Capitolo III:

Gruppo fondamentale

Giulio Del Corso

Idea:

Questo volume contiene i teoremi e le proposizioni più utilizzate negli esercizi. Non riporto quindi né dimostrazioni né definizioni ma solo proprietà utili ed esempi.

Indice:

Idea:

I retratti per deformazione sono delle funzioni che collassano spazi a loro sottospazi più semplici.
Il $\pi_0(X)$ di uno spazio è l'insieme delle classi di equivalenza dette componenti connesse per archi.
Data la definizione di omotopicamente equivalenti.

Due spazi omotopicamente equivalenti hanno i π_0 in bigezione.
L'equivalenza omotopica si studia mediante retrazione per deformazione.

Due cammini sono omotopicamente equivalenti se sono ottenibili l'uno dall'altro mediante deformazione.

Osservazione:
Diversa da quella prima, stesso nome.

Il gruppo fondamentale si definisce come le classi di equivalenza omotopica di cammini chiusi.

È un gruppo per giunzione.
All'interno della stessa componente connessa per archi è indifferente la scelta del punto iniziale.
Due spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi.

(Componente connessa a componente connessa)

Quindi:
L'omotopia di cammini si usa per definire il gruppo fondamentale, l'omotopia fra spazi per calcolarlo.

Retratti e retratti per deformazione:

Idea:
I retratti servono a semplificare lo studio dell'equivalenza omotopica fra due spazi e di conseguenza i loro gruppi fondamentali.

Definizione (Retratto):

Dato X spazio topologico, $Y \subseteq X$ si dice retratto di X se $\exists\, r: X \to Y$ continua (Detta **retrazione**) $\mid r(y) = y\ \forall y \in Y$

Esempio Retratto:

Date $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ circonferenze tangenti in un punto p allora l'applicazione $r: A \cup B \to A\,; r(x) = \begin{cases} p \text{ se } x \in B \\ x \text{ se } x \in A \end{cases}$ è una retrazione.

La funzione costante da uno spazio topologico in un suo punto è una retrazione, in altre parole far collassare lo spazio ad un suo punto è sempre una retrazione.

Osservazione (Retratto non retratto per deformazione):

In generale un punto non è un retratto per deformazione dello spazio, se lo fosse ogni spazio sarebbe contrattile. $\{3\}$ è un retratto di $]0,1[\, \cup \{2\}$ ma non un suo retratto per deformazione in quanto X non è connesso per archi → non contrattile.

Osservazione connessi:

Se si sta costruendo una retrazione di uno spazio connesso bisogna ricordare che la retrazione è continua quindi preserva alcune proprietà topologiche fra cui la connessione→ retratto deve essere connesso → due punti non sono mai un retratto di un connesso.

Definizione (Retratto per deformazione):

Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ si dice un retratto per deformazione se $\exists\ R: X \times I \to X$ continua (Detta **deformazione**) | $\begin{cases} R(x,0) \in Y\ ; R(x,1) = x\ \ \forall\ x \in X \\ R(y,t) = y\ \ \forall\ y \in Y\ \ \forall\ t \in I \end{cases}$

Osservazione:

Sono qualcosa di molto più raffinato di un semplice retratto perché nella deformazione è descritta l'intera famiglia di funzioni le cui immagini vanno a costruire un "arco" fra il punto di partenza e quello di arrivo.

Dove è possibile usiamo le retrazioni per deformazioni poiché non solo sono graficamente più intuitive ma preservano classi di omotopia di spazi e gruppi fondamentali.

Esempi deformazione:

1. L'unione di due lati di un triangolo è la retrazione del triangolo intero.
2. La sfera S^n è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
3. $\{0\}$ è un retratto per deformazione di $[0,1]$
4. $\mathbb{R}^3 \setminus r$ ha come retratto per deformazione S^1, basta considerare un piano perpendicolare alla retta r, proiettare $\mathbb{R}^3 \setminus r$ sul piano, ci siamo ridotti al caso S^1 retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$

Proposizione (Retratto per deformazione $\subseteq$ retratto):

Siano X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un suo retratto per deformazione, allora Y è un retratto di X e l'inclusione $i: Y \hookrightarrow X$ è una equivalenza omotopica.

Osservazione spazi stellati:

Ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto ad un punto $p \in A$ può essere retratto a p secondo la retrazione:
$R: A \times I \to A\ ; R(x,t) = tx + (1-t)p$

Pratica:

Uno spazio che è collegato per segmenti ad un suo punto può essere retratto a quel punto, questo vale anche per sottoinsiemi di uno spazio; possiamo retrarre la componente stellata al suo centro e poi cercare ulteriori retrazioni.

Osservazione pratica:

Le retrazioni possono essere definite in maniera diversa in varie parti dello spazio da retrarre.
Ad esempio $S^1 \mathrm{v} S^1$ (Due cerchi con un punto in comune di centro rispettivamente p e q) sono un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ combinando le seguenti retrazioni per deformazione:

1. Proiettiamo tutti i punti esterni ai due cerchi sulla retta passante per il centro dei due cerchi.
2. Collassiamo la parte esterna della retta al punto di incontro con i due cerchi.
3. Proiettiamo la parte interna dei cerchi sul bordo nel seguente modo, ogni punto viene proiettato sul punto di incontro fra la semiretta uscente dal centro e passante per lui con il cerchio che lo contiene.

Esempi di retrazioni per deformazione utili su $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$***:***
Un segmento a vuoto (tentacolo) è retraibile per deformazione ad un punto.
Ogni figura connessa per archi (In particolare una figura piena) è retraibile per deformazione ad un punto.
Ogni figura con dei buchi è retraibile per deformazione al "circuito" che passa fra i buchi.

Funtore $\boldsymbol{\pi_0}$:

$\pi_0(X) = {}^{X}/_{\sim}$ con $x \sim y \leftrightarrow \Omega(X, x, y)_{cammini} \neq \emptyset$

Osservazione:
Le classi di equivalenza si chiamano **componenti connesse per archi**.

Omotopicamente equivalenti:

Idea:
Per determinare quando due spazi sono omotopicamente equivalenti in teoria dovremmo individuare la coppia di funzioni continue la cui composizione è omotopa all'identità il che è in pratica quasi impossibile.

Teorema di collegamento con le componenti connesse per archi:
Se X e Y sono omotopicamente equivalenti allora i $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$.

Pratica:
A maggior ragione hanno lo stesso numero (e tipo) di componenti connesse per archi.

Come individuare gli spazi omotopicamente equivalenti:

Proprietà omeomorfismo:
Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

Proprietà fondamentale (Retratti per deformazione):
Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un suo retratto per deformazione, allora l'inclusione: $i: Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica.

Pratica:
Studiare i retratti per deformazione è come studiare la figura iniziale.

Proprietà per calcolare la classe di omotopia di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$:
Se due figure (Ottenute mediante retrazione per deformazione) sono "simili", allora sono omotopicamente equivalenti.

Esempi:
"simili" $\sim$ omeomorfe.
Un quadrato è omotopicamente equivalente ad un cerchio.

Omotopia di cammini:

Idea:
Serve a definire il gruppo fondamentale ma non è utile per calcolarlo.

Definizione:
$a, b \in \Omega(X, x, y)$ sono cammini omotopicamente se esiste un'applicazione continua $F: I \times I \to X \mid$
$F(t, 0) = a(t), F(t, 1) = b(t) \ \forall\, t$
$F(0, s) = x, F(1, s) = y \ \forall\, s$

Quando due cammini sono omotopi:

1. **Velocità:**
   Ogni cammino su un percorso fissato da x in y è omotopicamente equivalente ad ogni altro dello stesso tipo.
   Equivalente:
   La velocità di scorrimento non cambia la classe di omotopia.

2. **Proprietà associativa**:
   $a * (b * c) \sim (a * b) * c$
   Equivalente:
   È uguale come accorpiamo dei cammini.

3. **Proprietà del triangolo:**
   Dato un triangolo di lati abc, se abbiamo una funzione F che lo parametrizzi su tutti i lati, allora:
   $a \sim b * c$

4. **Fermo e poi muoversi:**
   $(1_x * a) \sim (a * 1_y) \sim a$

5. **Avanti e indietro:**
   $(a * i(a)) \sim 1_x$

6. **Spezzare un cammino:**
   Ogni cammino è omotopicamente equivalente alle spezzate che lo formano.

Gruppo fondamentale (Primo gruppo di omotopia o gruppo di Poincaré):

Idea:
Il gruppo fondamentale è uno dei più forti invarianti per omeomorfismo anche se non è un invariante completo (Lo è per le superfici chiuse).
Si definisce a partire dai cammini omotopicamente equivalenti ma si calcola sfruttando gli spazi omotopi mediante retrazione per deformazione.

Definizione:
$\pi_1(X,x) = {}^{\Omega(X,x,x)}/_{\sim_{eq.om.}}$

Struttura:
$\pi_1(X)$ ha una struttura di gruppo con l'operazione di giunzione:
$[a][b] \coloneqq [a * b]\,;\,[a]^{-1} \coloneqq [i(a)]$
$\Omega(X,x,x)$ sono detti archi chiusi o **lacci**.

In pratica:
Fissato un punto x consideriamo tutti i cammini dal punto in se.
La classe di equivalenza è data dai cammini omotopicamente equivalenti.
In ogni componente connessa per archi la scelta del punto iniziale non è rilevante (π_0)
Quindi se X è connesso per archi si parla allora di $\pi_1(X)$, altrimenti studiamo le singole componenti connesse.

<u>Calcolo di $\pi_1(X)$:</u>

Idea:
Sappiamo calcolare il gruppo fondamentale all'interno di una componente connessa per archi, quindi nel caso in cui X sia connesso per archi.
Non sappiamo studiare il π_1 di uno spazio con più componenti connesse ma siccome per omeomorfismo le componenti connesse vanno in componenti connesse possiamo studiare tutti i gruppi fondamentali e confrontarli.

Per ciascuna componente connessa per archi si applicano le seguenti proprietà.

Proprietà generale omotopia di spazi:
Sia $f: X \to Y$ un'equivalenza omotopica di spazi, allora $\forall\ a \in X$ l'applicazione:
$f_*: \pi_1(X, a) \to \pi_1\big(Y, f(a)\big)$ è un isomorfismo di gruppi.

> **Equivalente:**
> Due spazi omotopi hanno lo stesso gruppo fondamentale (Componente connessa a componente connessa)

Proprietà fondamentale retrazione per deformazione:
$Y \subseteq X$; Y retratto per deformazione di X allora:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$$

> **In pratica:**
> Retrarre per deformazione il più possibile per ricondursi a casi noti.

Prodotto di spazi:
$\pi_1\big(X \times Y, (a, b)\big) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$

> **Caso prodotto connesso per archi:**
> Se $X \times Y$ è connesso per archi:
>
> $$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

Proprietà esaustione compatti:
Siano $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ un'esaustione in compatti di uno spazio topologico X.

> Se K_n è semplicemente connesso per ogni n allora X è semplicemente connesso.
>
> Se $x \in K_1$ e se $\forall\ n$ l'inclusione $K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ induce un isomorfismo $\pi_1(K_n, x) \cong \pi_1(K_{n+1}, x)$ allora ogni inclusione $K_n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $\pi_1(K_n, x) \cong \pi_1(X, x)$

Teorema di Van Kampen:

Idea:
Il teorema di Van Kampen si utilizza quando riusciamo a spezzare il nostro problema in sottospazi connessi per archi.

Ipotesi:
Siano A, B aperti di uno spazio topologico X tali che:

$X = A \cup B$
$x_0 \in A \cap B \neq \emptyset$
$A, B, A \cap B$ connessi per archi.

Definiamo le inclusioni:

$f: A \hookrightarrow X$
$f_*: \pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(X)$

$g: B \hookrightarrow X$
$g_*: \pi_1(B) \hookrightarrow \pi_1(X)$

$a: A \cap B \hookrightarrow A$
$a_*: \pi_1(A \cap B) \hookrightarrow \pi_1(A)$

$b: A \cap B \hookrightarrow B$
$b_*: \pi_1(A \cap B) \hookrightarrow \pi_1(B)$

Osservazione sulle inclusioni non iniettive:
Di base le inclusioni sono iniettive ma nel passaggio al quoziente questa proprietà può perdersi. Perché ad esempio in $a_*: \pi_1(A \cap B) \hookrightarrow \pi_1(A)$ "aggiungendo" gli elementi di A potremmo rendere semplicemente connesso $A \cap B$. In pratica potremmo riempire i buchi di $A \cap B$.

Grafico

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "a_*"] \arrow[dr, "b_*"'] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservazione pratica:
Se stiamo lavorando con dei chiusi dobbiamo prendere degli aperti semplicemente connessi che li "avvolgano" (Ossia quei chiusi ne sono i retratti per deformazione).

A questo punto studiamo gli aperti che hanno lo stesso gruppo fondamentale.

Prima formulazione:

Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di f_* e g_*

Corollario:

Se f_* e g_* sono iniettive (Bisogna effettivamente studiare gli insiemi per verificarla) allora $\pi_1(X, x_0)$ contiene sottogruppi isomorfi a $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$.

Proprietà rapida per dimostrare la semplice connessione:

A, B aperti di $X \mid X = A \cup B$; $A \cap B \neq \emptyset$ e $A, B, A \cap B$ connessi per archi.

Se A e B sono semplicemente connessi allora X è semplicemente connesso.

Formulazione generale (Teorica):

Per ogni gruppo G, date h, k come nel grafico tali che $ha_* = kb_*$, allora $\exists\,!\ \varphi: \pi_1(X, x_0) \to G$ omomorfismo di gruppi che rende il grafico commutativo.

Corollario:

Se b_* è surgettiva allora anche f_* è surgettiva e ha come nucleo il sottogruppo normale generato da $a_*(\ker(b_*))$.

Pratica:

$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle a_*(\ker(b_*))\rangle}$

Osservazione:

Questo corollario è pratico nel senso che è effettivamente possibile (e spesso facile) calcolare $a_*(\ker(b_*))$ e di conseguenza il gruppo da esso generato.

Corollario isomorfismo:

Se b_* è un isomorfismo allora anche f_* lo è.

Pratica:

$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$

Osservazione:

Significa che dobbiamo studiare in maniera esplicita i seguenti gruppi fondamentali:
$\pi_1(A, x_0)$; $\pi_1(B, x_0)$; $\pi_1(A \cap B, x_0)$ e b_*.
Una volta verificato che $\pi_1(B, x_0) \cong \pi_1(A \cap B, x_0)$ e che b_* sia un isomorfismo allora abbiamo ottenuto il gruppo fondamentale.

In pratica significa che se estendiamo $A \cap B$ con uno spazio B che non alteri le classi di omotopia per archi siamo nelle ipotesi del corollario.

Definizione (gruppo libero di un insieme):
Sia S un insieme, un gruppo libero generato da S è il dato di un gruppo F e di un'applicazione $\phi: S \to F$ che gode della seguente proprietà universale:
$\forall$ gruppo H e $\forall\ \Psi: S \to H\ \ \exists!\, \eta: F \to H$ che faccia commutare il grafico.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\phi"] & H \\ F \arrow[ur, "\exists!\eta"] & \end{tikzcd}$$

Osservazione:
Esiste un unico (a meno di isomorfismo) gruppo libero generato da un insieme.

Definizione (Prodotto libero di gruppi):
Sia $\{G_s \mid s \in S\}$ una famiglia di gruppi. Il prodotto libero della famiglia è il dato di un gruppo F e $\forall\ s \in S$ di un omomorfismo $\phi_s: G_s \to F$ che gode della seguente proprietà universale:
$\forall$ gruppo H e $\forall\ \{\Psi_s: G_s \to H \mid s \in S\}$ famiglia di omomorfismi $\exists!\, \eta: F \to H$ che faccia commutare il grafico.

$$\begin{tikzcd} G_s \arrow[r, "\Psi_s"] \arrow[d, "\phi_s"] & H \\ F \arrow[ur, "\exists!\eta"] & \end{tikzcd}$$

Notazione *:
Il prodotto libero di due gruppi G_1 ; G_2 si indica con $G_1 * G_2$

Osservazione:
Ogni famiglia di gruppi possiede il prodotto libero.

<u>Formulazione gruppi liberi (Teorico):</u>

Il nucleo di h è il più piccolo sottogruppo normale contenente tutti gli elementi $\hat{a}(\gamma)\hat{b}(\gamma^{-1})$ con $\gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "a_*"] \arrow[dr, "b_*"'] & \dfrac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{N} \arrow[r, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "inc"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservazione:

$\hat{a}: \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ con $\hat{a} = inc \circ a_*$ e l'inclusione quella che manda nella "prima componente".

Simmetricamente $\hat{b}: \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ con $\hat{b} = inc \circ b_*$

Corollario:

Sia S l'insieme dei generatori di $\pi_1(A \cap B, x_0)$.

Allora $\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{\langle \hat{a}(s)\hat{b}(s^{-1}) \mid s \in S \rangle}$

Osservazione:

Se $\pi_1(A \cap B, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (O più in generale è ciclico) va studiato un solo caso.
Ricordiamo infatti che $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sono omomorfismi di gruppi, quindi almeno l'1 sappiamo sempre dove mandarlo.
Diventa quindi una formulazione utilissima quando $S = \{1\}$, ossia ad esempio se $\pi_1(A \cap B, x_0) \cong \mathbb{Z}$

Corollario (Semplicemente connesso):

Se $A \cap B$ è semplicemente connesso allora:
$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$

<u>Esempi gruppi fondamentali:</u>

Cerchio S^1:
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Sfera unitaria S^n:
$\pi_1(S^n) \cong e$ per $n \geq 2$

$\mathbb{R}^n$ meno un numero finito di punti:
$\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{p_1, \dots, p_2\}) \cong e$ per $n \geq 2$

Spazio proiettivo complesso:
$\pi_1\big(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)\big) \cong e$ per $n \geq 0$

Spazio proiettivo reale:
$\pi_1\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big) \cong \mathbb{Z}_2$ per $n \geq 2$

Un punto:
$\pi_1(\{p\}, p) \cong \pi_1(\{p\}) \cong e$