s) = \text{ordine di } s$ è il più piccolo intero $w \mid a_w \neq 0$

Osservazione:
Per convenzione $w(0) = \infty$

Osservazione:
È un'estensione alle serie formali del concetto di grado sui polinomi.

Proprietà:
$s, t \in K[[X]]$ allora:

$w(S + T) \geq \min(w(s), w(t))$
$w(s \cdot t) = w(s) + w(t)$

Definizione (Famiglia sommabile):

$\{S_i(x) = \sum_{j \geq 0} a_{i,j} x^j\}$ è una famiglia sommabile se $\forall j$ l'insieme $\{i \mid a_{i,j} \neq 0\}$ è finito.

Osservazione:
Nel caso di una famiglia sommabile è ben definita la serie $\sum_i S_i(x)$

Esempio:
La famiglia $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è sommabile.

Proposizione:
Dato $T \in K[[X]]$ e $w(T) \geq 1 \rightarrow \{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è sommabile.

Elementi invertibili:

Cerchiamo gli elementi invertibili sapendo che vale l'uguaglianza $(1 - x) \sum_{i \geq 0} x^i = 1$

Se abbiamo $s \in K[[X]] \mid w(s) = 0 \rightarrow s = a_0(1 - u(x))$ e se sostituiamo u in quella prima otteniamo:

$(1 - u(x)) \sum_{i \geq 0} u(x^i) = 1 \rightarrow a_0(1 - u(x)) a_0^{-1} \sum_{i \geq 0} u(x^i) = 1 \rightarrow s \cdot a_0^{-1} \sum_{i \geq 0} u(x^i) = 1$

Dunque $s^{-1} = a_0^{-1} \sum_{i \geq 0} u(x^i)$

Quindi:

$K[[X]]^* = \{s \in K[[X]] \mid w(s) = 0\}$

Proposizione ($K[[X]]$ è un Dominio di Integrità):
Ricordiamo che non possono esistere elementi invertibili che siano anche divisori di 0 siano dunque $s_1, s_2 \in K[[X]] \backslash K[[X]]^*$ allora $w(s_1), w(s_2) > 0 \rightarrow w(s_1 \cdot s_2) > 0$ se $\rightarrow$ non possiamo ottenere la serie $0 \rightarrow K[[X]]$ è un dominio di integrità.

Osservazione (Un po' a caso):
$\left\{\frac{p(x)}{q(x)} \mid q(0) \neq 0\right\} \subseteq K[[x]]$

<u>Composizione fra serie formali:</u>

La funzione che associa ad ogni serie formale la composizione con un'altra serie formale data è un omomorfismo di anelli.

Il polinomio $\mathrm{Id}(x) = x$ è l'elemento neutro per la composizione: $s \circ x = x \circ s = s \; \forall s \in K\big[[X]\big]$

Proposizione:

Data $s = \sum a_n x^n$ ha una serie reciproca $t \in K\big[[X]\big] \mid w(t) = 1 \leftrightarrow w(s) = 1$

In questo caso $t \circ s = x$

Osservazione:

Una serie è reciproca qualunque sia il verso di composizione.

Infatti: sia $s, s_1 \mid s \circ t = t \circ s_1 = \mathrm{Id}$ allora:

$s_1 = \mathrm{Id} \circ s_1 = (s \circ t) \circ s_1 = s \circ (t \circ s_1) = s \circ \mathrm{Id} = s$

<u>Definizione (Derivata di una serie formale):</u>

Data $s = \sum a_n x^n$ definiamo $s' = \sum n a_n x^{n-1}$

Osservazione:

$a_1 = s'(0)\, ; 2a_2 = s''(0)\, ; n!\, a_n = s^{(n)}(0)$

<u>Definizione (Serie a termini convergenti):</u>

Data $s = \sum a_n x^n$ una serie a termini ≥ 0 si dice che converge se $\rho(s) > 0$

Notazione (Raggio di convergenza e Serie associata):

$\rho(s) = \sup\{r \mid \sum |a_n| r^n < \infty\} \in [0, +\infty]$ è il raggio di convergenza di s.

$\sum |a_n| r^n$ viene detta serie associata ad s.

Proprietà:

L'insieme dei valori per i quali la serie converge è un disco sul piano di Gauss:

$D(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$

La serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente (in norma) nel disco $D(0, \rho)$

La serie $\sum a_n z^n$ converge assolutamente se $|z| < \rho$

La serie $\sum a_n z^n$ diverge per $|z| > \rho$

$s(z)$ è una funzione continua per $|z| < \rho$

$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

Proposizione:

Somme e prodotto di serie convergenti sono convergenti.

Se $w(s) = 0$ e s è convergente allora la sua inversa è convergente.

Osservazione:

In generale non possiamo dire molto sul raggio di convergenza dell'inversa, prendiamo ad esempio $s = 1 - x$ che ha $\rho(s) = \infty$, la sua inversa è $s^{-1} = \frac{1}{1-x}$ che ha raggio di convergenza $\rho(s^{-1}) = 1$

Proposizione :

Sia $s(z)$ la somma di una serie convergente s per $z \in D\big(0, \rho(s)\big)$.

Allora s è infinitamente derivabile in D con: $\lim_{h \to 0\, ; h \neq 0} \frac{s(z+h) - s(z)}{h} = \mathrm{s}'(\mathrm{z})$

Funzioni analitiche:

Definizione (Sviluppabile in serie):

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ e f funzione definita in un intorno di z_0. Si dice che f è sviluppabile in serie di potenze in z_0 se $\exists\ S(x) = \sum a_n x^n$ con $\rho(S) > 0$ e $f(z) = S(z)\ \forall z$ con $|z - z_0| < \rho$

In pratica:

Una funzione ha uno sviluppo in serie in un punto se esiste una serie formale che coincida con la funzione stessa in un intorno del punto.

Definizione (Funzione analitica):

Una funzione si dice analitica in un aperto D (Della retta $\mathbb{R}$ o del piano di Gauss $\mathbb{C}$) se è sviluppabile in serie in ogni punto di D.

Osservazione:

f analitica $\rightarrow$ infinitamente derivabile in ogni punto di D, in quanto in ogni punto è sostituibile ad una serie formale che ha questa proprietà.

Somma e prodotto di funzioni analitiche sono analitiche, quindi:

$O(D) = \{f \text{ analitiche su } D\}$ è un anello (Algebra).

Proposizione (D):

Sia $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[X]]$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$.

Allora se $|x_0| < \rho$ la serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) x^n$ ha raggio di convergenza $\rho_{x_0} \geq \rho - |x_0|$ e inoltre:

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ per $|x - x_0| < \rho - |x_0|$

Conseguenza:

Se $S(x)$ è la somma della serie per $|x| < \rho$ allora $S(x)$ è una funzione analitica nel suo disco di convergenza.

Osservazione:

Il raggio di convergenza di una serie di Taylor potrebbe essere strettamente maggiore di $\rho - |x_0|$

Osservazioni:

Le funzioni razionali sono analitiche in ogni punto tranne gli 0 del denominatore.

Idea:

Principio di continuazione analitica (Prolungamento analitico), zeri di una funzione analitica sono isolati.
Funzioni meromorfe.
Ordine in un punto di una funzione meromorfa.

Principio del prolungamento analitico:

Dato $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, f analitica su D e $z_0 \in D$
Sono fatti equivalenti:

$f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall n \geq 0$
f è 0 in un intorno di z_0
f è 0 su D

Corollario:
Se f, g sono due funzioni analitiche in $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso ed esse coincidono in un intorno di $z_0 \in D$, allora $f \equiv g$ in D

Corollario:
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Allora $O(D)$ è un dominio di integrità.

Osservazione:
Gli elementi invertibili su $O(D)$ sono tutte e sole le funzioni analitiche su D.

Osservazione (Unicità):
Siano $D \subseteq D'$ aperti connessi in $\mathbb{C}$. Se $f \in O(D), g \in O(D')$ e $g_{|D} \equiv f$. Allora g è unico.
Quindi se esiste un prolungamento analitico esso è unico.

Funzioni meromorfe:

Idea:
Vogliamo ridurre "ai minimi termini" le funzioni con cui stiamo lavorando.

Siano $f, g \in O(D)$ con $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso.
Supponiamo che $g \not\equiv 0$ in D, consideriamo allora:
$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ definita in $D \backslash Z$ con $Z = \{z \in D \mid g(z) = 0\}$

In particolare:
$h(z) \in O(D \backslash Z)$

Osservazione:
Supponiamo che anche $f \not\equiv 0$ in D e che $z_0 \in Z$, allora:

$f(z_0) = (z - z_0)^h f_1(z) \quad f_1(z_0) \neq 0$
$g(z_0) = (z - z_0)^k g_1(z) \quad g_1(z_0) \neq 0$
Con $h \geq 0\,; k > 0$

Osservazione:
f_1, g_1 sono analitiche in un intorno di z_0

Osservazione:
$h_1(z) \coloneqq \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ è analitica in un intorno di z_0 e $h_1(z_0) \neq 0$

Osservazione:
$h(z) = (z - z_0)^{h-k} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ in un intorno di z_0

Caso 1:
$h \geq k$
Allora $h(z) = (z - z_0)^{h-k} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ è analitica in un intorno di z_0 e si annulla in z_0

Caso 2:
$h < k$
Allora $h(z) = (z - z_0)^{h-k} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ non è analitica in un intorno di z_0

Definizione (Polo di ordine n):

Il punto z_0 è detto polo di ordine $(h - k)$

Osservazione:
Se f è analitica e si annulla in z_0 con molteplicità $k > 0$ allora z_0 è un polo di ordine k della funzione $\frac{1}{f}$

Definizione (Funzione meromorfa):

Una funzione f si dice meromorfa se è analitica in $D' = D\backslash Y$ con Y un insieme di punti isolati ciascuno dei quali è un polo per f.

Osservazione:

Dato $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso $O(D) \subseteq M(D) \coloneqq \{f \text{ meromorfe su } D\}$

Osservazione:

$M(D)$ è un campo.

Infatti sia $f \in M(D)$ allora essa ha una quantità discreta di 0 e di poli, $\frac{1}{f}$ invertirà i poli con gli 0 e dunque apparterrà a $M(D)$

Idea:

Forme differenziali su un dominio di $\mathbb{C}$ e integrazione su cammini C^1 a tratti.
Forme chiuse e forme esatte, primitive.
Integrale di una forma chiusa su un cammino continuo.
Invarianza per omotopia dell'integrale di una forma chiusa.

Definizione (Arco differenziabile):

Si dice arco differenziabile una funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ | le funzioni marginali $\begin{cases} f_x = \pi_x \circ f \\ f_y = \pi_y \circ f \end{cases}$ siano funzioni continue e differenziabili.

Notazione:
$f(a)$ è detto **punto iniziale**
$f(b)$ è detto **punto finale**
Se $f: [a, b] \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, f si dice arco **differenziabile in $\boldsymbol{D}$**.

Definizione (Forma differenziale):

$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$
Con A, B funzioni continue su di un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ è detta forma differenziale.

Osservazione (Classe):
ω è di classe C^k se A, B sono entrambe di classe C^k su Ω

Osservazione:
Se $f: \Omega \subseteq^{aperto} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora la sua forma differenziale è:
$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A = \frac{\partial f}{\partial x}$; $B = \frac{\partial f}{\partial y}$

Definizione (Forma esatta):

ω si dice esatta in Ω se $\exists\ f: \Omega \to \mathbb{R}$ detta **primitiva** di ω | $df = \omega$.

Definizione (Forma chiusa):

ω si dice chiusa in Ω se $A_y = B_x$

Notazione:
$A_y = \frac{\partial A}{\partial y}$; $B_x = \frac{\partial B}{\partial x}$

Equivalente:
Una forma differenziale $\omega = Pdx + Qdy$ in un aperto D è detta chiusa (P, Q continue) se ogni $(x_0, y_0) \in D$ possiede un intorno aperto in cui ω ammette primitiva.
Senza perdere di generalità l'intorno può essere un disco aperto centrato in (x_0, y_0).

Teorema:
Forma esatta → Forma chiusa.

Osservazione ($\mathbb{R}^3$):
Le corrispondenti definizioni su $\mathbb{R}^3$ sono:

Forma differenziale: $\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$
Forma chiusa: $A_y = B_x$; $B_z = C_y$; $C_x = A_z$

Teoremi (forme esatte):
Una forma differenziale chiusa definita su di un insieme convesso è esatta.
Una forma differenziale chiusa definita in un insieme semplicemente connesso è esatta.

Esempio interessante:
Consideriamo $\omega: \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\} \to \mathbb{R}^2 \ \mid \ \omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$
Allora:
$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{d}{dy}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
Per la proposizione precedente ω *è chiusa.*
Tuttavia consideriamo γ *circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario.*
Allora $\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\, d\theta - \cos^2\theta\, d\theta = -2\pi \neq 0$
Quindi questa forma non è esatta.

Definizione (Primitiva di $\boldsymbol{\omega}$ forma chiusa lungo un cammino):
Una primitiva di ω forma chiusa lungo un cammino $\gamma: [a,b] \to D$ è una funzione continua che soddisfa la seguente condizione:
$\forall\ t_0 \in [a,b]\ \exists\ U \in I(t_0)\ (U =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\ \cap [a,b])$ per cui:
$\forall\ t \in [a,b], |t - t_0| < \varepsilon \to f(t) \in F\big(\gamma(t)\big)$ con F primitiva locale di ω.

Proposizione:
Sia ω chiusa in D e γ un cammino continuo in D. Allora $\exists f: [a,b] \to \mathbb{C}$ primitiva di ω lungo γ.
Inoltre essa è unica a meno di una costante.

Proposizione:
Siano γ, γ' due cammini omotopi, con un'omotopia $G: [a,b] \times [0,1] \to D$
Siano:
f_1 una primitiva di ω lungo γ
f_2 una primitiva di ω lungo γ'
Con $f_1(a) = f_2(a)$
Allora $f_1(b) = f_2(b)$

Osservazione:
Con questa proposizione possiamo definire $\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)$ con f primitiva di ω (forma chiusa) lungo γ cammino continuo.

Osservazione:
Dipende solo dalla classe di omotopia di γ

Teorema di invarianza per omotopia:
Se ω è una forma chiusa in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ (O di $\mathbb{R}^3$) e se γ_1, γ_2 sono due curve chiuse omotope in Ω, allora vale:

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$

Corollario:
Ogni curva chiusa omotopa ad una curva costante (Un punto) ha integrale curvilineo nullo.

Corollario pratico:
Se due curve qualsiasi nell'insieme dove stiamo lavorando sono omotope allora per dimostrare l'esattezza ci basta dimostrare la chiusura e che per una curva chiusa qualsiasi l'integrale sia nullo.
Ad esempio se stiamo lavorando su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ allora ogni curva chiusa o è omotopicamente equivalente al punto (E allora ovviamente l'integrale è nullo) o è un "laccio" attorno all'origine.
Studiando uno qualsiasi di questi lacci possiamo dimostrare o confutare l'esattezza.

Teorema di indipendenza:
Sia ω una forma differenziale con dominio Ω e siano γ_1, γ_2 due curve equivalenti.
Se sono concordi:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Se sono discordi:

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega$$

Notazione:
Equivalenti: Se una si ottiene dall'altra (Mediante la composizione) con un cambiamento di parametro.
Concordi: Se il cambiamento di parametro è concorde in segno.

Integrali di linea:

Definizione (Integrale curvilineo):

Sia $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ una forma differenziale continua su di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica C^1.
L'integrale di ω su γ è il numero:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \Big(A\big(\gamma(t)\big)\gamma_1'(t) + B\big(\gamma(t)\big)\gamma_2'(t)\Big)\,dt$$

Dove $\gamma_1'(t)$ è la derivata rispetto alla prima componente e $\gamma_2'(t)$ quella rispetto alla seconda.

Proprietà:

Se $\omega_1; \omega_2$ sono due forme differenziali definite su Ω allora vale:

$$\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$$

Se γ è costante con sostegno in Ω:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Se $\gamma_1: [a,b] \to \Omega\ ;\ \gamma_2: [b,c] \to \Omega$ sono due curve regolari tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ allora:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Teorema fondamentale per gli integrali curvilinei:

Sia ω una forma differenziale esatta in Ω e f una sua primitiva.
Allora:

$$\int_\gamma \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

Dove P_1, P_2 sono gli estremi della curva γ.
In particolare l'integrale non dipende dalla curva ma solo dagli estremi.

Corollario:
Ogni forma esatta ha integrale lungo una qualsiasi curva chiusa nullo.

Teorema:

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

ω è esatta.
$\int_\gamma \omega$ dipende solo dagli estremi
$\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa (Si indica con $\oint_\gamma \omega$)

Osservazione:

Se $D \subseteq \mathbb{C}$ è connesso e ω è una forma differenziale esatta, allora le primitive di ω sono tutte della forma $F + c\,, c \in \mathbb{C}$

Proposizione:

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ connesso e sia ω una forma differenziale definita in D a valori in $\mathbb{R}^2$.
Allora ω è esatta $\leftrightarrow$ $\forall$ cammino chiuso e differenziabile a tratti γ in D vale: $\int_\gamma \omega = 0$

Proposizione rettangoli:
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto, allora ω è esatta $\leftrightarrow$ $\forall\, R \subseteq D$ con i lati paralleli agli assi, denotando con γ il suo bordo, vale il suo bordo, vale $\int_{\gamma} \omega = 0$

Osservazione:
Questa condizione è più facile da verificare di quella sopra in quanto abbiamo notevolmente ridotto il numero di casi.

Idea:

Formula di Green per i rettangoli.
Se f è olomorfa, la forma $f(z)dz$ è chiusa (Teorema di Cauchy).
Indice di un cammino chiuso rispetto a un punto (Indice di Cauchy).
Formula di Cauchy.
Sviluppo in serie delle funzioni olomorfe.

Formula di Green - Riemann:

Sia A un rettangolo con i lati paralleli agli assi e sia γ il suo bordo, siano $P(x,y), Q(x,y)$ due funzioni continue definite in un intorno D di A.
Allora vale:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_A \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy$$

Formulazione equivalente (Formula generale di Gauss - Green):

Formule di Gauss nel piano:

Siano A, B due funzioni di classe C^1 su di un insieme compatto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ delimitato da un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti.
Allora:

$$\iint_X A_y(x,y)dxdy = -\int_{\partial X} Adx$$
$$\iint_X B_x(x,y)dxdy = \int_{\partial X} Bdy$$

Con l'orientazione di ∂X quella indotta da X.

Formule di Gauss - Green nel piano:

Sia $\omega = Adx + Bdy$ una forma differenziale di classe C^1 su di un insieme compatto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ delimitato da un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti.
Allora:

$$\iint_X \left(B_x(x,y) - A_y(x,y)\right) dxdy = \int_{\partial X} Adx + Bdy$$

Con l'orientazione di ∂X quella indotta da X.

<u>Teorema di Cauchy:</u>
Se $f(z)$ è una funzione olomorfa su di un aperto D del piano complesso allora la forma differenziale $f(z)dz$ è chiusa in D.

Corollario:
Una funzione olomorfa in D ha una primitiva locale (Anch'essa olomorfa).

Corollario:
Se $f(z)$ è olomorfa in D, allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni cammino chiuso γ in D omotopo ad un punto in D.

<u>Definizione (Indice di Cauchy):</u>
Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$, sia $a \notin \mathrm{Imm}(\gamma)$, allora l'indice di Cauchy di γ rispetto a t è dato da: $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$

Osservazione:
$\gamma \to I(\gamma, a)$ passa al quoziente per omotopia.
$I(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$
Per calcolarlo dobbiamo individuare una funzione complessa $f(t) \mid e^{f(t)} = \gamma(t) - a$; allora:

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i}$$

Proprietà dell'indice:
Se il punto a è fissato allora il valore dell'indice non cambia se modifichiamo il cammino chiuso purché questo non superi a.
Se l'immagine del cammino chiuso è contenuta in un aperto semplicemente connesso che non contiene il punto a allora l'indice è 0.

Se il cammino è un cerchio percorso in senso positivo allora l'indice è 0 per a fuori dal cerchio e 1 per a all'interno.

Formula integrale di Cauchy:
Sia f una funzione olomorfa su di un aperto D, $a \in D$ e γ un cammino chiuso che non passi per a e che sia omotopo ad un punto in D.

Allora:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a} = I(\gamma,a)f(a)$$

Sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa:
Data $f(z)$ una funzione olomorfa sul disco aperto $|z| < \rho$, allora f può essere sviluppata come una serie di potenze sul disco.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_0}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Corollario:
Ogni funzione olomorfa su di un aperto è analitica nell'aperto.
Per le funzioni a variabile complessa c'è dunque un'equivalenza fra essere analitiche e olomorfe.
Di conseguenza una funzione olomorfa è infinitamente derivabile e la sua derivata è a sua volta una funzione olomorfa.

Idea:

Disuguaglianze di Cauchy; una funzione intera limitata `e costante (Liouville).
Teorema di Morera.
Le funzioni olomorfe sono aperte.
Principio del massimo modulo.
Lemma di Schwarz.

Teorema di Liouville:
Una funzione limitata olomorfa sull'intero piano è costante.

Teorema di Morera (Opposto del teorema di Cauchy):
Sia $f(z)$ una funzione continua su di un aperto D. Se il differenziale $f(z)dz$ è chiuso allora la funzione è olomorfa in D.

> **Corollario:**
> Se $f(z)$ è continua in D e olomorfa in tutti i punti di D eccetto alcuni punti di una curva allora è olomorfa su tutto D senza eccezioni.

Teorema (Principio del massimo modulo):
Sia f una funzione complessa continua in un aperto D del piano complesso. Se f ha la proprietà del valor medio e $|f|$ ha un punto di massimo relativo $a \in D$ allora f è costante in un intorno di a.

> **Osservazione (Proprietà del valor medio):**
> Se per f (Continua) su D vale per ogni disco compatto S contenuto in D la seguente proprietà:
> Il valore di f nel centro è uguale al valor medio sulla frontiera.
> $$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)d\theta$$

Lemma di Schwarz:
Sia $f(z)$ una funzione olomorfa sul disco $|z| < 1$ e supponiamo che:
$f(0) = 0$; $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$

Allora:
$$|f(z)| \leq |z| \text{ per } |z| < 1$$
Se esiste uno $z_0 \neq 0$ per cui vale $|f(z_0)| = |z_0|$ allora $f(z) = \lambda z$ e $|\lambda| = 1$

Idea:
Sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare.
Stime di Cauchy.
Singolarità rimuovibili, poli e singolarità essenziali di una funzione olomorfa.

Definizione (Sviluppo in serie di Laurent):
Una funzione $f(z)$ definita in una corona circolare $\rho_2 < |z| < \rho_1$ si dice che ammette uno sviluppo in serie di Laurent se esiste una serie di Laurent $\sum a_n z^n$ che converge nella corona circolare e la cui somma sia uguale ad $f(z)$ in ogni punto della corona.

Teorema:
Una funzione olomorfa in una corona circolare ammette uno sviluppo in serie di Laurent.

Serie di Laurent (Di $f(z)$ in c):
$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-c)^n$
$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}}$ con γ curva semplice chiusa nella corona circolare.

Disuguaglianza di Cauchy:
Se $M(r)$ indica la limitazione superiore di $|f(z)|$ per $|z| = r$ allora vale:
$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ con n intero ≥ 0 o < 0

Data una funzione analitica nel disco privo dello 0, quando questa funzione può essere estesa ad una olomorfa su tutto il disco? (Per il principio della continuazione analitica se estendibile è unica)

Proposizione:
Una condizione necessaria e sufficiente per estenderlo è che la funzione sia limitata in qualche intorno di 0.

Definizione (Singolarità isolata):
Data una funzione olomorfa sul disco privo dell'origine si dice che lo 0 è una singolarità isolata se la funzione non è estendibile all'intero disco.

Condizione necessaria e sufficiente affinché 0 sia una singolarità isolata è che i coefficienti a_n della serie di Laurent non siano tutti nulli per $n < 0$.

Ci sono due casi possibili:
Numero finito di interi $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$. **(Polo)**
In questo caso esiste un valore m positivo tale che $z^m f(z)$ sia una funzione olomorfa in qualche intorno dell'origine. Dunque $f(z)$ è meromorfa nell'origine.

Numero infinito di interi $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$. **(Singolarità essenziale)**
La funzione $f(z)$ non è meromorfa in un intorno dell'origine.

Idea:
Residui.
Formula dei residui.
La somma dei residui di una funzione olomorfa sulla sfera di Riemann meno un numero finito di punti è 0.
Derivata logaritmica.
Numero di zeri e poli di una funzione meromorfa su $P1(C)$.

Teorema dei residui:

Sia D un aperto della sfera di Riemann S^2 ed f una funzione olomorfa in D eccetto alcuni punti isolati che sono le singolarità di f.
Sia T il bordo orientato di un sottoinsieme compatto A di D e supponiamo che T non passi attraverso nessuna singolarità di f o per il punto all'infinito.

Allora solo un numero finito di singolarità z_k sono contenute in A e vale:

$$\int_T f(z)dz = 2\pi i(\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k))$$

Dove $\mathrm{Res}(f, z_k)$ denota il residuo.

Calcolo del residuo:

Caso di un semplice polo (Non infinito):

Sia z_0 il polo di f.
Allora $f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z)$ con g olomorfa in un intorno di z_0.

Scriviamo la serie di Laurent:

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Allora:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} (z - z_0) f(z)$$

Osservazione:
Se $f = \frac{P}{Q}$ vale:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Esempio:
$f = \frac{e^{iz}}{z^2+1} \to \frac{P}{Q'} = \frac{e^{iz}}{2z}$ e nel polo i il residuo vale $-\frac{i}{2e}$

Caso di poli multipli:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z)$$

Si deve quindi calcolare uno sviluppo di Taylor di $f(z)$ fino al coefficiente $(z - z_0)^{k-1}$

Idea:

Il teorema dei residui fornisce un metodo per calcolare un integrale curvilineo (Su di una curva chiusa) di una funzione complessa.
Dunque se con una sostituzione siamo capaci di trasformare la funzione integranda in una complessa di cui sappiamo studiare i residui possiamo utilizzare la formula fornita per valutare il residuo in tutti i poli interni al cammino descritto e da questo ottenere il valore dell'integrale.

Categorie:

Non esiste una regola generale per applicare il metodo dei residui, vado dunque ad elencare alcune dei casi in cui è codificato come ottenere la soluzione.

Primo tipo:

$I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t)\,, \cos(t))dt$; $R(x, y)$ è una funzione razionale senza poli sulla circonferenza unitaria.

Svolgimento:

Sia $z = e^{it}$, allora I è $2\pi i$ volte il residuo della funzione:
$\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{z}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$

Ossia:

$I = 2\pi \sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\right)$ La sommatoria è estesa a tutti i poli contenuti nella circonferenza unitaria.

> ***Esempio:***
> $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin(t)}\ ; a \in \mathbb{R}\,; a > 1$
> $I = 2\pi \sum \operatorname{Res}\left(\frac{2i}{z^2+2iaz-1}\right)$
> L'unico polo contenuto nel disco unitario è:
> $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ calcolandone il residuo otteniamo:
> $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

Secondo tipo:

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$; $R(y)$ è una funzione razionale senza poli reali.

Passo 1:

Verificare che l'integrale sia convergente, condizioni necessarie e sufficienti sono:

La parte principale di $R(x)$ all'infinito ha lo stesso comportamento di $\frac{1}{x^n}$; $n \geq 2$

$\lim_{|x|\to\infty} xR(x) = 0$

Passo 2:

L'integrale va calcolato sul semicerchio positivo di raggio r percorso in verso antiorario.

Per r abbastanza grande la funzione $R(z)$ è olomorfa e vale:

$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\partial(r)} R(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(R(z)\big)$ con $\partial(r)$ il semicerchio superiore.

Passo 3:

Siccome il secondo termine tende a 0 vale:

$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(R(z)\big)$

$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(R(z)\big)$

Considerando rispettivamente i residui nel semicerchio superiore e in quello inferiore.

A seconda di dove è più facile calcolare i poli usiamo una delle due formule.

Esempio:

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

I 6 poli della funzione sono tutti sul cerchio unitario. I tre del semipiano positivo sono:

$e^{i\frac{\pi}{6}}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Il residuo in questi poli è: $\frac{1}{6z^5} = -\frac{z}{6}$

Dunque $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = \frac{\pi}{3}$

<u>Terzo tipo:</u>

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$

Proposizione:

Se $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ per $y \geq 0$ allora:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(f(z), e^{iz}\big)$ con il residuo calcolato nei poli di $y \geq 0$

Osservazione:

Nel caso in cui ci sia un polo sull'asse delle x questo risultato non è più valido.
Dobbiamo quindi "evitare" il polo saltandolo con un semicerchio nel semipiano positivo.
Nel caso in cui un polo sia proprio nell'origine vale la seguente proposizione.

Proposizione:

Se $z = 0$ è un polo semplice allora l'integrale calcolato sul semicerchio tende a $\pi i \mathrm{Res}(g, 0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\, dz = \pi i \mathrm{Res}(g, 0)$$

Esempio:

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\mathrm{t}\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-t} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_t^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right)$

Ma $\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz\right) = \frac{\pi}{2} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \frac{\pi}{2}$

Osservazione:

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}dx$ si calcola nello stesso modo considerando solo i poli nel piano $y \leq 0$

Quarto tipo:

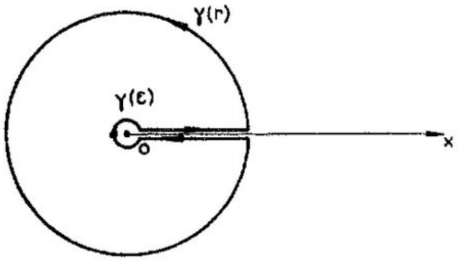
$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^a} dx$; $0 < a < 1$; $R(x)$ funzione razionale senza poli sul semiasse positivo $x \geq 0$

Condizione necessaria e sufficiente:

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$$

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{R(z)}{z^a}$

Calcoliamo l'integrale su:



Ottenendo la relazione:

$$\left(1 - e^{-2i\pi a}\right) I = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right)$$

Esempio:

$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)}$ allora $R(z) = \frac{1}{1+z}$ con unico polo $z = -1$

Il residuo nel polo è $\frac{1}{e^{\pi i a}}$ allora:

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

<u>Quinto tipo:</u>

$\int_0^{+\infty} R(x)\log(x)\,dx$

Condizioni:

$R(x)$ funzione razionale senza poli sull'asse $x \geq 0$

$\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$

Consideriamo lo stesso insieme del quarto tipo.

Relazione:

$\int_0^{+\infty} R(x)\log(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\sum \operatorname{Res}(|R(z)(\log z)^2|))$

$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}(\sum \operatorname{Res}(|R(z)(\log z)^2|))$

Esempio:

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(1+x)^3}\,dx$

Il residuo di $\frac{(\log(x))^2}{(1+x)^3}$ nel polo $z = -1$ è uguale al coefficiente di t^2 nell'espansione di $(i\pi + \log(1-t)^2)$ ed è dunque $1 - i\pi$

Di conseguenza $I = -\frac{1}{2}$