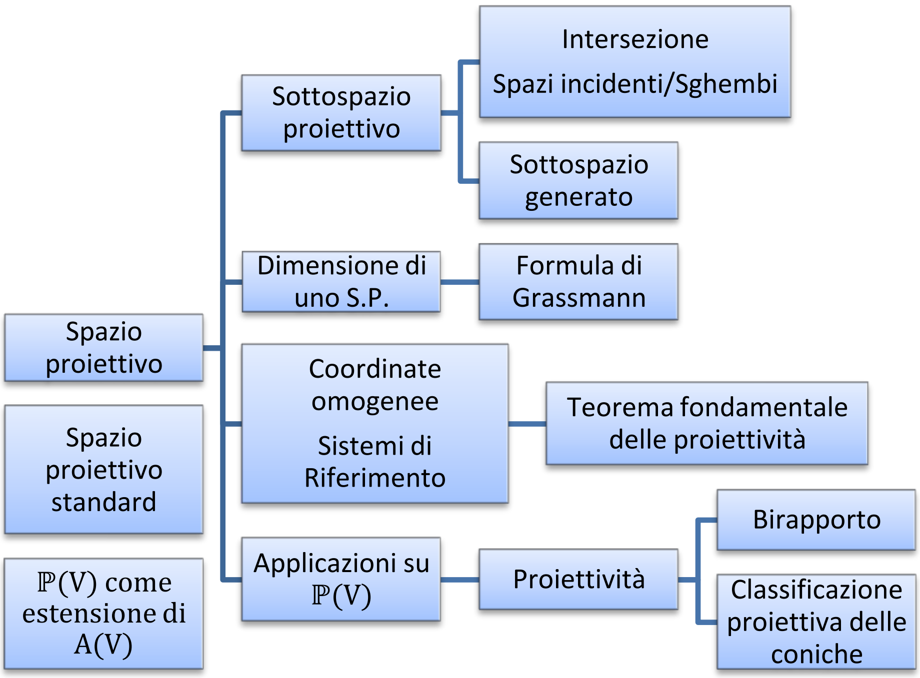
<u>Capitolo IV:</u>

Spazi proiettivi

Giulio Del Corso

Indice:



Spazio proiettivo
Spazio proiettivo standard
$\mathbb{P}(V)$ come estensione di $A(V)$
Sottospazio proiettivo
Intersezione
Spazi incidenti/Sghembi
Sottospazio generato
Dimensione di uno S.P.
Formula di Grassmann
Coordinate omogenee
Sistemi di Riferimento
Teorema fondamentale delle proiettività
Applicazioni su $\mathbb{P}(V)$
Proiettività
Birapporto
Classificazione proiettiva delle coniche

Definizione (Spazio Proiettivo):

Sia V un K-spazio vettoriale | $\dim V = n + 1$ allora lo Spazio Proiettivo ad *n* dimensioni associato a V è:

$\mathbb{P}(V) = {}^{V\setminus\{0_V\}}/_{\sim}$ con

$x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \mid x = \lambda y$

Osservazione:

Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ si dicono punti e $[v]$ è il rappresentante della classe di equivalenza $[v] = \{\lambda v \mid \lambda \in K^*\}$

Osservazione (Spazio proiettivo standard):

$$\mathbb{P}(K^{n+1}) \coloneqq \mathbb{P}^n(K) = {}^{K^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim}$$

Notazione:

$\mathbb{P}^1(K)$; $\mathbb{P}^2(K)$; $\mathbb{P}^3(K)$ sono detti rispettivamente retta, piano e spazio proiettivo.

Definizione (Sottospazio proiettivo):

Dato $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo allora $\mathbb{P}(W)$ si dice sottospazio proiettivo se W è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione (Intersezione):

Siano $H_1 = \mathbb{P}(W_1)\, ; H_2 = \mathbb{P}(W_2) \rightarrow H_1 \cap H_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$

Definizione(Incidenti/Sghembi):

$\mathbb{P}(W_1)$; $\mathbb{P}(W_2)$ si dicono **incidenti** se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ altrimenti si dicono **sghembi**.

Osservazione:

$\mathbb{P}(W_1)$; $\mathbb{P}(W_2)$ sono sghembi $\leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Definizione (Sottospazio generato):

Dato $S \subseteq \mathbb{P}(V)\, ; S \neq \emptyset$ il sottospazio proiettivo generato da S $\big(L(S)\big)$ è l'intersezione tra tutti i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ contenenti S.

Osservazione:

Se $H_1 = \mathbb{P}(W_1)\, ; H_2 = \mathbb{P}(W_2) \rightarrow L(H_1, H_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

Esempio:

Se $P_1 = [v_1]\, ; P_2 = [v_2]$ allora $L(P_1, P_2) = \mathbb{P}(\langle v_1, v_2 \rangle)$ si dice retta congiungente i due punti $P_1\, ; P_2$ (Dal punto di vista dello spazio vettoriale associato è l'intero piano su cui giacciono i vettori v_1 e v_2.

Osservazione:
L'intersezione fra spazi proiettivi è uno spazio proiettivo.

Definizione (Dimensione di uno spazio proiettivo):

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$$

Formula di Grassmann proiettiva (DP1):

Siano H_1 ; H_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora:

$$\dim L(H_1, H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Sistema di coordinate omogenee:

Scegliere una base $B = (v_1, \dots, v_n)$ di V mi permette di descrivere ogni $v \in V$ come $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ le coordinate $(a_1, \dots, a_n)$ sono dette coordinate omogenee di $[v] \in \mathbb{P}(V)$

Osservazione:

Sono determinate a meno di costante moltiplicativa $\lambda \in K^*$

Quindi $(a_1, \dots, a_{n+1}) = (b_1, \dots, b_{n+1}) \leftrightarrow a_i = \lambda b_i$, $\lambda \in K^*$

Riferimenti proiettivi:

$R = (P_0, \dots, P_n, U)$ di punti in posizione generale è un riferimento proiettivo (Equivalente alla base su di uno spazio vettoriale).

I P_i sono detti **punti fondamentali**.

U è detto **punto unità**.

Osservazione:

Leggendo in coordinate otteniamo:

$$[P_0]_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [P_n]_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; [U]_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Domanda:

Come si rappresenta un generico punto?

Dato P scegliamo un rappresentante $[v]$ e dato un sistema di riferimento proiettivo scriviamolo come combinazione lineare dei rappresentanti dei punti fondamentali. Qui è il ruolo del punto unità che garantisce l'invarianza dei rapporti fra i rappresentanti dei punti fondamentali.

$$\begin{cases} v = x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \\ \lambda u = v_0 + \dots + v_n \end{cases}$$

Le coordinate proiettive saranno la $(n+1)$-upla $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Osservazione:

Ogni base di uno spazio vettoriale mi induce un riferimento proiettivo standard, basta scegliere i punti come i rappresentanti dei vettori di base e il punto unità come la somma. (Questo viene detto **sistema di riferimento indotto**)

Ricordarsi:

Le coordinate associate ad un riferimento proiettivo coincidono a meno di costante:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Quindi due basi di V inducono lo stesso riferimento proiettivo se e solo se coincidono a meno di costante moltiplicativa

Notazione:
Una $(n+1)$-upla di punti di $\mathbb{P}(V)$; $\dim V = n+1$ si dice in **posizione generale** se i rappresentanti sono linearmente indipendenti. Se sono più di $(n+1)$ significa che presi $n+1$ rappresentanti qualsiasi sono linearmente indipendenti.

Proposizione (Cambiare sistema di riferimento):

Siano R_1 ; R_2 riferimenti in $\mathbb{P}(V)$.
Allora esiste una matrice $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K^{n+1})$ individuata a meno di un coefficiente moltiplicativo non nullo | se $[P]_{R_1} = X$ allora $[P]_{R_2} = AX$

Osservazione:
Fissare dei riferimento proiettivo significa fissare un isomorfismo proiettivo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \to^{\phi_{R_1}} & \mathbb{P}^n K) \\ \downarrow^{\phi_{R_1}} & \swarrow & \\ \mathbb{P}^n(K) & & \end{array}$$

Sommare due punti:

Fissato un sistema di riferimento proiettivo la notazione $P = P_1 + P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ indica la somma fra due punti di uno spazio proiettivo.

Attenzione:
Vogliamo che questa somma determini un punto di $\mathbb{P}(V)$ ma siccome possiamo scegliere il rappresentante a meno di coefficienti $\lambda \in K^*$ otterremo $[v_1] + [v_2] \neq [v_1] + [\lambda v_2] \to$ non è una buona definizione.

Ruolo del punto unità:
Il punto unità serve a privilegiare i rappresentanti. Ogni somma di punti deve rispettare la condizione che $[v_1] + \cdots + [v_n] = [u]$. In pratica fissa i rapporti con cui possiamo prendere i rappresentanti.
Potremmo dunque moltiplicare entrambi per una stessa costante ma non per costanti diverse.

Applicazioni su $\mathbb{P}(V)$:
Sono le applicazioni lineari su V quozientate rispetto a $\sim$

Definizione (Trasformazione proiettiva):

$f: \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ è detta una trasformazione proiettiva se $\exists \varphi: V_1 \to V_2$ lineare iniettiva | $f = \bar{\varphi}$

In pratica f agisce sulle classi di equivalenza: $f([v]) = [\varphi(v)]\ \forall v \in \mathbb{P}(V_1)$

Osservazione (DP2):
Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.

Definizione (Isomorfismo proiettivo):

Un isomorfismo proiettivo è una trasformazione proiettiva indotta da un isomorfismo vettoriale.

Una **proiettività** è un isomorfismo proiettivo da uno spazio in se.

Osservazione:
Iniettiva serve ad evitare che nel caso in cui io prenda combinazioni di punti appartenenti al $\ker$ non i modifichi il risultato.

Definizione (Gruppo lineare proiettivo):

$\mathrm{PGL}(\mathbb{P}(V)) = \{\text{proiettività}\}$

Osservazione:
Le proiettività sono identificate da matrici invertibili considerate a meno di coefficienti moltiplicativi.

Proposizione (DP3):
Sia $f \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}(V))$ e $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ | $f = \bar{\varphi}$.
Allora le funzioni $g \in \mathrm{GL}(V)$ che inducono f sono tutte e sole della forma $\lambda \cdot \varphi$ con $\lambda \in K$ campo di V

Corollario:
$\mathrm{PGL}(\mathbb{P}(V)) = {}^{\mathrm{GL}(V)}/_{\sim}$ e in particolare $\mathrm{PGL}(\mathbb{P}^n(K)) = {}^{\mathrm{GL}(K^{n+1})}/_{\sim}$

Definizione (Punto fisso).

Sia $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività. $P \in \mathbb{P}(V)$ si dice punto fisso se $f(P) = P$

Osservazione:
Se $f = \bar{\varphi}$; $P = [v]$ allora P è un punto fisso $\leftrightarrow$ v è un autovettore per φ.

Osservazione:
Se *n* è pari tutte le proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$ hanno almeno un punto fisso.

<u>**Teorema fondamentale delle proiettività (DP4):**</u>

Se $\{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$; $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}\}$ sono due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ allora $\exists!$ Proiettività $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) \mid f(P_i) = Q_i$

Equivalente:

$\mathrm{PGL}\big(\mathbb{P}(V)\big)$ è transitivo sui riferimenti proiettivi.

Proiettività che fissano una carta:

Sia $f: \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ una proiettività e $A \in PGL(n+1, K) \mid f(x) = Ax$

Quando accade che $f(U_0) = U_0$ carta?

La matrice A sarà del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ B & & C & \\ & & & \end{bmatrix} ;\ \lambda \in K^*$$

Ponendo $\lambda = 1$ vale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ B & & C & \\ & & & \end{bmatrix} \text{ e } C \in PGL(n, K)$$

Consideriamo allora un punto $X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U_0$

Allora: $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \end{pmatrix}$.

Perciò le proiettività che fissano una carta ristrette ad U_0 sono affinità.

Dunque $\mathrm{Aff}(n, K)$ è isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{PGL}(n, K)$ delle matrici che fissano una carta (O equivalentemente l'iperpiano dei punti all'infinito).

Notazione (Carta - atlante):

Sia $\forall i$ E_i l'insieme dei punti che hanno i-esima coordinata nulla, l'iperpiano dei punti impropri di coordinata i-esima.

La **carta affine** $A_i^n(K)$ su $\mathbb{P}^n(K)$ è il sottospazio complementare ad E_i

Si dice affine in quanto, oltre alle coordinate omogenee date dal sistema di riferimento proiettivo, ogni punto può essere rappresentato mediante coordinate affini relative ad i.

$\{A_1^n(K), \dots, A_n^n(K)\}$ è detto **Atlante.**

Classificazione delle proiettività di $\mathbb{P}^1(K)$:

In un opportuno sistema di coordinate è sempre possibile rappresentare la proiettività come una delle seguente matrici:

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda, \mu \neq 0$

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

Se $K = \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\beta \neq 0$ (Forma di Jordan reale)

Birapporto:

Idea:

In $\mathbb{P}^1(K)$ il teorema fondamentale delle proiettività ci garantisce che prendendo due terne di punti in posizione generale esiste sempre una proiettività che me li associ.

Ci domandiamo se sia possibile individuare una proprietà che valga ancora su due quaterne di punti.

Definizione (Birapporto):

Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti di $\mathbb{P}^1(K), \forall P_4 \in \mathbb{P}^1(K)$ si definisce birapporto di P_1, P_2, P_3, P_4 $\left(\beta(P_1P_2P_3P_4)\right)$ il numero:

$\frac{y_1}{y_0} \in K \cup \{\infty\}$

Dove $[y_0, y_1]$ sono le coordinate omogenee di P_4 prendendo come riferimento proiettivo la terna P_1, P_2, P_3 con P_3punto unità.

Osservazione:

Il birapporto dipende dall'ordine con cui consideriamo la quaterna.

Proposizione:

$\beta(ABCD) = \beta(BADC) = \beta(CDAB) = \beta(DCAB)$

Teorema:

Siano $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive. Siano $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \subseteq \mathbb{P}(V)$; $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \subseteq \mathbb{P}(V')$.

Allora $\exists!$ isomorfismo proiettivo $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V') \mid f(P_i) = Q_i \leftrightarrow \beta(P_1P_2P_3P_4) = \beta(Q_1Q_2Q_3Q_4)$

Definizione (Proiezione sghemba):

Siano H, K sottospazi proiettivi disgiunti di $\mathbb{P}^n(V)$ con $\dim H = h$, $\dim K = k$, $h + k = n$, allora definiamo come proiezione sghemba la funzione surgettiva:

$\varphi: \mathbb{P}^n(V) \backslash H \to K \mid [v] \to [\pi_K(v)]$ con π_K la proiezione canonica su K.

Proposizione iperpiani:

Sia $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ e consideriamo $a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n$ l'equazione omogenea associata.
Il luogo di zeri di questa equazione è un iperpiano (Ossia $\operatorname{Span}(P_{k_0}, \dots, P_{k_{n-1}})$)
Viceversa ogni iperpiano è il luogo di 0 di un'equazione di questo tipo.
Inoltre $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ e $\sum_{i=0}^{n} b_i x_i$ hanno lo stesso iperpiano associato (luogo di 0) $\leftrightarrow a_i = \lambda b_i$ con $\lambda \in K^*$

Equazioni parametriche e cartesiane:

Se $\dim \mathbb{P}(w) = h \to \dim w = h + 1$ allora w è dato dall'insieme dei vettori che soddisfano un sistema lineare di $(n - h)$ equazioni linearmente indipendenti (Con V spazio vettoriale di dimensione n).
Dunque possiamo caratterizzare il sottospazio proiettivo come:

$$\mathbb{P}(w) = \left\{ [x_0, \dots, x_n] \mid \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-h,0}x_0 + \cdots + a_{n-h,n}x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Queste equazioni sono dette **equazioni cartesiane** di $\mathbb{P}(w)$

Spazio Duale:

Sia V un K-spazio vettoriale e V^* il suo duale.
Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^*(V) \coloneqq \mathbb{P}(V^*)$ è detto spazio proiettivo duale.

Osservazione:

L'isomorfismo fra V e V^* induce un isomorfismo proiettivo fra $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}^*(V)$

Dunque $\varphi: \mathbb{P}^*(V) \to \mathrm{I}(\mathbb{P}(V)) \mid [L] \to [\ker L]$ è un isomorfismo fra elementi del duale proiettivo e gli iperpiano del proiettivo.

Notazione:

$L = a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n \in V^*$ allora $[L] = [a_0, \dots, a_n]$

$\mathbb{P}^n(K)$ come ampliamento di $A^n(K)$:

Nello spazio affine $A^3(K)$ ogni oggetto può essere descritto mediante le coordinate cartesiane (x, y, z) da cui possiamo ricavare le coordinate omogenee $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x = \frac{x_1}{x_4}\ ; y = \frac{x_2}{x_4}\ ; z = \frac{x_3}{x_4}$.
A^3 può quindi essere visto come l'insieme delle quaterne omogenee (Ossia definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 \neq 0$.

Vogliamo aggiungere i punti | $x_4 = 0$ ed eliminiamo il caso $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Dato $H_\infty = \{x_4 = 0\}$ (Detto insieme dei punti impropri o **punti all'infinito**) l'insieme $A^3(K) \cup H_\infty$ è un modello dello spazio proiettivo.

Studio su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

Siano $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli. Allora l'insieme:
$\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$ è detta **retta proiettiva** di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Osserviamo che non coincide con la retta su $\mathbb{R}^2$ $\left(a_0 \frac{x_0}{x_2} + a_0 \frac{x_1}{x_2} + c = 0\right)$ di cui è generalizzazione in quanto la proiettiva permette di azzerare la terza coordinata x_0 aggiungendo i punti all'infinito.
Ne è piuttosto la **chiusura proiettiva**.

Le rette $H_0 = \{x_0 = 0\}; H_1 = \{x_1 = 0\}\ ; H_2 = \{x_2 = 0\}$ sono dette **rette fondamentali**.

Coniche e classificazione:

Una conica C di $\mathbb{R}^2$ può essere studiata sul piano proiettivo.

Attenzione:

Questa frase può volere dire due cose completamente distinte.

Caso 1: Studiare le coniche proiettive, ossia i luoghi di 0 di equazioni di secondo grado a meno di proiettività

Caso 2: Studiare le coniche affini di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$) sfruttando la chiusura proiettiva della conica.

Caso 1:

Consideriamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$

Definizione (Conica proiettiva):

Una conica proiettiva C di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è una classe di proporzionalità $[P(x_0, x_1, x_2)]$ dove $P(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di 2° della forma:

$P(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + 2fx_1x_2$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.

L'equazione $P(x_0, x_1, x_2)$ è detta **equazione cartesiana** della conica e il luogo dei punti che la soddisfano ne è detto il **supporto**.

Idea:

Le vogliamo classificare a meno di proiettività.

Tabella fondamentale per la classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

	Equazione	Rango	Segnatura	Denominazione
(1)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	$(3,0)$	Conica generale a punti non reali
(2)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	$(2,1)$	Conica generale a punti reali
(3)	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	$(2,0)$	Conica semplice degenere puntiforme
(4)	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	$(1,1)$	Conica semplice degenere
(5)	$x_0^2 = 0$	1	$(1,0)$	Conica doppiamente degenere

Supporto **(1)**: $\emptyset$

Supporto **(2)**: Curva di infiniti punti non singolari per C

Supporto **(3)**: Solo il punto $[0,0,1]$

Supporto **(4)**: Coppia di rette proiettive incidenti

$x_0 - x_1 = 0\,;\, x_0 + x_1 = 0$

Supporto **(5)**: La retta fondamentale $x_0 = 0$ (contata con molteplicità 2)

Osservazione:

Le coniche riportate in tabella sono due a due non proiettivamente equivalenti.

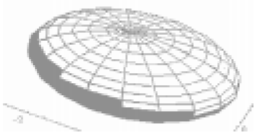
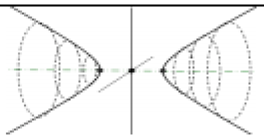
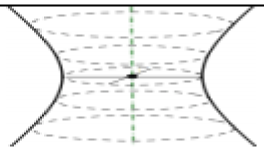
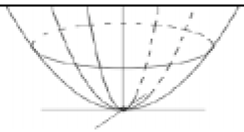
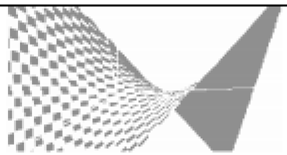
Notazione:

Queste coniche sono dette in Forma canonica proiettiva.

Teorema:

Ogni conica C di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è affinemente equivalente ad una e una sola fra le forme canoniche proiettive.

Quindi per classificare una conica C è sufficiente stabilirne il rango e la segnatura.

tipo	classificazione	prototipo	punti	figura
a centro	ellissoide immaginario	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$	ø	ø
a centro	ellissoide reale	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	ellittici	
a centro	iperboloide a due falde	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	ellittici	
a centro	iperboloide a una falda	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	iperbolici	
Non a centro	paraboloide ellittico	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	ellittici	
Non a centro	paraboloide iperbolico	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	iperbolici	

Caso 2:

Premessa:

L'idea è sfruttare il fatto che ogni trasformazione affine può essere vista come una particolare proiettività che lasci invariati i punti all'infinito.
Se ci riconduciamo dunque allo studio dei punti all'infinito possiamo classificare molto rapidamente le coniche.

> **Attenzione:**
> La classificazione è a meno di affinità, non di proiettività.
>
> **Attenzione:**
> Studiando solo i punti all'infinito perdiamo alcune informazioni. Secondo questa classificazione alcune classi sono indistinguibili.

Osservazione 1:

Ogni conica in K^2 può essere identificata mediante una matrice simmetrica:
$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \in S(3, K)$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S(2, K) \setminus \{0\}$
Il polinomio omogeneo di secondo grado (Conica) associato a questa matrice sarà:

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f$$

Passo 1:

Consideriamo su $\mathbb{P}^2(K)$ la chiusura proiettiva della conica (Detto anche polinomio omogeneizzato)

$$\tilde{q}(x_0, x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2$$

> **Osservazione:**
> Ponendo $x_0 = 1$ otteniamo la conica di partenza.
> Ponendo $x_0 = 0$ studiamo invece i punti all'infinito della conica.

Passo 2:

Studiamo i punti all'infinito ponendo $x_0 = 0$

$$\tilde{q}(0, x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

> **Osservazione:**
> Sappiamo che $(0,0,0)$ non è una delle soluzioni della conica in quanto non appartiene a $\mathbb{P}^2(K)$, dunque $x_2 \neq 0$

Passo 3:

Individuare i punti all'infinito equivale a risolvere l'equazione di secondo grado:

$$a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + c = 0$$

<u>Conclusione:</u>

Questa equazione può avere:

2 soluzioni reali.	2 soluzione	Classe delle Iperboli
2 soluzioni reali coincidenti.	1 soluzione	Classe delle Parabole
2 soluzioni complesse fra loro coniugate.	0 soluzioni	Classe delle Ellissi

Secondo questa classificazione otteniamo:

Classe delle iperboli:

Iperbole generale $x^2 - y^2 = 1$

Iperbole degenere $x^2 - y^2 = 0$

Classe delle ellissi:

Ellisse generale (a punti reali) $x^2 + y^2 = 1$

Ellisse generale a punti non reali $x^2 + y^2 = -1$

Ellisse degenere $x^2 + y^2 = 0$

Classe delle parabole:

Parabola generale $x^2 = y$

Parabola semplicemente degenere $x^2 = 1$

Parabola semplicemente degenere a punti non reali $x^2 = -1$

Parabola doppiamente degenere $x^2 = 0$

Spazi proiettivi come quozienti topologici:
Gli spazi proiettivi sono quozienti per gruppi di omeomorfismi.
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ può infatti essere visto come ${}^{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{G}$ con G gruppo delle omotetie.

Esempio:
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo ad $X = {}^{D^2}/_{\sim}$ ($x \sim y$ se $x = y$ oppure se $\|x\| = \|y\|$ e $x = -y$) mediante la seguente composizione di omeomorfismi.
Identifichiamo ${}^{S^2_+}/_{\sim}$ la calotta superiore con X mediante l'omeomorfismo $(x, y, z) \to (x, y)$ con $\sim$

che associa i punti al bordo opposti rispetto al centro. Chiamiamo i l'inclusione da S^2_+ in S^2 e π proiezione al quoziente di S^2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Allora il seguente diagramma di funzioni continue è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^2_+ & \to^{i} & S^2 \\ \downarrow^{p} & & \downarrow^{\pi} \\ X & \to^{j} & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Inoltre j è bigettiva e va da un compatto ad un T2, quindi è un omeomorfismo.

Proiettivi complessi:
Gli spazi proiettivi complessi si definiscono in modo analogo a quelli reali:
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \coloneqq {}^{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim} \text{ con } x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid x = \lambda y$$

Equivalentemente:
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \coloneqq {}^{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{G}$ con G il gruppo delle omotetie complesse.

Proposizione:
Gli spazi proiettivi reali e complessi sono spazi topologici connessi, compatti e di Hausdorff.

Osservazione:
Le proiettività sono omeomorfismi.

Esempi interessanti:
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo ad S^1 mediante l'omeomorfismo:
$$[x_0, x_1] \to \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0 \cdot x_1}{x_0^2 + x_1^2}\right)$$
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo ad S^2 mediante l'omeomorfismo:
$$[z_0, z_1] \to \left(\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z_0} \cdot z_1 - \overline{z_1} \cdot z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z_0} \cdot z_1 + \overline{z_1} \cdot z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}\right)$$

Osservazione (Sfera di Riemann):
S^1 dell'esempio precedente è detta Sfera di Riemann (O retta proiettiva) che può essere ottenuta a partite dal Piano di Gauss aggiungendo un punto all'infinito.

Classificazione coniche proiettive $\left(\mathbb{p}^3(\mathbb{R})\right)$:

Rango 4:

$(4,0)\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ Quadrica vuota

$(3,1) - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ Quadrica sferica

(Omeomorfa ad una sfera ; $x_0 = 0$ piano che non la interseca)

$(2,2) - x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ Toro

(Omeomorfa ad un toro)

Rango 3:

Proiezione da un punto di una conica non degenere

Punto isolato se la conica è vuota

Cono sulla conica non degenere diversa da vuota

Rango 2:

Proiettato da una retta una quadrica non degenere su una retta sghemba

Retta se la conica è vuota

Rango 1:

Piano doppio

Completato proiettivo:

Il completato proiettivo di un piano in $\mathbb{R}^3$ è $\mathbb{p}^2(\mathbb{R})$

In generale per ricavare il completato proiettivo di un insieme dobbiamo limitarci ad aggiungere la componente x_0 che divide tutte le altre variabili ed imporla uguale a 0 per determinare l'insieme dei punti all'infinito.

Osservazione (Degenere):

Una quadrica è degenere se non ha rango massimo.