<u>Capitolo I:</u>

Topologia generale

Giulio Del Corso

Idea:

Questo volume contiene i teoremi e le proposizioni più utilizzate negli esercizi. Non riporto quindi né dimostrazioni né definizioni ma solo proprietà utili ed esempi.

Indice:

Applicazioni continue e Omeomorfismi:

Proprietà utili applicazioni continue:

Connessione: Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.

Compattezza: Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto allora $f(X)$ è un Sottospazio compatto di Y.
Una f continua da uno spazio compatto in uno spazio T_2 è chiusa.

Continua\punto: Se abbiamo $f: X \to Y$ continua allora $f: X \backslash x \to Y \backslash f(x)$ è ancora continua.
Preserva dunque connessione, compattezza, etc.
Serve a dimostrare che due spazi NON sono omeomorfi.

Caratterizzazione omeomorfismo:
Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, sono equivalenti:

1. f è un omeomorfismo.
2. f è chiusa e bigettiva.
3. f è aperta e bigettiva.

Invarianti per omeomorfismo:

Validità degli assiomi di separazione (T_i)
Metrizzabilità
Validità assiomi si numerabilità
Connessione, Connessione per archi e # Componenti connesse (π_0)
Compattezza
Esaustioni in compatti
Separabilità
Classe di omotopia (di spazi)
Gruppo fondamentale

<u>Esempi utili di distanze:</u>

$\forall X$ insieme $d: X \times X \to \mathbb{R}, d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = y \\ 1 \text{ se } x \neq y \end{cases}$

Su $\mathbb{R}^n$, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

Su $\mathbb{R}^n$, $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (**Distanza euclidea**)

Su $\mathbb{R}^n$, $d_\infty(x,y) = max_i\{|x_i - y_i|\}$

$\forall X$ insieme dotato di una distanza d; $\bar{d}: X \times X \to \mathbb{R}, \bar{d}(x,y) = \min\big(1, d(x,y)\big)$ (**Limitazione standard**)

Dato (X,d) spazio metrico e $Z \subseteq X$ la **distanza dal sottoinsieme** è: $d_Z(x) = \inf_{z \in Z} d(x,z)$

Topologia prodotto:

Su $P \times Q$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue entrambe le proiezioni.

Costruire una topologia prodotto:

I sottoinsiemi della forma $U \times V$ al variare di al variare di U, V fra gli aperti di P, Q formano una base (Canonica) della topologia prodotto.

Proiezioni e applicazioni continue:

Le proiezioni p, q sono applicazioni aperte (e non chiuse) e $\forall\ (x, y) \in P \times Q$ le restrizioni $p: P \times \{y\} \to P, q: \{x\} \times Q \to Q$ sono omeomorfismi.
Un'applicazione $f: X \to P \times Q$ è continua $\leftrightarrow$ le sue componenti $f_1 = pf, f_2 = qf$ sono continue.

Esempio:
Su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la topologia prodotto è quella generata dalla base $\{]a, b[\times]c, d[; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ che sebbene generi la normale topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ gli elementi della base sono rettangoli.

Proprietà:

Prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.
Prodotto di spazi compatti è compatto.
Il prodotto di spazi localmente connessi è localmente connesso.

Spazi di Hausdorff

Caratterizzazione equivalente:
Punti distinti ammettono intorni disgiunti.

Proposizione per verificare che sia di Hausdorff:
Uno spazio topologico è di Hausdorff ↔ la diagonale è chiusa nel prodotto.

> **Osservazione:**
> La diagonale è:
> $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$

Proprietà:
In uno spazio di Hausdorff i sottoinsiemi finiti sono chiusi.
Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.
Ogni spazio metrico è di Hausdorff.

<u>Connessione:</u>
Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici insiemi aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X.

Proprietà pratiche equivalenti:
X è sconnesso.
X è unione disgiunta di due intervalli aperti propri.
X è unione disgiunta di due intervalli chiusi propri.

> **Proposizione:**
> Per dimostrare che è uno spazio è connesso o si sfrutta la connessione per archi oppure si nega la proposizione precedente, dati A, B aperti che ricoprono lo spazio è assurdo che siano disgiunti.

Proposizione:
Siano X uno spazio topologico ed $A \subset X$ sottoinsieme aperto e chiuso, allora $\forall\ Y \subset X$ connesso vale:
$Y \subset A$ o $Y \cap A = \emptyset$

Unione di connessi:
Siano A, B sottospazi connessi di uno spazio topologico, se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $A \cup B$ è connesso.

> **Corollario:**
> Sia A_i una famiglia numerabile di connessi | $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, allora $\bigcup_i A_i$ è connessa.

<u>Componenti connesse:</u>

Proprietà:

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse.
Ogni componente connessa è chiusa.
Ogni punto è contenuto in una ed una sola componente connessa.

Applicazioni continue e Omeomorfismi:

Un omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse.
Due spazi omeomorfi devono avere lo stesso numero di componenti connesse.

Compattezza:

Invarianza per funzioni continue:
Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto allora $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y.

Compatto in T2:
Una f continua da uno spazio compatto in uno spazio T_2 è chiusa.
Quindi se bigettiva è un omeomorfismo.

Proposizione (Base e compattezza):
Sia B una base di uno spazio topologico X, se ogni ricoprimento di X fatto con elementi di B ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

Sottospazi, unioni e prodotti di compatti:
Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
Unione finita di sottospazi compatti è compatta.
Prodotto di spazi compatti è compatto.

Equivalenza:
Per uno spazio topologico X a base numerabile le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. X è compatto.
2. Ogni successione in X possiede punti di accumulazione.
3. X è compatto per successioni.

Studio su $\mathbb{R}$:
Un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto $\leftrightarrow$ chiuso e limitato.
(**Weierstrass**) Sia X spazio topologico compatto, allora ogni funzione continua $f: X \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.

Esaustione in compatti:
Di uno spazio topologico X è una successione di sottospazi compatti $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ |

1. $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}\ \forall n$
2. $\cup_n K_n = X$

Osservazione:
Un omeomorfismo $f: X \to Y$ manda un'esaustione in compatti $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di X in un'esaustione in compatti $\{f(K_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ di Y.

Proprietà:
X spazio topologico, $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sua esaustione in compatti e $H \subseteq X$ compatto.
Allora $\{K^{\circ}{}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto → $\exists m \mid H \subseteq K_m{}^{\circ} \subseteq K_m$

Osservazione pratica:
Usando le due proprietà precedenti è possibile dimostrare che due spazi topologici non sono omeomorfi (Ad esempio $\mathbb{R} \times [0,1]$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$).
Il sistema è il seguente:
1. Si individua un compatto che sconnetta uno dei due spazi (In questo caso $\{0\} \times [0,1]$)
2. Si costruisce un'esaustione in compatti che preservi la connessione (Su entrambi gli spazi a meno di omeomorfismo)
3. Si individua l'indice per il quale il nostro compatto appartenga all'esaustione e si mostra che l'omeomorfismo non preserva la connessione.

Esempi di topologie utili:

Topologia Euclidea:
È la topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla distanza euclidea.

Proprietà:
Le palle aperte sono una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$
La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$.

Topologia di Sorgenfrey (Retta di Sorgenfrey):
Su $\mathbb{R}$ e gli aperti sono gli intervalli semiaperti $[a, b[$

Proprietà:
Questa topologia è più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ in quanto $]a, b[= \cup_{c>a} [c, b[$

Topologia discreta:
Su un insieme X gli aperti sono $T = P(X)$.

Proprietà:
Nessun sottoinsieme proprio è denso.

Topologia indiscreta:
Su un insieme X gli aperti sono $T = \{X, \emptyset\}$.

Proprietà:
Ogni sottoinsieme non vuoto è denso.

Topologia della semicontinuità superiore:
Su $\mathbb{R}$ gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $]-\infty, a[$ al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Topologia Cofinita:
Su un insieme X è quella in cui un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso $\leftrightarrow$ $C = X$ o C è finito.

Proprietà:
Ogni sottoinsieme infinito è denso.

Topologia di Zarisky:
L'insieme è K^n inteso come l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo K e con n coordinate distinte.

Definiamo una base di aperti come l'insieme dei $D(f) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}$

Proprietà:
I chiusi nella topologia di Zarisky sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $V(I)$ (Complementare di $D(I)$) al variare di I tra gli ideali dell'anello $K[x_1, \dots, x_n]$