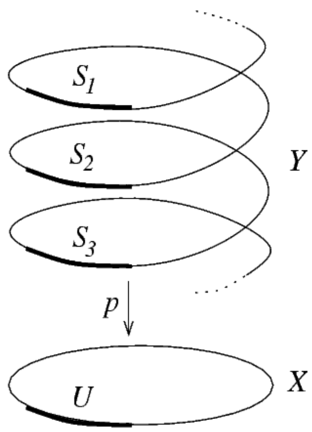
Capitolo II:

Rivestimenti

Giulio Del Corso



Rivestimento:

Un rivestimento è una funzione continua e surgettiva:
$p: E \to X$ (Si dice che E riveste X, connesso e localmente connesso per archi ↔ Connesso per archi)
$\forall\ x \in X\ \exists\ V$ intorno di x aperto e connesso tale che per ogni componente connessa U di $p^{-1}(V)$ vale:
$p_{|U}: U \to V$ è un omeomorfismo.

Osservazione:
p è un omeomorfismo locale.
p ha fibra discreta.

Nomenclatura:
La controimmagine di x è detta fibra.
La cardinalità della fibra non dipende da x ed è detto grado del rivestimento.
Sono detti aperti banalizzanti i V intorni dei punti che soddisfino la condizione di rivestimento.

Rivestimento universale:
Un rivestimento si dice universale se E è semplicemente connesso.

Osservazione:
Rivestimento → omeomorfismo locale.
Viceversa è falso perché dobbiamo garantire che la fibra sia costante.

Equivalente:

$p: E \to X$ è un rivestimento se:
E' un omeomorfismo locale.
I cammini possono essere sollevati.

Osservazione (Cammino sollevato):

γ cammino in X e e punto qualsiasi della fibra di $\gamma(0)$ allora esiste un unico cammino ϑ in E che solleva γ.
(Ossia $p \circ \vartheta = \gamma$ con $\vartheta(0) = e$)

Osservazione (Compatti):
X compatto allora E è compatto se e solo se il rivestimento ha grado finito.

Gruppi fondamentale:
$p: E \to X$ è un rivestimento allora induce una funzione iniettiva $p_*: \pi_1(E, y) \to \pi_1(X, x)$ $\forall x, y$ | $x = p(y)$
Il grado del rivestimento è l'indice del sottogruppo $p_*\big(\pi_1(E, y)\big)$

Esempi di rivestimenti:
$p: \mathbb{R} \to S^1$ | $p(t) = e^{2\pi i t}$

$p: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ | $p(z) = e^z$

$p: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ | $p(z) = z^n$; fibra n

$p: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (Quello su $\mathbb{R}^{n+1}$)

Osservazione:
Rivestimento universale prodotto è il prodotto dei rivestimenti universali.
Se un connesso riveste un semplicemente connesso allora è un omeomorfismo.

Esempio carino:
$S^1 \times S^2$ ha come rivestimento universale $\mathbb{R} \times S^2$, se qualcosa come S^3 rivestisse $S^1 \times S^2$ allora dovrebbe essere omeomorfo all'altro rivestimento universale, da cui l'assurdo.