<u>Ripasso di Fisica:</u>

Giulio Del Corso

Indice:

Legge di Coulomb:
Nel vuoto due cariche puntiformi in quiete esercitano una sull'altra una forza di attrazione se le due cariche sono di segni diversi, di repulsione nel caso contrario; tale forza ha la direzione della retta congiungente le due cariche e intensità data dalla formula:

$$F = \frac{1}{K_0} \cdot \frac{q_1 q\text{-}_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Valore costanti:

$$K_0 = 1.113 \cdot 10^{-10} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \approx 10^{10}$$

Coulomb (C):
Il coulomb è la carica elettrica posseduta da ciascuno di due piccoli corpi sferici che nel vuoto, quanto la distanza fra i loro centri è $1\ m$ si respingono con una forza di intensità $F = 8.89 \cdot 10^9\ N$

Osservazione:
Si lavora quasi sempre con il sottomultiplo $\mu C = 10^{-6} C$

Osservazione (Costante dielettrica relativa):
Nel caso in cui fra le due cariche non vi fosse il vuoto ma un dielettrico allora la formula precedente fa sostituita con:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Dove $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

Materiale	$\boldsymbol{\varepsilon_r}$
Acqua a $25°C$	78
Aria secca a 1 Atm e $25°C$	1.0005
Carta paraffinata	2
Gomma	3
Porcellana	6
Vetro	$4/10$

Il campo elettrico e il potenziale elettrostatico soddisfano le relazioni:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \boldsymbol{E_0}$$

$$V = \frac{1}{\varepsilon_r} V_0$$

Campo elettrico:

In un punto dello spazio esiste un campo elettrico non nullo quando una carica posta in quel punto risulta soggetta ad una forza elettrica.

Vale la relazione:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Da cui l'**intensità del campo elettrico** è:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

Esempio (Campo indotto da una carica puntiforme):

Modulo:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Vettore:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \boldsymbol{r}$$

Rappresentare un campo elettrico:

Una linea di forza è una linea dotata di verso e tale che in ogni suo punto la tangente orientata ha la direzione e il verso del campo elettrico E in quel punto.

La **rappresentazione di Faraday** consiste nell'utilizzare un numero finito di linee di forza e disporle in maniera tale che siano più fitte dove il campo elettrico in modulo è maggiore.

Osservazione:

Le cariche positive sono le sorgenti delle linee di forza.
Le cariche negative sono i pozzi delle linee di forza.

Proprietà (Principio di sovrapposizione dei campi elettrici):

L'intensità del campo elettrico generato da un numero qualunque di cariche è la somma vettoriale delle intensità dei campi elettrici che le varie cariche genererebbero da sole.

Densità di carica:

Idea:

Quando vogliamo utilizzare un numero estremamente grande di cariche distribuite in modo approssimativamente continuo su di una superficie o in un volume.

La **densità volumetrica** di carica nel punto $P = (x, y, z)$ è data dal rapporto tra la carica dq contenuta nel volume infinitesimo dV attorno al punto P e il volume dV stesso.

$$\varrho(x, y, z) = \frac{dq}{dV} \quad {}^{C}/_{m^3}$$

Viceversa:

La carica contenuta in un volume è:

$$q = \int_V \varrho dV = \int_V \varrho(x, y, z) dxdydz$$

Equivalente:

Densità superficiale di carica:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad {}^{C}/_{m^2}$$

Densità lineare di carica:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad {}^{C}/_{m}$$

Pratica:

Utilizzare la densità di carica per ricavare il campo elettrico in un punto P:

$$\boldsymbol{E}(P) = \int d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho(x', y', z')}{\overline{P'P}^3} \boldsymbol{P'P} \, dV'$$

In coordinate:

$$\begin{cases} E_x(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(x-x')\cdot\varrho(x',y',z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dx'dy'dz' \\ E_y(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(y-y')\cdot\varrho(x',y',z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dx'dy'dz' \\ E_z(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(z-z')\cdot\varrho(x',y',z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dx'dy'dz' \end{cases}$$

Pratica (Sfere):

Se dobbiamo calcolare l'energia contenuta in un determinato volume sferico possiamo effettuare la sostituzione:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Energia e Potenziale elettrostatico:

Idea:

Quando la carica elettrica q si sposta da un punto A ad un punto B di un campo elettrico E allora le forze del campo compiono un lavoro:

$$L_y(A \to B) = \int_{\widehat{AyB}} \boldsymbol{F} \cdot ds = q \int_{\widehat{AyB}} \boldsymbol{E} \cdot ds$$

Osservazione:

Il campo elettrico è **conservativo**, dunque il lavoro compiuto non dipende dalla traiettoria scelta ma solo dal punto iniziale e da quello finale.

In un campo elettrico vale $\oint \boldsymbol{E} \cdot ds = 0$

Energia potenziale:

Idea:

L'energia potenziale del campo elettrico è la funzione U data dalla relazione:

$$L(A \to B) = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot ds = U(A) - (B)$$

Cosa significa che un insieme di cariche possiede energia?
Ci stiamo semplicemente interrogando su quanta energia serva per disporle in un determinato punto partendo con il disporle da un punto considerato a potenziale 0 (Di solito l'infinito).
Se lo spazio è dotato di un certo campo elettrico dovremmo tenerne di conto mentre se le cariche sono isolate l'energia si calcola nel seguente modo:
La prima non serve lavoro per disporla.
Per la seconda invece:

$$L_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Per la terza:

$$L_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

Per l'n-esima:

$$L_n = U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<1} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Relazione differenziale:

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(U) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

Energia potenziale fra due cariche:

$$U = \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{\bar{r}}$$

In altre parole è il lavoro fatto dalle forze del campo per allontanare indefinitamente due cariche.

Metodo pratico (Calcolare l'energia potenziale o energia elettrostatica):

Nel caso continuo possiamo calcolare l'energia di una distribuzione di cariche:

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \, dq$$

Con φ potenziale nel punto e dq la carica contenuta nel punto, l'integrale si calcola su tutto lo spazio (Dotato di carica).

Caso discreto: $\frac{1}{2} \sum q_j \varphi(r_j)$ (Vale anche per superfici equipotenziali)

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

Con dV differenziale del volume ed E campo elettrico del punto.

Osservazione:

L'integrale è da considerarsi sul volume che contiene le cariche e di cui vogliamo calcolare l'energia potenziale elettrica.

Potenziale in un punto:

Il potenziale elettrostatico in un punto dello spazio è uguale al rapporto $\frac{L}{q}$ tra il lavoro fatto dalle forze del campo quando la carica q si sposta da quel punto fino all'infinito e la carica stessa.

È espresso in $V = \frac{J}{C}$

Definizione (Differenza di potenziale o Tensione):

La differenza di potenziale (d.d.p.) tra due punti A e B è:

$$\Delta\varphi = \varphi(A) - \varphi(B) = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{L(A \to B)}{q}$$

È espressa in $V = \frac{J}{C}$

Osservazione:

In un campo elettrico le forze tendono a muovere una carica positiva verso le posizioni con potenziale elettrostatico minore mentre una carica negativa verso quelle con potenziale elettrostatico maggiore.

Relazione differenziale (Pratica):

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}(\varphi) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

Dunque il campo può venire espresso in $\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$

Osservazione:

Per il principio di sovrapposizione del campo elettrico il potenziale dato da una distribuzione continua di cariche con densità volumetrica ϱ su di un volume $\bar{V}$ è dato da:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\bar{V}} \frac{\varrho(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV'$$

Potenziale elettrostatico prodotto da una carica Q in un punto a distanza r:

$$\varphi(r) = \frac{U(r)}{q} = \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Formula utile:

$$\varphi(P) - \varphi(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{\vec{r}}$$

Si ottiene come generalizzazione continua di un numero finito di cariche:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{Q_i}{d_i}$$

Osservazione:

Il potenziale varia in maniera continua. Questo fatto può essere utilizzato per ricavare il valore di certe costanti nello studio di due regioni di pano imponendo l'uguaglianza dei due potenziali sul bordo.

Teorema di Gauss:

Il flusso totale del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale interna alla superficie, divisa per ε_0.

Osservazione:
Il flusso si definisce come:

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS =^{T.d.G.} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Con $\boldsymbol{n}$ il vettore normale alla superficie.
Quindi:
$d\Phi_S(E) = E_{\perp} dS$

Osservazione:
Di conseguenza sostituire a dS la giusta approssimazione in termini di dr (Lavorando con corone sarà ad esempio $dS = 2\pi r \cdot dr$)

Forma differenziale (1° Equazione di Maxwell):
$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$

Esempi di applicazioni:

Campo elettrico generato da una distribuzione di carica con simmetria sferica:
Circondiamo la sfera con un'altra più grande e osserviamo che su questa, per motivi di simmetria, il flusso dovrà essere:

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = 4\pi r^2 E$$

Per il teorema di Gauss vale l'uguaglianza:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Dunque:

Il campo elettrico all'esterno di una distribuzione di carica con simmetria sferica è lo stesso di quello prodotta da un'unica carica puntiforme uguale alla carica totale della distribuzione e posta al centro della sfera.

Campo elettrico interno ad una sfera di raggio $\boldsymbol{R}$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \quad r \leq R$$

Distribuzione carica con simmetria cilindrica:
In un punto P distante $r > R$ dall'asse di simmetria è perpendicolare all'asse e di intensità:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Con λ la carica contenuta per unità di lunghezza della distribuzione.

Distribuzione piana e uniforme:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Cariche opposte distribuite uniformemente sopra due piani paralleli:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

<u>Dipolo elettrico:</u>

Un dipolo elettrico è un sistema formato da due cariche uguali in modulo (q e $-q$) poste a distanza d.

Il momento di un dipolo si definisce come:
$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$
Dove q è la carica di uno dei poli e $\boldsymbol{d}$ è il vettore che punta verso la carica positiva.
Oppure, per una generica distribuzione di cariche:

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\, dq$$

Dove l'integrale è calcolato su ogni punto dotato di carica e r è il suo vettore posizione. In caso di distribuzioni simmetriche può essere sostituito da d vettore distanza fra cariche uguali.
Per questo motivo due dipoli affiancati (Ad esempio le quattro piastre di un condensatore doppio) hanno momento di dipolo pari a: $p = q'd' + qd$

Campo elettrico generato da un dipolo:
Il potenziale è:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Dunque il campo elettrico è:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi\,; E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Forza sentita da un dipolo in un campo elettrico esterno:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = -\nabla U \text{ con } U = -pE\cos\theta$$

In polari:

$$\varphi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}\ ;\ E_\theta = \frac{kp\sin\theta}{r^3}\ ; E_\vartheta = 0$$

Conduttori:

Idea:

Un conduttore è un materiale con una grande quantità di elettroni liberi di muoversi. Se caricato la carica si va a distribuire sulla superficie.

Per i conduttori valgono i seguenti risultati:

Teorema di Coulomb:

Nei punti infinitamente vicini alla superficie esterna di un conduttore l'intensità del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ ha modulo:

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$

direzione perpendicolare alla superficie del conduttore ed orientata verso l'esterno della superficie se la densità di carica superficiale σ è positiva, verso l'interno se è negativa.

Campo elettrico interno:

In ogni conduttore il campo elettrico interno è nullo.

Gabbia di Faraday:

Un conduttore assume carica indotta da un campo circostante e risulta perciò schermante nella sua parte interna.

Pressione elettrostatica:

Si studia nel caso di conduttori, dunque di cariche disposte sulla superficie.

$$p = \frac{\sigma E}{2}$$

Osservazione:

Nel caso ci sia un campo intero ed uno esterno (Ad esempio pressione elettrostatica su di un condensatore triplo) bisogna considerarli entrambi, quindi:

$$p = \frac{\sigma(E_{int}+E_{est})}{2}$$

Osservazione:

Da questo segue che:

$$F_{superficiale} = \int p \, dS$$

Capacità conduttore:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Induzione:

Un conduttore sottoposto ad un campo elettrico acquisisce una carica indotta che rispetti le seguenti regole:

La somma delle cariche indotte è nulla.

La distribuzione delle cariche indotte è tale da rendere il conduttore una regione equipotenziale.

Induzione completa:

Se il conduttore intercetta tutte le linee di campo indotte da una carica q allora avrà una carica indotta pari al a q.

Equazione di Poisson:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La soluzione può essere difficile da calcolare ma è sempre unica.

Metodo delle cariche immagine:

L'idea è sostituire ad un conduttore una carica che induca lo stesso potenziale nello spazio esterno al conduttore.

Se la carica immagine la scegliamo affinché la superficie del conduttore risulti ancora equipotenziale e con lo stesso potenziale di prima allora per l'unicità dell'equazione di Poisson una volta trovata una distribuzione immagine questa valida su tutto lo spazio.

Esempi da conoscere:

Carica puntiforme q a distanza $(\boldsymbol{d}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ da un piano conduttore S infinito.

La carica immagine la poniamo $-q$ e simmetrica a distanza $(-d, 0{,}0)$ rispetto al piano.

In un punto arbitrario vale la formula per il potenziale:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Una volta ricavato il potenziale possiamo calcolare il campo elettrico (Differenziale del potenziale) e dunque la sua componente perpendicolare al piano.

Usando il teorema di Coulomb otteniamo:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_X$$

Integrando infine sulla superficie ricaviamo che la carica indotta è – q.

Sistema di cariche puntiformi:

Il potenziale è semplicemente la somma dei potenziali indotti dalle singole cariche.

Metodo della carica immagine:

Casi:

Carica Q di fronte ad una sfera conduttrice messa a terra:

Dati:

R è il raggio della sfera.

h è la distanza fra la carica puntiforme e la superficie della sfera.

Q è la carica puntiforme.

Il problema si risolve considerando una carica immagine tale che:

$R' = \frac{R^2}{h}$ (Distanza dal centro)

$Q' = -Q\frac{R}{h}$ (Carica posseduta).

Osservazione:

Maggiore è la distanza della carica Q più l'induzione risulta uniforme.

Carica Q di fronte ad una sfera conduttrice isolata:

Dati:

R è il raggio della sfera.

h è la distanza fra la carica puntiforme e la superficie della sfera.

Q è la carica puntiforme.

Posto: $Q' = -Q\frac{R}{h}$

Il problema si risolve considerando due cariche immagini:

La prima posta al centro della sfera e dotata di carica:

$-Q'$

La seconda invece posta sulla congiungente punto-centro con:

$R' = \frac{R^2}{h}$ (Distanza dal centro)

Q' (Carica posseduta).

Condensatori:

Idea:

I condensatori servono ad accumulare energia nel tempo per rilasciarla in un tempo breve.
È formato da due conduttori (detti armature) dotate di carica opposta.

Capacità di un condensatore:

$C = \frac{Q}{\Delta V}$ con Q carica positiva sull'armatura e ΔV la differenza di potenziale fra le due armature.

La sua unità di misura è il Farad ($[F] = [C][V]^{-1}$).
La capacità di un condensatore ci permette di capire quale è la carica presente sulle armature una volta imposta una data differenza di potenziale.

Osservazione:

Dipende solo dalla geometria del sistema.
Una formula utile, se conosciamo il campo elettrico e questo è costante:
$V = Ed$ con d distanza fra le piastre.

Esempi utili:

Capacità di un condensatore piano:

$C \cong \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ con S area dell'armatura e d la distanza fra le piastre.

Maggiore è il rapporto $\frac{S}{d^2}$ migliore è l'approssimazione.
Ovviamente per questo caso vale: $\sigma = \frac{Q}{S}$ e $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Capacità di un condensatore cilindrico:

$C \cong \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ con l lunghezza dei due cilndri ed R_i il raggio di uno dei cilindri (Coassiali)

Maggiore è l rispetto alla differenza $R_2 - R_1$ dei raggi migliore è l'approssimazione.

Capacità di un conduttore sferico:

$C \cong \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$

Condensatori in serie:

$C = \sum C_i$

Esempio:

Due condensatori sferici concentrici.

<u>Condensatori in parallelo:</u>

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Osservazione:

Se tutti i condensatori sono uguali allora ciascuno di loro ha tensione $\frac{1}{n}$ della tensione totale.

Esempio:

Due sfere congiunte da un filo.

Energia di un condensatore:

È la quantità di lavoro che si può trarre dal condensatore scaricandolo completamente.

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\ QV = \frac{1}{2}\ CV^2$$

Esempio flash:

Se abbiamo un condensatore di capacità $100\mu F$ e vogliamo un flash (Ossia liberare un'energia sull'ordine dei 3 J) usiamo la formula $U = \frac{1}{2}\ CV^2 = 3\ J \rightarrow V = 250\ V$

Forze e condensatori:

Se la quantità di carica è costante allora la forza (Detta s la distanza fra le piastre) è:

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{ds}$$

$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}$ inserendo il conduttore.

Oppure:

$$F = \frac{1}{2}QE$$

Esempio:

Nel caso di un condensatore piano sappiamo che $C = \frac{\varepsilon_0 S}{s}$ quindi la forza di una piastra sull'altra è:

$$F = -\frac{SV^2\varepsilon_0}{2s^2}$$

Correnti e resistenze:

Idea:

La densità di corrente elettrica in un generico punto P si definisce come:

$$\boldsymbol{J} = \sum_i n_i q_i \boldsymbol{v}_i =^* \sigma \boldsymbol{E}$$

Con q_i il tipo di carica trasportato e n_i la rispettiva densità.

Equivalenze utili:

$$i = J \cdot S =^* \frac{E}{\rho} S \coloneqq Q'$$

L'**intensità di corrente** attraverso una superficie S si definisce come:

$$i = \frac{dq}{dt} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Siccome vale il principio di conservazione della carica elettrica:

$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = -\frac{dQ}{dt}$ con Q carica complessiva racchiusa dalla superficie S.

In forma equivalente (**Equazione di continuità**):

$\mathrm{div}(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ (ϱ è la densità volumetrica di carica nel medesimo punto)

Legge di Ohm:

L'intensità di corrente elettrica che percorre un filo metallico tenuto a temperatura costante è proporzionale alla d.d.p. esistente tra gli estremi del filo.

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = i$$

R è detta Resistenza e si misura in Ohm (Ω)

Un conduttore ha resistenza di 1 Ohm se è percorso da una corrente di intensità 1 Ampere quando la d.d.p. ai suoi estremi è di 1 V.

Resistenza di un filo:

La resistenza di un filo si può calcolare come:

$$R = \varrho_c \frac{l}{S}$$

Con S l'area della sezione, l è la lunghezza del filo e ϱ_c è detto resistenza specifica o **resistività** del conduttore (Si misura in Ωm)

La **conduttività** di un materiale è: $\gamma_c = \frac{1}{\varrho_c}$

Osservazione:

La resistività per intervalli piccoli varia linearmente con la temperatura:

$\varrho_c(T) = \varrho_c(T_0)\big(1 + \alpha(T - T_0)\big)$ dove α è detto coefficiente termico e dipende dalle proprietà chimiche del materiale.

Osservazione:
Quando una carica puntiforme q si sposta da un punto P_1 con potenziale V_1 ad un punto P_2 con potenziale V_2 allora il lavoro compiuto dalla forza $q\boldsymbol{E}$ dovuta al campo elettrico presente è:

$$L(P_1 \to P_2) = q(V_1 - V_2)$$

Il lavoro non dipende dalla traiettoria.

Potenza sviluppata dal campo elettrico (Nel filo):
Ipotizzando costante la d.d.p. $\Delta V = V_1 - V_2$, detta R la resistenza del filo e i la sua intensità di corrente:

$$W = \frac{dL}{dt} = i\Delta V = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} = i^2 R$$

Osservazione:
Se le condizioni sono stazionarie la potenza emessa è costante e il lavoro compiuto dal campo elettrico in un dato lasso di tempo è:

$$L = i^2 R \Delta t$$

<u>Effetto Joule:</u>

Il lavoro compiuto dal campo elettrico si traduce in un'emissione di calore, interno al filo se questo è isolato o esterno se il filo è termostatato, questo si chiama effetto Joule.
Il calore emesso vero l'esterno è:

$$Q = \frac{1}{\boldsymbol{J}} L \; ; Q = \frac{1}{\boldsymbol{J}} i^2 R \Delta t$$

Con $\boldsymbol{J} = 1$ oppure $\boldsymbol{J} = 4184 \frac{J}{kcal}$ a seconda dell'unità di misura in cui vogliamo sia calcolata l'emissione di calore.

Caso generale:
Utilizziamo la formula:

$$W = \int E \cdot J \, dV =^{*} \sigma \int E^2 \, dV =^{volendo} \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, dV \right) = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} U$$

* La condizione si verifica se la conducibilità dello spazio è costante ed uguale a σ.

Questa risponde alla domanda: "Quale è la potenza dissipata per effetto Joule all'istante iniziale?".

Se vogliamo calcolare l'energia totale dissipata possiamo ottenerla come:

$$U = \int W \, dt$$

Resistenze in serie:

$$R = R_1 + \cdots + R_n$$

Resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Osservazione (f.e.m. e d.d.p.):
Se stiamo lavorando con un vero generatore di forza elettromotrice questo avrà una resistenza interna r, dunque nel caso in cui eroghi una corrente di intensità i la differenza di potenziale dei morsetti sarà:

$$\Delta V = E - ir$$

<u>Tempo di scarica:</u>

Caso generale:
Nel caso di una distribuzione di carica su di un volume di cui vogliamo studiare la distribuzione sfruttiamo il principio di conservazione del carica:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

Nel caso in cui la conducibilità σ sia costante nello spazio (Quantomeno quello che stiamo considerando):

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\sigma \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

Ma $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ è semplicemente la divergenza che, noto il campo elettrico, può essere calcolata.

Osservazione:
Ricavare la soluzione diventa semplicemente il calcolo di un'equazione differenziale di primo ordine.
Se ad esempio avessimo avuto $E = \frac{z\rho}{\varepsilon_0} \to \mathrm{div}(E) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ e dunque:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\sigma \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0}$$

Perciò $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ e la soluzione in funzione del tempo è:

$$\rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Caso filo conduttore:
Se prendiamo un condensatore di capacità C e carica totale Q chiuso da una resistenza R la carica del condensatore varia con legge:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Con soluzione:

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dove $\tau = RC$ è la costante tempo del circuito.

<u>Leggi di Kirchhoff:</u>

Sono due leggi che possiamo sfruttare per ricavare l'intensità di corrente data la f.e.m. e la resistenza delle varie parti di un circuito.
Si chiamano **nodi** i punti della rete nei quali concorrono due o più conduttori.
Si chiamano **maglie** gli insiemi di due o più rami della rete che non possono venir suddivisi ulteriormente.

Prima legge:

La somma algebrica delle intensità di corrente che confluiscono in uno stesso nodo dagli N rami facenti capo ad esso è nulla.

$$\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$$

Seconda legge:

La somma algebrica delle f.e.m. agenti lungo una maglia è uguale alla somma algebrica dei prodotti delle intensità di corrente per le resistenze rispettive degli M rami della maglia.

$$\sum_{k=1}^{M} E_k = \sum_{k=1}^{M} R_k i_k$$

<u>Approfondimento (Pile):</u>

Un'unita che viene talvolta usata per fornire informazioni sulla carica totale della pila (Ossia la Q che può spostare) è il Ah (O il suo sottomultiplo mAh) che si legge come Ampere Ora.
Vale la relazione $1\ Ah = 1\ Ampere\ \cdot 3600\ s = 3600\ C$

L'energia totale immagazzinata da una pila di d.d.p. ΔV è data da:

$$E = Q \cdot \Delta V$$

Se sappiamo il tempo di scarica della pila allora la potenza emessa è:

$$W = \frac{E}{\Delta t}$$

Elettromagnetismo:

Idea:
Il magnetismo è una proprietà diversa da quella studiata nei campi elettrici e non è spiegabile nell'ambito della fisica classica. Con gli strumenti da me attualmente posseduti possiamo dunque studiarne solo gli effetti e la relazione con forze elettriche in movimento.

Forza di Lorentz:
È la relazione tra il campo magnetico e una carica elettrica in movimento.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Regola prodotto vettoriale:
Se il pollice indica $\boldsymbol{v}$ e le altre dita indicano $\boldsymbol{B}$ allora il palmo indica il verso del vettore.
In generale $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin(\theta_{ab})$ con $\boldsymbol{n}$ il versore che indica la direzione.

Osservazione:
Se la carica elettrica è ferma la forza indotta dal campo magnetico è nulla.

Viceversa:
Una carica q che si muove induce un campo magnetico:
$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$

Osservazione:
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$

Equazione dimensionale:
$[B] = \frac{N}{A \cdot m} = T$; Tesla
Il Gauss si definisce come:
$1\ G = 10^{-4}\ T$

Esempio:
$B_{Terra} \cong 10^{-4}\ T \ \cong 1\ G$
$B_{Magnete} \cong 10^{-2}\ T$
$B_{Cern} \cong 10\ T$
$B_{Stella\ di\ neutroni} \cong 10^{8}\ T$
$B_{Galassia} \cong 10^{-8}\ T$

Legge di Lenz (Corollario della legge di Faraday):
Dato un circuito immerso in un campo magnetico allora ogni variazione del flusso magnetico concatenato al circuito induce una forza elettromotrice.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Conseguenza Maxwell:
La forma definitiva della seconda equazione di Maxwell è:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Osservazione:
Se il campo magnetico non è costante non possiamo più utilizzare la formula:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Campi magnetici indotti:

Ogni carica in movimento induce un campo magnetico, i più facili da studiare sono:

Formule generali per il campo magnetico:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I \cdot d\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0 \cdot q}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Ricordando che $J = \sigma E$ se σ costante nel materiale

Osservazione (Linee di forza):
Nei campi magnetici le linee di forza sono chiuse e finite oppure spirali infinite. Non esistono sorgenti o pozzi.

Principio di sovrapposizione dei campi magnetici:
Il campo magnetico generato da fonti distinte è dato dalla somma vettoriale dei campi magnetici generati dalle singole fonti.

Legge di Biot – Savart (Campo magnetico generato da un filo infinito):
Il campo magnetico generato da un filo percorso da una corrente di intensità I è dato:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot I$$

Un filo rettilineo infinito genera un campo magnetico a distanza r di modulo:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Orientato nel verso del palmo destro puntando il pollice nel verso di I e le altre dita radialmente.

Osservazione:
Per fili di lunghezza molto maggiore della distanza r questa formula può essere utilizzata per ottenere il risultato (Approssimato).

Campo magnetico indotto da una spira circolare:
Nel centro di una spira circolare il campo magnetico ha intensità:

$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ con r raggio della spira

Lungo l'asse delle z è:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Momento di una spira:
Si definisce come momento di una spira $\boldsymbol{M} = i\pi R^2 \boldsymbol{k} = iS\boldsymbol{k}$ con $\boldsymbol{k}$ versore.
Allora per $r \ll z$ vale $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{M}}{2\pi z^3}$

Campo magnetico indotto da un solenoide cilindrico di lunghezza $\boldsymbol{L}$:
Se consideriamo N spire sull'asse z allora il campo esterno al cilindro è approssimativamente nullo (Tanto minore quanto maggiore è L) mentre il campo interno è parallelo al solenoide di modulo:

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

Casi incontrati durante gli esercizi:

Cilindro cavo in cui scorre corrente:
All'interno per il teorema di Ampere il campo è nullo.

Solenoide toroidale:
$B_{int} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ con N numero totale di spire.
$B_{est} = 0$

Forza magnetica su di un filo:
Dato un filo di lunghezza L, spessore S in un campo magnetico B.
In questo filo scorre un numero di elettroni $N = nLS$ con velocità v.
La forza totale vale:

$$F = NevB = LIB \;\; ; \;\; I = SJ$$

In generale (Filo curvo nello spazio):

$$\boldsymbol{F} = \int I \, d\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

Con l'integrale calcolato su tutto il filo e con L il verso della corrente.

Caso utile (Due fili):
Due fili paralleli esercitano una forza sull'altro di modulo:

$$F = \frac{\mu_0 L I_1 I_2}{2\pi d}$$

Con d la distanza fra i fili, L la lunghezza dei fili e I_i le intensità di corrente nel filo.
La forza è attrattiva se le correnti sono concordi.

<u>Densità di energia magnetica in un punto:</u>

$u_B(x) = \frac{B^2(x)}{2\mu_0}$

Relazioni utili sulla densità di energia:

$u_B = \frac{u_B}{V} = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{\mu_0 n I^2}{2}$

Osservazione (Pressione magnetica):

$|p_B| = u_B$

Si calcola anche come $\frac{dF}{dS} = B \cdot \frac{dI}{dS}$

Osservazione:

Nel caso ci sia una densità esterna ed una interna è la differenza. La direzione è sempre quella di minor densità magnetica.

Energia magnetica di un volume:

$U_V = \int_V u_B \, dV$

Relazioni utili sull'energia:

$\frac{dU_B}{dt} = W = VI$

Data l'induttanza L allora vale la relazione:

$U_b = \frac{1}{2} L I^2$

Questa vale sempre, se L è trascurabile vuol dire che se anche facessimo l'integrale di u_B verrebbe un valore trascurabile.

Attenzione:

Se il circuito ammette resistenza tutta l'eventuale energia meccanica fornita si disperde per effetto Joule.

Energia elettromagnetica:

$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$

Equazione circuito RLC:

$$V = RI + \frac{Q}{C} + L\dot{I}$$

Dove V è la differenza di potenziale (Data da tutte le componenti note, ossia i generatori e la variazione di flusso magnetico).
Ciascuna delle tre componenti può essere nulla (Dipende dal circuito).

A partire da questa relazione possiamo scrivere le equazioni differenziali per $I(t)$ e risolverle ottenendo la corrente nel circuito.

Caso interessante:
Per circuiti RL esistono delle fasi di transiente nelle quali scorre meno corrente di quella che dovrebbe erogare il generatore (Inizio) ed una nella quale scorre corrente NONOSTANTE non ci sia nessun generatore (Fase conclusiva). In quest'ultima l'energia accumulata nel campo magnetico va a scaricarsi per effetto Joule.
Dato un circuito RL con induttanza L e resistenza R collegato ad un generatore di tensione ε.
L'equazione differenziale del circuito è:

$$RI + L\dot{I} = \varepsilon$$

Soluzione fase iniziale con $\boldsymbol{I(0) = 0}$:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Osservazione:
Per circuiti standard $R = 1\Omega\,; L = 1\ \mu H \rightarrow \tau = \ \mu s$
Quindi la condizione di regime viene raggiunta dopo pochi microsecondi.

Fase a regime:
La corrente diventa stazionaria di valore $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$
L'energia magnetica immagazzinata è $U = \frac{1}{2}L{I_0}^2$
(Sarà quella dispersa per effetto Joule dopo la scarica, coincide per bilancio energetico a quella fornita dal generatore meno quella dispersa per effetto Joule)

Soluzione fase finale con $\boldsymbol{I(0) = I_0}$ la corrente a regime (Data dalla legge di Ohm), spegniamo $\boldsymbol{\varepsilon}$:
L'equazione differenziale del circuito è:
$RI + L\dot{I} = 0$

Con soluzione:

$$I(t) = I_0\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Energia dissipata per effetto Joule: $\int_0^\infty RI(t)^2 dt = \frac{1}{2}LI_0^2$

Definizione (Flusso magnetico attraverso la superficie S):

$\phi_S(\boldsymbol{B}) \coloneqq \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$

Relazione flusso (Parallelismo Gauss):
$\phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$ con S superficie chiusa.

Equivalente:
$\mathrm{div}(\boldsymbol{B}) = 0$

<u>Teorema di Ampere (Circuitazione):</u>

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{concatenata}$$

Dove:

$I_{concatenata} = \phi_J = \sum I_i$

Equivalente:
$\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0\, \boldsymbol{J}$

Forma generale (Nel caso in cui la densità di carica non sia costante):
$\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$

Invarianza:
Per trasformazioni veloci (Quindi dove non intervengono movimenti di cariche prolungati dunque dispersione termica per effetto Joule) il flusso è invariante.

Esempio:
Per trasformazioni rapide dell'area di un circuito con campo magnetico ortogonale vale:

$A_1 B_1 = A_2 B_2$

Induzione ed autoinduzione:

Dato un circuito γ e il flusso magnetico ad esso concatenato $\Phi_\gamma(B) = \int_{S_\gamma} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ (Che non dipende dalla scelta della superficie con bordo il circuito) allora ogni variazione del flusso origina una forza elettromotrice nel circuito stesso.

Legge di Faraday (Lenz):
Se $\Phi_\gamma(B)$ varia nel tempo allora si genera una forma elettromotrice nel circuito.

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_\gamma(B)}{dt}$$

Osservazioni:
Per ricavare l'intensità di corrente nel circuito possiamo sfruttare $\varepsilon_1(t) = R \cdot i(t)$
Se è già presente una f.e.m. quella indotta si va semplicemente a sommare.
Legge di Lenz: la corrente indotta ha come direzione quella che bilancia B.
(In pratica la corrente indotta si oppone alla variazione di flusso).
Legge di De Felici: Se $\varepsilon_{iniziale} = 0 \rightarrow q_{mossa} = \int i \cdot dt = -\frac{\Delta\Phi(B)}{R}$ con $\Delta\Phi(B)$ variazione del flusso.

Correnti di Foucault (Correnti parassite):
Sono le correnti che si generano ogni volta che un conduttore si muove in un campo magnetico, la dispersione di energia avviene per effetto Joule.
Dipendono solo dai moti relativi.

Autoinduzione o induttanza:
È la tendenza di un circuito con una corrente che lo percorre di indurre un'ulteriore f.e.m. a causa del campo magnetico da essa generato.
Dipende esclusivamente dalla forma del circuito.
$L_0 \mid \Phi(B) = L_0 \cdot i$

Osservazione:
Se il circuito è immerso in un materiale allora dobbiamo inserire anche la permeabilità magnetica di questo nell'equazione:
$L = \mu_r \cdot L_0$

Operazioni con induttanza:
Dati due circuiti di induttanza L_1, L_2 e resistenze R_1, R_2.
Se messi in serie risulta un circuito di induttanza $L = L_1 + 2M + L_2$ e resistenza $R_1 + R_2$
In parallelo in generale non sono descrivibili mediante un'unica induttanza.

Esempi carini:
Solenoide di lunghezza l, n numero di spire per unità di lunghezza e S area:

$L = \mu_0 n^2 S l = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ con N il numero di spire.

<u>**Mutua induzione:**</u>
È la tendenza di un circuito percorso da una corrente di indurne una in un altro circuito così da bilanciare il flusso magnetico concatenato alla seconda generato dalla prima.

$$\begin{cases} \Phi_1(B) = \Phi_1(B_1) + \Phi_1(B_2) = L_1 \cdot i_1 + M_{12} \cdot i_2 \\ \Phi_2(B) = \Phi_2(B_1) + \Phi_2(B_2) = M_{21} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

Osservazione:
$M_{12} = M_{21} = M$

Come si ricava:
Vale sempre la relazione $M = k\sqrt{L_1 L_2}\,; k \in [-1,1]$
In generale: $M_{12} = \frac{\Phi_{12}(B_1)}{I_1}$

F.e.m. indotta:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \varepsilon_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Per un circuito semplice vale dunque la relazione:

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Esempi noti:
Due spire circolari di area piccola (Raggio r) poste a grandi distanza (d):

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2d^3}$$

Onde elettromagnetiche:

Introduzione:
Un'onda elettromagnetica è data da una componente elettrica sinusoidale ed una componente magnetica anch'essa sinusoidale ortogonale a quella elettrica.

Soluzione di un'onda piana:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t) \\ \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t) \end{cases}$$

Dove vale la relazione di dispersione $\omega^2 = c^2 \boldsymbol{k}^2$
$B_0 = \frac{E_0}{c}$

Attenzione:
La scelta di seno o coseno dipende esclusivamente dal valore dell'onda in un punto noto (Ad esempio l'origine).

Definizioni:
Lunghezza d'onda:
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$
Pulsazione:
$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Osservazione:
La lunghezza d'onda e la pulsazione sono dipendenti e all'aumentare dell'una l'altra cala.

Grafico:

10^{24}	10^{22}	10^{20}	10^{18}	10^{16}	10^{14}	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	10^0	v (Hz)
Raggi gamma		**Raggi X**	**UV**	**visibile**	**Infrarossi**		**Microonde**	**FM**	**AM**	**Onde lunghe**			
10^{-16}	10^{-14}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	10^0	10^2	10^4	10^6	10^8	λ (m)

Densità di energia di un'onda:

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

Con valore medio: $\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Osservazione:
L'energia viene trasportata con velocità c.

Osservazione (Impulso):
L'onda trasporta un impulso $p = \frac{S}{c^2} = \frac{u}{c}$

Ricezione di onde (Ricevitore quadrato):
Onda elettromagnetica (Lunghezza d'onda λ, ampiezza E_0) con campo elettrico polarizzato lungo y che incontra un circuito quadrato (lato l) posto sull'asse xy.

Sfruttare la componente elettrica (Circuitazione del campo elettrico)
$\varepsilon = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$
Sfruttare la componente magnetica (Flusso del campo magnetico)

$\phi = \int \boldsymbol{B}_z \cdot d\boldsymbol{S}$
$\varepsilon = -\dot{\phi}$

Osservazione:
Le due ε vengono uguali.

$\varepsilon = -E_0 \sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{\lambda} - \omega t\right)$; $\langle \varepsilon^2 \rangle_t = \frac{E_0^2 \lambda^2}{2} \sin^2\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)$

Osservazione:
Il massimo della ricezione viene ottenuto per $l = \frac{\lambda}{2}$.

Osservazione:
Per la soluzione che abbiamo ricavato un'antenna più grande riceve meglio l'informazione ma se supera la lunghezza dell'onda che stiamo ricevendo non è più efficace.

Costanti utili da ricordarsi:

$g = 9.822\ \frac{m}{s^2}$

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$

$m_e = 0.911 \cdot 10^{-20}\ Kg$

$m_p = 1836 \cdot m_e$

$1\ C$ è dato da $6.24 \cdot 10^{18}$ elettroni

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{T \cdot m}{A}$

$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458\ \frac{m}{s} \cong 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$

Gradiente e Divergenza:

Gradiente: $\mathrm{grad}(\varphi) = \nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ è il c. v. associato al c. scalare $\varphi(x, y, z)$

Divergenza: $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Teorema della divergenza:

$\int \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}\ dS = \int \nabla \cdot \boldsymbol{E}\ dV$

Equazioni di Maxwell:

1° $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ (Teorema di Gauss)

2° $\mathrm{rot}(\boldsymbol{E}) = \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

3° $\mathrm{div}(\boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

4° $\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ oppure se varia la densità $\mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$

Equazione di Continuità:

$\mathrm{div}(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

Proprietà delle operazioni vettoriali:

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin(\theta_{ab})$ con $\boldsymbol{n}$ il versore che indica la direzione.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\theta_{ab})$

$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$

$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$

$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$

Rotore e divergenza:

$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$ (Divergenza del gradiente)

$\nabla \times \nabla f = 0$ (Rotore del gradiente)

$\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ (Divergenza del rotore)

$\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A)$ (Rotore del rotore)

Cambio di sistema di riferimento:

Coordinate sferiche:

$$dx = \hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + r\sin\theta\,\hat{\varphi}d\varphi$$

Quindi:

$$\begin{cases} g_1 = 1 \\ g_2 = r \\ g_3 = r\sin\theta \end{cases}$$

Coordinate cilindriche:

$$dx = \hat{\rho}d\rho + \rho\hat{\varphi}d\varphi + \hat{z}dz$$

Quindi:

$$\begin{cases} g_1 = 1 \\ g_2 = \rho \\ g_3 = 1 \end{cases}$$

Formule:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left(\frac{\partial(E_1 g_2 g_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(E_2 g_1 g_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(E_3 g_1 g_2)}{\partial x_3}\right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\det\begin{pmatrix} g_1\widehat{x_1} & g_2\widehat{x_2} & g_3\widehat{x_3} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 & g_3 E_3 \end{pmatrix}$$

Con x_i l'i-esima variabile e ∂_i la derivata parziale rispetto alla i-esima variabile.

Dipolo magnetico:

Momento di dipolo magnetico per un circuito su di un piano:
$\vec{\mu} = I \cdot S \cdot \hat{n}$

La direzione segue la regola della mano destra.

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}\right)$$

Ripasso di meccanica:

Impulso:

$$\Delta\bar{p} \coloneqq \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\, dt$$

Quantità di moto:

$$\bar{Q} = \bar{m} \cdot \bar{v}$$

Teorema della quantità di moto:
Un sistema non sottoposto a forze preserva la quantità di moto.

Teorema dell'impulso:
L'impulso coincide con la variazione della quantità di moto.

Ripasso sul moto circolare uniforme:
$v = \omega \cdot R$
$a = -\omega \cdot R$
$T = \frac{1}{f}$
$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$
In coordinate polari la posizione è data da: $\theta(t) = \theta_0 + \omega \cdot t$

Momento meccanico:
$M = \int_{braccio} r \times \vec{F}\, dr$
$M = \frac{dL}{dt}$

Oggetti in rotazione:
$E_C = \frac{1}{2} I \omega^2$ momento di inerzia con I

Potenza dissipata media:
Può essere utile scomporre nei vari termini la potenza e tenere esclusivamente quelli che non hanno media nulla nel periodo descritto. Sono utili le uguaglianze:
$\frac{1}{2\pi \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx} = \frac{1}{2}$
$\langle W \rangle = -\langle I^2 R \rangle$

Potenza: $W = F_{mot} \cdot v$

Aree, volumi e superfici:

Cerchio:

Area: πR^2
Perimetro: $2\pi R$

Sfera:

Area di superficie: $4\pi R^2$
Volume: $\frac{4}{3}\pi R^3$

<u>Equazioni differenziali e rispettiva soluzione:</u>

In ogni equazione differenziale della forma $a\dot{x} + bx = c$ per prima cosa si risolve l'equazione omogenea associata, si va quindi a cercare una soluzione particolare.

Equazione ordinaria:
$a\dot{x} + bx = 0$

Dunque:

$$\dot{x} = -\frac{b}{a}x$$

Con soluzione:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{b}{a}t}$$

Dove $\frac{b}{a} = \frac{1}{\tau}$ con τ costante tempo.
$x_0 = x(0)$ è il valore assunto nel punto iniziale dalla $x(t)$.

Osservazione:
Se $t \gg \tau$ allora si può considerare superato il regime transitorio.