Analisi a più variabili:

Schemi Super Pratici

CAPITOLO 1: Calcolo differenziale

Limiti in più variabili:

Si studiano con i seguenti metodi:

- Mediante la definizione
- Per limite a 0 maggiorando con una funzione infinitesima
- Somma, prodotto e rapporto (lecito) di continue è continua dunque si sostituiscono i limiti
- Regola di composizione
- Per la non esistenza basta individuare due direzioni con limite discorde
- Passaggio in coordinate polari

Continuità e omogeneità:

Sfruttando l'omogeneità si studia il rapporto fra funzioni.

> **ATTENZIONE:** Condizione è che il denominatore sia diverso da 0, nel caso di funzioni sinusoidali dobbiamo studiare i punti problematici al denominatore.

Per determinare la componente omogenea si sfrutta lo sviluppo di Taylor.

Differenziabilità:

Se una funzione è differenziabile in $x_0 \rightarrow \begin{cases} \exists \text{ le derivate direzionali} \\ \exists \text{ le derivate parziali} \\ \text{Continua in } x_0 \end{cases}$

Composizione:

Composizione di due funzioni differenziabili è differenziabili.

Se differenziabile $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$ con:

$a = \frac{\partial f}{\partial x}$; $b = \frac{\partial f}{\partial y}$

Osservazione pratica:

Se le nostre derivate parziali danno 0 allora il differenziale deve essere nullo. Se abbiamo mostrato che esiste almeno una direzione per la quale è non nullo allora non è differenziabile.

Condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità in un punto (x_0, y_0):

1) Esistono le derivate parziali nel punto. (Calcolate con il limite se non derivabili dovunque)

2) $\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Condizione sufficiente (Differenziale totale):

Se una funzione ammette le derivate parziali in un intorno aperto ed esse siano continue nel punto allora la funzione è differenziabile nel punto.

> **ATTENZIONE:** Da problemi ad essere usato se la funzione è assegnata su tutto meno un punto in quanto è difficile studiare la derivata nel punto della funzione.

Siccome richiede un aperto se stiamo lavorando con insiemi chiusi il bordo va trattato a parte.

Parentesi derivabile: Una funzione è derivabile se esistono le derivate parziali. Dunque differenziabile implica derivabile.

<u>Studi di massimo e di minimo:</u>

Nella parte interna della funzione si utilizza il criterio di Laplace:

Tutti i punti di massimo e minimo locale sono stazionari, ossia $\nabla f = 0$

In quei punti valutiamo l'Hessiana (La matrice delle derivate seconde)

Se definita positiva → Punto di minimo locale
Se definita negativa → Punto di massimo locale
Se non definita → Punto di Sella

Per il bordo possiamo parametrizzarlo o imporre la condizione di Lagrange.
$L = f - \lambda g$ con g equazione del bordo e studiarne i punti stazionari.

Osservazione: Utile ricordarsi che il Teorema di Weierstrass ci assicura su un compatto di avere massimo e minimo di una funzione continua.

Capitolo II: Equazioni differenziali

Equazioni differenziali di vario genere:

Le equazioni differenziali a noi note e di cui sappiamo determinare esplicitamente una soluzione sono:

Equazioni lineari omogenee di primo ordine:

$y'(t) = ay(t)$ con soluzione $y(t) = e^{at} y_0$

Equazioni lineari di ordine superiore:

Omogenee:

$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$

Si risolvono studiando le radici del polinomio:

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

Se le radici (reali) hanno molteplicità la soluzione è data dalla combinazione dei $c_i e^{\lambda_i t}$

Se la molteplicità di una radice (reale) è s la soluzione è combinazione di:

$e^{\lambda t}$; $te^{\lambda t}$; … ; $t^{s-1}e^{\lambda t}$

Se una radice è complessa coniugata $\lambda = c + id$ la soluzione è combinazione di:

$e^{ct}(\cos dt)$; $e^{ct}(\sin dt)$

Se una radice è complessa coniugata di molteplicità s la soluzione è combinazione:

$e^{ct}(\cos dt)$; $te^{ct}(\cos dt)$; … ; $t^{s-1}e^{ct}(\cos dt)$

$e^{ct}(\sin dt)$; $te^{ct}(\sin dt)$; … ; $t^{s-1}e^{ct}(\sin dt)$

Non omogenee:

In questo caso si procede addizionando alla soluzione generale ricavata dall'omogenea quella particolare funzione del termine da studiare.

I casi noti di cui conosciamo la soluzione sono Polinomi, esponenziali, prodotto di polinomi per esponenziali.

La regola generale è il Metodo di Variazione delle Costanti Arbitrarie.

Equazioni a variabili separate:

Si ricavano le soluzioni come descritto nei miei appunti pratici.

Equazioni di Riccati:

$y'(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t)$

Se conosciamo una soluzione $y_0(t)$ si usa la sostituzione $y(t) = u(t) - y_0(t)$ per ottenere un'equazione di Bernoulli in $u(t)$

Equazioni di Bernoulli:

$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\big(y(t)\big)^k$

Con la sostituzione $z = y^b$; $b = \frac{1}{1-k}$ ci si riconduce a $\frac{1}{1-k} z' = a(t)z(t) + b(t)$ che sappiamo studiare.

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti:

$y^{'}(t) = Ay(t)$ ammettono soluzione $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$

Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti:

$y^{'}(t) = Ay(t) + b(t)$ hanno soluzione particolare $y_0(t) = \int_0^t e^{(t-s)}b(s)ds$

La soluzione generale è data da $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)}b(s)ds$

In generale si studia la matrice A, se ne determina la forma di Jordan:

$A = TJT^{-1}$ con T base di autovettori generalizzati, vale allora la relazione $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$ che ci permette di calcolare la soluzione omogenea.

Nel caso in cui tutti gli autovalori siano semplici per il teorema spettrale possiamo applicare la decomposizione in autovettori e affermare che la soluzione è combinazione lineare di $e^{\lambda_i t}v_i$

Osservazione:

La soluzione particolare può essere ricavata con il Metodo di variazione delle costanti arbitrarie: $W(t)c^{'}(t) = Termini\ noti$ dove dove $W(t)$ è matrice Wronskiana del sistema e $c(t)$ è il vettore delle incognite ottenuto integrando $c^{'}(t)$. La soluzione particolare è data da $W(t)c(t)$

Sistemi dinamici a dimensione 2:

$y'(t) = Ay(t)$ si dice linearizzato del sistema.

Il linearizzato si ottiene imponendo A la matrice Jacobiana del sistema valutata in un punto.

I punti di interessa da studiare sono detti punti di equilibrio e sono quelli che azzerano il sistema.

Nei punti di equilibrio abbiamo sempre la soluzione costante.

Classificazione punti di equilibrio:

Nodo asintoticamente stabile: Due autovalori negativi

Nodo asintoticamente instabile: Due autovalori positivi

Sella (instabile): Un autovalore positivo ed uno negativo

Stella: Autovalore doppio con molteplicità 2

Nodo degenere: Autovalore doppio con molteplicità 1

Fuoco stabile: Autovalori complessi con parte reale negativa

Fuoco instabile: Autovalori complessi con parte reale positiva

Centro: Autovalori immaginari puri

Osservazione:

Le soluzioni non possono intersecarsi, se determiniamo dunque delle curve che sono soluzione queste ci forniscono dei bordi per il nostro studio.

Ogni punto di sella ha sempre e solo due separatrici (Una stabile e l'altra instabile).

Osservazione sui primi integrali:

Un primo integrale è una funzione $H(t)$ che rimane costante lungo le soluzioni:

$H\big(y(t)\big) = Costante$

Un integrale primo è sempre perpendicolare alla direzione di crescita delle soluzioni.

Determinare dunque le curve isocline permette di tracciare il grafico.

Osservazione (Equazione di Lotka - Volterra):

$$\begin{cases} x'(t) = (A - By)x \\ y'(t) = (Cx - D)y \end{cases}$$

Se $A = B = C = D = 1$ la traiettoria rimane nel I quadrante.

Studio esistenza, unicità e prolungamento soluzione:

Scritta la funzione differenziale in forma normale:

$$y' = f(y, x)$$

Teorema di Peano:
Garantisce che dove la funzione f è continua su di un intervallo aperto esiste una soluzione locale.

Teorema di Cauchy:
Se la funzione è:

1) Continua ;
2) Uniformemente continua rispetto ad x ;
3) Localmente Lipschitziana rispetto ad y ;

Allora ammette soluzione unica in un intorno.

Osservazione:
La condizione 3) è sostituibile con la più forte: la derivata rispetto ad y esiste.

Teorema di Prolungamento delle soluzioni:
Se alle condizioni del teorema di Cauchy aggiungiamo la crescita sub-lineare rispetto ad y:

$$\|f(t, y)\| \leq A(t) + B(t)\|y\|$$

La soluzione è estendibile globalmente.

Equivalente:
La funzione f è localmente Lipschitziana rispetto ad y
f è limitata su $(a, b) \times \mathbb{R}^n$

Se studiando l'equazione riusciamo a dimostrare che y è limitata (O y, y' nel caso stessimo lavorando con un'equazione di secondo ordine) abbiamo l'estensione globale.

Osservazione:
Se abbiamo che la crescita sub-lineare è garantita solo per determinati valori di (a, b) sarà quello il massimo intervallo di estensione (Ricordarsi che si estende in funzione di t, non di $\mathbb{R}^n$)

Osservazione:
Se siamo riusciti a scrivere esplicitamente le soluzioni possiamo, in funzione delle condizioni di Cauchy, determinare l'intervallo massimale di estensione. Sarà infatti quell'intervallo nel quale la soluzione è definita.

Integrali primi e soluzioni:
Se individuiamo una funzione $H\big(y(t)\big)$ che sia con derivata minore di 0 allora la funzione $y(t)$ è limitata e dunque siamo nelle ipotesi della forma equivalente del Teorema di Prolungamento.
Questo perché abbiamo una quantità che decresce lungo le soluzioni.

Caso noto:

$$y''(x) = f(x,y) \to \binom{u_1}{u_2} := \binom{y}{y'} \to \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = f(t, u_1) \end{cases}$$

Ammette un integrale della forma $H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} - F(u_1)$ con F primitiva di f

In generale:
Si cerca di manipolare l'equazione del sistema per imporla uguale a 0, a quel punto si cerca una primitiva della funzione individuata.

Principio del confronto:

Se $y' = f(t,y)$; $z(t)$ si dice:

Sottosoluzione: se $z'(t) \le f(t, z(t))$

Soprasoluzione: $z'(t) \ge f(t, z(t))$

Teorema:

u di $u' = f(x,u)$; v sottosoluzione con $u(x_0) \ge v(x_0)$

Allora $v \le u \; \forall x \ge x_0$

Allora $v \ge u \; \forall x \le x_0$

Applicazione:

Il teorema di prolungamento ci dice che se stiamo cercando di prolungare una soluzione su di un intervallo abbiamo solo due possibilità:

$\exists T > 0$; $u(t) \in C(t_0, T)$ per il quale esista una soluzione che in forma integrale si scrive come:

$$u(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds$$

E $\lim_{t \to T} |u(t)| = +\infty$ (Quella che si chiama Esplosione della soluzione)

Oppure $\exists \; u(t) \in C(t_0, \infty)$ estensione massimale.

Quindi:

Se manipolando l'equazione riusciamo a dimostrare (Spesso sfruttando il Lemma di Gronwall)che $u(t)$ o una sua funzione semplice è minore di una costante di un termine funzione di t ma finito allora è estendibile.

Se troviamo una soprasoluzione che non esplode (magari di cui conosciamo la soluzione esplicita) allora deve essere estendibile.

Se troviamo una sottosoluzione che esplode al tendere ad un $T < \infty$ allora la funzione non sarà estendibile globalmente.

Funzione utile per l'esplosione:

$\begin{cases} y'(t) = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha un'unica soluzione massimale data da $\frac{1}{1-t}$ NON globale.

Capitolo III: Integrali doppi e formula di riduzione di Fubini - Tonelli:

Integrali multipli:

Una volta verificate le ipotesi di integrabilità se il dominio è normale rispetto ai due termini si può integrare in successione con Fubini - Tonelli.

Integrali con sostituzione di variabili:

Siano U, V due aperti di $\mathbb{R}^2$ (Generalizzabile ad $\mathbb{R}^n$).
Sia $\varphi: V \rightarrow U$ un diffeomorfismo (Il cambiamento di coordinate).
Sia $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione continua.

Allora per ogni insieme integrabile secondo Riemann $E \subseteq U$ si ha:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(E)} f\big(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\big)\big|J_\varphi(u,v)\big|dudv$$

Capitolo IV: Integrazione sulle curve e superfici, forme differenziali:

Integrale curvilineo di prima specie:

$\int_\gamma f ds$

Con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; γ curva con parametrizzazione $\varphi: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$

Osservazione:

$\int_\gamma ds$ è la lunghezza della curva

Integrale curvilineo di seconda specie:

$\int_\gamma F ds$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; ; γ curva con parametrizzazione $\varphi: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Dipende dall'orientazione.

$\int_\gamma F ds = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt$

Integrale curvilineo complesso:

$\int_\gamma f(z) dz$

Con f funzione olomorfa (Che rispetti le ipotesi si Cauchy a meno di un numero finito di punti).

Per il teorema dei residui:

$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} dz = 0$ se z_0 non è nella parte interna delimitata dalla curva

$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} dz = 2\pi i \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ se z_0 è nella parte interna.

Integrale di superficie:

$\int_\Sigma f dS$

Con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\sum$ superficie data da $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$

$\mu(\Sigma) = Area\ di\ \Sigma = \iint_U \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| dudv = \iint_U dS$

$\int_\Sigma f dS = \iint_U f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi(u, v) \times \partial_v \varphi(u, v)\| dudv$

Non dipende dall'orientazione.

Osservazione (Prodotto vettore):

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Integrale curvilineo di una 1 forma:

$\int_\gamma \omega dS$

$\omega = \omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n$; $\omega_i \in C(u)$; γ con $\varphi: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\int_\gamma \omega dS = \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\, \varphi_j^{'}(t) dt$

Osservazione:

Se la forma è esatta allora l'integrale è nullo su ogni curva chiusa.

La forma si dice chiusa se $\left(d_j \omega_i = d_i \omega_j\right)$

Chiusa su un convesso o chiusa su un semplicemente connesso → Esatta

Integrale curvilineo di k-Forme:

$\int_\Sigma \omega dS$

Con $\sum$ superficie e $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ una sua parametrizzazione

$\int_\Sigma \omega dS = \int_U \varphi^*(\omega)$ con $\varphi^*(\omega)$ Pull - Back della forma:

ω 1-Forma → $\varphi^*(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \omega_j \left(\varphi(u)\right) \partial_{u_k} \varphi_j (u) du_k$

ω 2-Forma → $\varphi^*(\omega) = \sum_{1 \le j < k \le n} \omega_{jk} \left(\varphi(u)\right) \left(\partial_{u_1} \varphi_j (u) \partial_{u_2} \varphi_k (u) - \partial_{u_1} \varphi_k (u) \partial_{u_2} \varphi_j (u)\right) du_1 \wedge du_2$

In tal caso usiamo $\iint dx_1 \wedge dx_2 = \iint dx_1 dx_2$

Parentesi (Differenziale di una forma):

Data una 1-Forma differenziale:

$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j (x) dx_j$

Allora:

$d\omega = \sum_{j=1}^n d\omega_j (x) \wedge dx_j \;\to\; d\omega = \sum_{1 \le k < j \le n} \left(\partial_{x_k} \omega_j (x) - \partial_{x_j} \omega_k (x)\right) dx_k \wedge dx_j$

Con $d\omega$ una 2-Forma

Teoremi utili:

Formula di Stokes - Green: (Integrali curvilinei di 1-Forme $\sim$ Integrali di superficie di 2-Forme)
Se $\sum = Int(\sum) \cup \partial\sum \subseteq \mathbb{R}^n$; $n \geq 3$ superficie regolare orientabile con bordo.
Se $a(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)dx_j$ è una 1-Forma allora:

$$\int_{\sum} da = \int_{\partial\sum} a$$

Formula di Stokes: (Integrali di superficie di 1° tipo $\sim$ Integrali curvilinei di 2° tipo)
Se $\sum = Int(\sum) \cup \partial\sum \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare orientabile connessa con bordo e atlante F

$$\int_{\sum} \langle N(x), rot(A)\rangle dS = \int_{\partial\sum} \langle T, A\rangle ds$$

Formula di Stokes - Gauss: (In $\mathbb{R}^3$, integrali di superficie di 3-Forme $\sim$ Integrali curvilinei di 2-Forme)
Se $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto; $\partial U = \bigcup_{j=1}^{n} \sum_j$ (Superfici regolari, compatte e connesse), allora:

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega$$

Osservazione:
$$\omega = \omega_1(x)dx_2 \wedge dx_3 - \omega_2(x)dx_1 \wedge dx_3 + \omega_3(x)dx_1 \wedge dx_2$$
$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} \omega_j(x)\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Formula di Gauss - Green: (Campi vettoriali)
Se $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto; $\partial U = \bigcup_{j=1}^{n} \sum_j$ (Superfici regolari, compatte e connesse), A campo vettoriale, N vettore normale esterno, allora:

$$\int_U \langle \nabla, A\rangle = \int_{\partial U} \langle N. A\rangle dS$$

Capitolo V: Limiti integrali, funzioni L^p e serie di Fourier:

Funzioni misurabili e funzioni semplici su spazi di misura qualsiasi:

Stiamo lavorando con $(\Omega, \sum, m)$ con Ω insieme, $\sum$ σ-Algebra e m misura σ-additiva.

Funzione misurabile: $f(x): \Omega \to \mathbb{R}$ si dice misurabile se $f^{-1}]t, +\infty] = \{x \mid f(x) > t\} \in \sum$ (Ossia è misurabile)

Equivalente:

$f^{-1}[-\infty, t[= \{x \mid f(x) < t\} \in \sum$

$f^{-1}[t_1, t_2] \in \sum$

$f^{-1}]t_1, t_2[\in \sum$

Lemmi pratici:

f misurabile $\leftrightarrow f^{-1}(B) \in \sum \; \forall B$ appartenente ai Boreliani

f, g misurabili $\to f \pm g$ misurabile

f, g misurabili $\to f \circ g$ misurabile

f misurabile, $c \neq 0 \to cf$ misurabile

f, g misurabili, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua $\to F\big(f(x), g(x)\big)$ misurabile

f_k successione di misurabili $\to \sup_k f_k$; $\inf_k f_k$ sono misurabili

f continua $\to$ Misurabile

Funzione semplice: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, Ind_{E_j}$ con $E_j = \{x \mid f(x) = c_j\}$ misurabile

Lemma della successione delle funzioni semplice:

Se $f(x)$ misurabile con $f(x) \geq 0$ quasi ovunque $\to \exists \, s_k$ successione di funzioni semplici non nulle quasi ovunque con $s_k(x) \to f(x)$ quasi ovunque.

Funzioni sommabili ed integrali su spazi di misura qualsiasi:

Integrale di una funzione semplice: $s(x)$ una funzione semplice su di un insieme E misurabile:

$$\int_E sm = \sum_{j=1}^{N} c_j \, m(E_j \cap E)$$

Lemma:

Sia $s(x)$ funzione semplice e $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$ successione di misurabili tali che $\bigcup S_k = \Omega$ allora vale:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S_k} s(x)m = \int_{\Omega} s(x)m$$

Integrale di una funzione non negativa:
$f(x)$ misurabile e non negativa quasi ovunque.
$\int_E f(x)m = \sup\left\{\int_E s(x)m \ ; 0 \leq s(x) \leq f(x) \ ; s(x) \text{ semplice}\right\} < \infty$

Proprietà:
$\int_E f(x)m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) Ind_E m$
$f(x) \leq g(x) \ ; \ \forall x \in E \to \int_E f(x)m \leq \int_E g(x)m$
$\int_E cf(x)m = c \int_E f(x)m$
$\int_E (f+g)(x)m = \int_E f(x)m + \int_E g(x)m$
$m(E) = 0 \to \int_E f(x)m = 0$

Integrale di una funzione:
Se $f(x) = f^+ - f^-$ e vale almeno una fra:
$\sup\left\{\int_E s(x)m \ ; 0 \leq s(x) \leq f^+(x) \ ; s(x) \text{ semplice}\right\} < \infty$
$\sup\left\{\int_E s(x)m \ ; 0 \leq s(x) \leq f^-(x) \ ; s(x) \text{ semplice}\right\} < \infty$
Allora $\int_E f(x)m = \int_E f^+(x)m - \int_E f^-(x)m$

Funzione sommabile:
f funzione m-misurabile, E misurabile, $f \in L^1(\Omega, m)$ (Ossia sommabile) se:
$|f|$ è integrabile, ossia $\int_E f^+(x)m \ ; \ \int_E f^-(x)m < \infty$

Teorema di Beppo Levi:
$f_k(x)$ misurabili, crescenti, non negative q.o. con $f_k(x) \nearrow f(x)$ q.o. con $f(x)$ misurabile, allora:
$\int_\Omega f_k(x)m \nearrow \int_\Omega f(x)m$ q.o.

Lemma di Fatou:
$f_k(x)$ misurabili e $f_k(x) \geq 0$ q.o. ; se $f(x) = \lim_{k\to\infty} \inf f_k(x)$ vale:
$\int_\Omega f(x)m \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega f_k(x)m$

Teorema di Lebesgue:
$f_k(x)$ sommabili, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ sommabili tali che $|f_k(x)| \leq g(x)$ q.o. sommabile, allora:
$\int_\Omega f(x)m = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)m$

Teorema di Egorov:
Dato uno spazio a misura finita, $m(\Omega) < \infty$; $f_k(x)$ misurabili, $f_k(x) \to f(x)$ allora $\forall \delta > 0 \ \exists B \in \sum$ con:
$m(B) \leq \delta$
$f_k(x)$ converge uniformemente su $\Omega \backslash B$

Integrali di Riemann ed Integrali di Lebesgue:
Se un insieme ha misura di Peano Jordan 0 allora ha misura di Lebesgue 0
Se $f(x) \geq 0$ q.o. ; $f(x)$ sommabile e $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$ (Con dx misura di Lebesgue) allora $f(x) = 0$ q.o.
$f(x)$ Riemann integrabile → Lebesgue integrabile
$f(x)$ è Riemann integrabile ↔ è continua a meno di un insieme con misura di Lebesgue nulla

Spazi L^p:

$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p m\right)^{\frac{1}{p}}$ con m misura σ-additiva.

$L^p(\Omega. m) = {\{f \mid \|f\|_p < \infty\}}/_{\sim}$ con la relazione che identifica due funzioni se sono coincidenti q.o.

Proprietà:
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$; chiuso per prodotto per scalare, dunque spazio vettoriale reale o complesso.
$f, g \in L^p \to f + g \in L^p$
La norma è completa → E' uno spazio di Banach

Caso $p = \infty$:
$\|f\|_\infty = \{\inf\{C \geq 0 \mid |f(x)| \leq C \; q.o.\}\}$ Sono le funzioni limitate q.o.

Osservazione:
Se Ω compatto → Le funzioni continue $\subseteq_{proprio} L^\infty(\Omega, m)$

Teorema:
L^p è completo

Disuguaglianza di Holder:
Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \to \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$

Conseguenze:
Se $f \in L^p$; $g \in L^q \to fg \in L^1$
Se m è finita allora $L^q \subseteq L^p$ per $p < q$

Disuguaglianza di Minkowsy:
$f, g \in L^p \to f + g \in L^p$ e $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

Disuguaglianza di Interpolazione:
$f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$ con $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty \to \forall\, p \in (p_1, p_2)$ vale $f \in L^p$ e:
$\|f\|_{L^p} \leq (\|f\|_{L^{p_1}})^\theta (\|f\|_{L^{p_2}})^{1-\theta}$ con $\theta \in (0,1)$; $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{(1-\theta)}{p_2}$

Teorema di Lusin:
f sommabile su un compatto, $(K \subseteq \mathbb{R}, \sum, m)$; $m = dx$ misura di Lebesgue, allora:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; g: k \to \mathbb{R}$ continua ed un insieme $F \subseteq K$ chiuso tale che:
$f(x) = g(x) \;\; \forall x \in K \backslash F$ e $m(F) \leq \varepsilon$