APV - 5 - DIMOSTRAZIONI:

D1 (Teorema di Carathéodory):

Dimostrazione. Il fatto che φ é una misura esterna implica che

$$\varphi(A) \leq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E)$$

sempre. Per quello $E \subset \Omega$ é $\varphi-$ misurabile se e solo se

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E)$$

per ogni $A \subset \Omega$. Sia $\mathcal{M}$ la famiglia di tutti inisemi $\varphi-$ misurabili. Ovviamente $\emptyset \in \mathcal{M}$ e

$$E \in \mathcal{M} \Longrightarrow E^c = \Omega \setminus E \in \mathcal{M}.$$

Prendiamo adesso $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, cosí abbiamo

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \setminus E_j), \ j = 1, 2, \forall A \subset \Omega. \qquad (1.4.5)$$

Dobbiamo verificare (1.4.4) ovvero

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)), \ \forall A \subset \Omega \qquad (1.4.6)$$

per $E = E_1 \cup E_2$. Abbiamo le relazioni

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c)$$

e

$$A \cap E = A \cap E_1 \cup (A \cap (E_2 \setminus E_1))$$
$$\varphi(A \cap E) \leq \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap (E_2 \cap E_1^c)).$$

Cosi otteniamo

$$\varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \leq$$

$$\leq \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap (E_2 \cap E_1^c)) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \underbrace{=}_{usiamo(1.4.5)con j=2}$$

$$= \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \underbrace{=}_{usiamo(1.4.5)con j=1} = \varphi(A).$$

Questo raggionamento dimostra (1.4.6).

Per verificare l'aditivitá finita prendiamo $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, disgiunti. La relazione (1.4.4) con $A = E_1 \cup E_2$ e $E = E_1$ implica

$$\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2).$$

Questa relazione implica

$$\varphi\left(\cup_{j=1}^N E_j\right) = \sum_{j=1}^N \varphi(E_j) \qquad (1.4.7)$$

per ogni famiglia $E_j \in \mathcal{M}$ di insiemi mutuamente disgiunti. Prendeno il limite $N \to \infty$ otteniamo la disequazione (qui usiamo di nuovo il fatto che φ é numerabilmente subadditiva)

$$\varphi\left(\cup_{j=1}^\infty E_j\right) \geq \sum_{j=1}^\infty \varphi(E_j).$$

La disequazione oposta é sempre vera, cosí arriviamo alla conclusione che φ é σ aditiva.

Rimane a verificare che $\mathcal{M}$ é σ - algebra, cioé

$$E_j \in \mathcal{M}, j = 1, 2, 3, \cdots \Longrightarrow E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}. \qquad (1.4.8)$$

Ponendo

$$F_N = \cup_{j=1}^{N} E_j$$

e usando il fatto che $\mathcal{M}$ é algebra possiamo scrivere

$$\varphi(A \cap F_N) = \varphi(A \cap F_N \cap E_N) + \varphi(\cap F_N \cap E_N^c) =$$

$$= \varphi(A \cap E_N) + \varphi(\cap F_{N-1})$$

per ogni $A \subset \Omega$. Usando induzione otteniamo

$$\varphi(A \cap F_N) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(A \cap E_j).$$

D'altra parte, sappiamo che $F_N \in \mathcal{M}$ e quindi

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap F_N) + \varphi(A \cap F_N^c) \underbrace{\geq}_{\text{usiamo } F_N \subset F} \sum_{j=1}^{N} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap F^c),$$

dove

$$F = \cup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Prendendo il limite $N \to \infty$ troviamo la disequazione

$$\varphi(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap F^c) \geq$$

$$\varphi(A \cap F) + +\varphi(A \cap F^c).$$

Questa disequazione implica $F \in \mathcal{M}$.

$\square$

D2:

Dimostrazione. Le proprietá $\varphi(\emptyset) = 0$ é ovvia. Le proprietá

$$A \subseteq B \Longrightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$$

e la subaditivitá numerabile seguono direttamente dalla definzione (1.4.19). Per essere piu' precisi, per ogni successione

$$S_1, S_2, \cdots$$

di sottoinsiemi di Ω non necessariamente disgiunti dobbiamo verificare la proprieta

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(S_j) \qquad (1.4.12)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni S_j troviamo un ricoprimento numerabile

$$S_j \subseteq \sup_{A_{jk}}, A_{jk} \in \mathcal{A}$$

tale che

$$\varphi(S_j) \leq \sum_k m_0(A_{jk}) < \varphi(S_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \qquad (1.4.13)$$

La famiglia di insiemi

$$A_{jk} \in \mathcal{A}, j, k \in \mathbb{N}, \tag{1.4.14}$$

é numerabile, l'insieme

$$S = \cup_j S_j$$

puo essere coperto con la famiglia (1.4.14) di insiemi in $\mathcal{A}$. Le disequazioni (1.4.13) implicano

$$\varphi(S) \leq \sum_j \sum_k m_0(A_{jk}) \leq \sum_j \varphi(S_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \varepsilon + \sum_j \varphi(S_j)$$

e quindi la proprietá (1.4.12) segue.

□

D3:

Dimostrazione. Ovviamente

$$\varphi(E) \leq m_0(E).$$

Se

$$E \subset \cup_j E_j, \ E_j \in \mathcal{A},$$

allora poniamo

$$\widehat{E_1} = E \cap E_1, \widehat{E_j} = E \cap \left(E_n \cap (\cup_{1 \leq k < j} E_k^c)\right), j = 2, 3, \cdots$$

Abbiamo le relazioni

$$\cup_j \widehat{E_j} \supset E$$

e l'unione

$$\cup_j \widehat{E_j}$$

é disgiunta, applicando (1.4.18), troviamo

$$m_0(E) = \sum_j m_0(\widehat{E_j}) \leq \sum_j m_0(E_j)$$

e quindi

$$m_0(E) \leq \varphi(E).$$

□

D4:

Dimostrazione. Ogni $E \in \Sigma$ ha un ricoprimento

$$E \subset \cup_j A_j, \quad A_j \in \Sigma_0,$$

tale che

$$\widetilde{m}(E) \leq \sum_j m_0(A_j),$$

perche

$$E \subset \cup_j A_j, \quad A_j \in \Sigma_0,$$

e $\widetilde{m}$ é una misura $\sigma-$ additiva che soddisfa (1.5.23). La definizione di

$$\varphi(E) = m(E)$$

implica

$$\varphi(E) = m(E) \geq \widetilde{m}(E).$$

□

D5:

Dimostrazione. Ogni $E \in \Sigma$ con $\varphi(E) < \infty$ ha un ricoprimento

$$E \subset A = \cup_j A_j, \quad A_j \in \Sigma_0,$$

tale che

$$\varphi(E) + \varepsilon \geq \sum_j m_0(A_j).$$

e quindi

$$m(A \setminus E) = m(A) - m(E) \leq \varepsilon.$$

Abbiamo le proprietá

$$B_N = \cup_{j=1}^N A_j \nearrow A$$

e

$$m(B_N) = \widetilde{m}(B_N)$$

insieme con σ aditivitá di $m, \widetilde{m}$ implica

$$m(A) = \widetilde{m}(A). \tag{1.5.26}$$

Abbiamo inoltre

$$\widetilde{m}(A \setminus E) \leq m(A \setminus E) \tag{1.5.27}$$

grazie a Lemma 1.5.1. In questo modo si ottiene

$$\widetilde{m}(E) = \widetilde{m}(A) - \widetilde{m}(A \setminus E) \geq m(A) - m(A \setminus E) = m(E).$$

Questa disequazione e la disequazione del Lemma 1.5.1 implicano

$$\widetilde{m}(E) = m(E).$$

□

D6 (Classi Monotone):

Dimostrazione. Prima di tutto

$$\lambda(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$$

é ovvia. Per verificare l'inclusione opposta

$$\lambda(\mathcal{I}) \supseteq \sigma(\mathcal{I})$$

serve a verificare che $\lambda(\mathcal{I})$ é $\sigma-$ algebra.

Infatti, se $\mathcal{I}$ contiene Ω allora e evidente che $\lambda(\mathcal{I})$ e chiusa per passaggio al complementare, perche

$$A^c = \Omega \setminus A$$

é una classe monotona e chiusa rispetto alla differenza tra insiemi. Abbiamo provato la prima delle due caratteristiche fondamentali di una $\sigma-$algebra.

Se una classe di insiemi e chiusa per passaggio al complementare e per intersezioni finite, applicando le Leggi di De Morgan, essa e chiusa per unioni finite. Se inoltre una famiglia di insiemi e chiusa per intersezioni finite e per unioni numerabili crescenti (terza proprieta di classe monotona nell'elenco), allora questa sara chiusa per tutte le unioni numerabili (altra proprieta fondante delle $\sigma-$ algebre).

Non resta che provare la chiusura di $\lambda(\mathcal{I})$: la suddetta dimostrazione si articola in due parti.

$$A \in \mathcal{I}, B \in \lambda(\mathcal{I}) \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{I})$$

$$A \in \lambda(\mathcal{I}), B \in \lambda(\mathcal{I}) \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{I})$$

Non si tratta che di effettuare banali verifiche delle proprieta di $\lambda-$ sistema sulle seguenti classi di insiemi:

$$\mathcal{M} := \{B \in \lambda(\mathcal{I}) | A \cap B \in \lambda(\mathcal{I}), A \in \mathcal{I}\},$$

$$\mathcal{M}' := \{B \in \lambda(\mathcal{I}) | A \cap B \in \lambda(\mathcal{I}), A \in \lambda(\mathcal{I})\}.$$

$\square$

D7 (Premisura):

DIM: Supp. per semplicità che gli I_j siano intervalli. (*)

additività

(≥) m_0 monotona $\Rightarrow m_0(I) \geq m_0\left(\sum_1^N I_j\right) = \sum_1^N m_0(I_j)$ ← perché è unione contenuta in I?

additività

Ho quindi: $m_0(I) \geq \sum m_0(I_j)$ ✓

(≤) Vediamo quando gli I_j sono aperti e disgiunti, $j=1, \dots, N$ finiti $\Rightarrow$ ovvio per additività

Però non sono né aperti né finiti, come si fa?

I è chiuso ($m_0(I) = m_0(I^\circ)$ dato che $m_0(\partial I) = 0$)

⇓

I è compatto!

(*) $I \subset \bigcup_j \tilde{I}_j$ ricoprimento numerabile $\xrightarrow{\text{aperto}}$ $\exists$ un sottoricoprimento aperto finito, e siamo nel caso precedente

$\Rightarrow I \subset \bigcup_1^M \tilde{I}_j \Rightarrow m_0(I) \leq \sum_1^M m_0(\tilde{I}_j) \leq \sum_1^\infty m_0(\tilde{I}_j)$ ✓

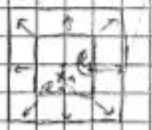
subadditività!

troviamo le ric.

(*) $I_j \to$ centro x_j, lati $(\ell_1 \dots \ell_m)$

facciamo un omotetia $I_j \to \hat{I}_j$

$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{mN}$



$\Rightarrow m_0(\hat{I}_j) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, si ha $I_j \subset \hat{I}_j^\circ$

Abbiamo quindi $m_0(\hat{I}_j \setminus I_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ ← introduco le j perché gli I_j variano!

Consideriamo quindi l'omotetia data da $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{mN2^{j+1}}$

Prendendo $\tilde{I}_j = \hat{I}_j^\circ$ abbiamo $I \subset \bigcup_j \tilde{I}_j$ aperti.

Da qui si finisce la dim.

(*) tanto i plurint. ne sono unione finita $\Rightarrow$ il ragionamento poi si estende facilmente

$I = \bigcup_j I_j$ I, I_j plurint $\Rightarrow m_0(I) = \sum m_0(I_j)$ □

Dal libro:

Dimostrazione. Per ogni $N \geq 1$ abbiamo

$$m_0\left(\cup_{j=1}^N I_j\right) = \sum_{j=1}^N m_0(I_j).$$

Usando il fatto che m_0 é monotona otteniamo

$$m_0(I) \geq \sum_{j=1}^\infty m_0(I_j)$$

quindi rimane a dimostrare la disequazione oposta

$$m_0(I) \leq \sum_{j=1}^\infty m_0(I_j) \tag{2.2.31}$$

Possiamo suppore che ogni

$$I_j$$

ha centro in x_j e lato L_j possiamo fare omotetia con centro x_0 e coefficiante

$$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{N2^{j+1}}$$

con N abbastanza grande, tale che dopo l'applicazione dell'omotetia

$$I_j \Longrightarrow \widehat{I}_j \supset I_j,$$

dove $\widehat{I}_j$ é intervallo con lo stesso centro x_j ma

$$m_0\left(\widehat{I}_j\right) \leq m_0(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Questa relazione implica

$$m_0\left(\widehat{I}_j \setminus I_j\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{2.2.32}$$

Usando il fatto che

$$\cup_j Int(\widehat{I}_j)$$

é un ricoprimento di I ed ricordando il fatto che I é un compatto toviamo un ricoprimento finito

$$I \subset \cup_{j=1}^M Int(\widehat{I}_j),$$

per quale abbiamo

$$m_0(I) \leq \sum_{j=1}^M m_0(\widehat{I}_j) \leq \sum_{j=1}^M \left(m_0(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^M m_0(I_j)\right) + 2\varepsilon$$

e quindi vale (2.2.31). $\square$

D8:

Dimostrazione. Usiamo la definizione (2.3.37) e possiamo scrivere

$$\varphi(K) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m_0(A_j), \quad A_j \in \Sigma_0, K \subseteq \cup_j A_j\right\} \tag{2.4.43}$$

e

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} m_0(A_j) \quad A_j \in \Sigma_0, A \subseteq \cup_j A_j\right\} \tag{2.4.44}$$

Le due quantitá non cambiano se usiamo plurintervalli $A_j \in \Sigma_0$ aperti. La compatezza di K implica

$$\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m_0(A_j), \quad A_j \in \Sigma_0, K \subseteq \cup_j A_j\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} m_0(A_j) \quad A_j \in \Sigma_0, A \subseteq \cup_j A_j\right\}.$$

□

D9:

Dimostrazione. Ovviamente dobbiamo verificare solo

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap K^c) \tag{2.5.48}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un ricoprimento numerabile

$$A \subset \cup_j I_j,$$

tale che

$$diam(I_j) \leq \varepsilon$$

e

$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \sum_j m_0(I_j).$$

Per il compatto K sappiamo che esiste aperto $U \supset K$, tale che

$$dist(U^c, K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e tale che

$$\varphi(U \setminus K) = \varphi(K^c \setminus U^c) \leq \varepsilon \tag{2.5.49}$$

Definiamo

$$J_0 = \{j; I_j \cap K \neq \emptyset\}, J_1 = \{j; I_j \cap K = \emptyset\}.$$

Possiamo verificare che

$$A \cap K \subset \cup_{j \in J_0} I_j, \; A \cap U^c \subset \cup_{j \in J_0} I_j$$

e quindi

$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \sum_{j \in J_0 \cup J_1} m_0(I_j) = \underbrace{\sum_{j \in J_0} m_0(I_j)}_{\geq \varphi(A \cap K)} + \underbrace{\sum_{j \in J_1} m_0(I_j)}_{\geq \varphi(A \cap U^c)} \tag{2.5.50}$$

La disequazione (2.5.49) implica

$$\varphi(A \cap U^c) + \varepsilon \geq \varphi(A \cap U^c) + \varphi(A \cap K^c - U^c) \geq \varphi(A \cap K^c).$$

Cosí le disequazioni (2.5.50) dimostrano la disequazione

$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap K^c) - \varepsilon$$

e quindi abbiamo (2.5.48). □

D10:

Dimostrazione. Sia U qualsiasi aperto limitato che copre K. L'insieme

$$U \setminus K$$

é un aperto limitato.

Questo implica che

$$U \setminus K = \cup_j I_j$$

dove l'unione é quasi disgiunta e ogni I_j é intervallo chiuso con

$$m_0(I_j) \leq \varepsilon.$$

Usando il fatto che φ é monotona otteniamo

$$\varphi(U) \geq \sum_{j=1}^{N} m_0(I_j).$$

Questo significa che la serie

$$\sum_j m_0(I_j) < \infty$$

converge e per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$\sum_{j \geq N} m_0(I_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.5.45)$$

L'insieme

$$U_1 = U \setminus (\cup_{j=1} N I_j)$$

é aperto tale che

$$K \subset U_1.$$

Possiamo vedere che

$$U_1 \setminus K \subset \cup_{j \geq N+1} I_j.$$

La disequazione (2.5.45) implica che la misura esterna dell'insieme

$$\cup_{j \geq N+1} I_j$$

é minore di $\varepsilon/2$. □

D11 (Borelliani):

DIM: I Borelliani sono compatti e aperti => sono misurabili secondo Lebesgue. ☐

D12 (Approssimazione con funzioni semplici):

che $s_k(x) \nearrow f(x)$ per $k = 1, 2, \dots$

DIM: Sia $E_k = \{x \mid f(x) \geq k\}$; questo è misurabile $\forall k$

$\Rightarrow$ considero $E_{k,j} = \{x \in \Omega \mid \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\}$ con $j = 1, \dots, 2^k k$

(con questa scelta di j fa un ricoprimento)

Definisco quindi $S_k(x) := k \mathbb{1}_{E_k} + \sum_{j=1}^{k 2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbb{1}_{E_{k,j}}$

Dobbiamo verificare che $\forall x \in \Omega$, $S_k(x) \longrightarrow f(x)$

Abbiamo che $S_k(x) \leq f(x)$ dato che $\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}$

Inoltre, $|S_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}$ $\forall x \in E_{k,j}$

Questo è se $f(x) \in \mathbb{R}^+$; ma se $f(x) \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$?

In questo caso, $\bigcup_{j=1}^{k 2^k} E_{k,j} = \Omega \setminus E_k$ non copre tutto!

Ma dato che $E_k \supset E_{k+1} \Rightarrow E_k \searrow F = \bigcap E_k$ con F misurabile (perché gli E_k lo sono, e siamo in una σ-algebra) e $F = \{x \mid f(x) = \infty\}$

Possiamo ora verificare la convergenza puntuale di S_k su F: se $x \in F$, $S_k(x) = k \longrightarrow \infty = f(x)$

$\square$

D13:

DIM: Consideriamo $S(x) = \mathbb{1}_G$

$E_k \nearrow E \Rightarrow E_k \cap G \nearrow E \cap G$ e di conseguenza, dato che m è σ-additiva, $m(E_k \cap G) \nearrow m(E \cap G)$

E quindi, $\int_{E_k} S(x)\, dm(x) \longrightarrow \int_E S(x)\, dm$

Questo si può estendere a $S(x)$ semplice qualunque (non un'indicatrice)

$\square$

D14 (Beppo Levi):

Dimostrazione. La successione

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\ m$$

é crescente e quindi ha limite $+\infty$ o un numero in $(0, \infty)$. La funzione

$$f(x) = \sup_k f_k(x)$$

e misurabile, perche

$$\{x : f(x) \leq M\} = \cap_k \{x; f_k(x) \leq M\}.$$

Abbiamo la disequazione

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\ m \leq \int_\Omega f(x)\ m.$$

Rimane solo a dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\ m \geq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ m.$$

Sia

$$0 \leq s(x) \leq f(x)$$

e s é una funzione semplice. Per ogni $c \in (0, 1)$ poniamo

$$E_k = \{x; f_k(x) \geq cs(x)\}$$

Abbiamo

$$E_k \subseteq E_{k+1}$$

perche la successione f_k é monotona. Per ogni $x \in \Omega$ tale che $s(x) \leq f(x)$ esiste k tale che

$$f_k(x) > cs(x)$$

e quindi

$$\cup E_k = \Omega.$$

Cos'i concludiamo che

$$\int f_k(x)\ m \geq \int_{E_k} f_k(x)\ m \geq c \int_{E_k} s(x)\ m.$$

Sappiamo inoltre (vedi Lemma 4.3.1) che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s(x)\ m = \int_\Omega s(x)\ m$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$\int_\Omega f_N(x)\ m \geq c \int_\Omega s(x)\ m - \varepsilon$$

e quindi

$$\int_\Omega f_k(x)\ m \geq c \int_\Omega s(x)\ m - \varepsilon, \ \ \forall k \geq N.$$

La disequazione

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\ m \geq c \int_\Omega s(x)\ m - \varepsilon, \ \forall c \in (0,1), \varepsilon > 0$$

implica

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\ m \geq \int_\Omega s(x)\ m.$$

□

D15 (Fatou):

Dimostrazione. Sia $g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x)$. Applicare il teorema di Beppo Levi per $g_k(x)$. □

D16 (Convergenza dominata):

Dimostrazione. Abbiamo la disequazione

$$|f_k(x) - f(x)| \leq 2g(x), \ \ \text{quasi ovunque in } \Omega.$$

Applichiamo Lemma di Fatou per la successione

$$h_k(x) = 2g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0 \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

In fatti, abbiamo

$$\liminf_{k\to\infty} h_k(x) = 2g(x)$$

e quindi Lemma di Fatou implica

$$2\int_\Omega g(x)\ m \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \{2g - |f_k - f|\}\ \ m \leq$$

$$\leq 2\int_\Omega g(x)\ m - \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\ m$$

Cosí possiamo scrivere

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\ m \leq 0$$

e quindi

$$\int_\Omega |f_k - f|\ m \to 0.$$

□

D17 (Fubini Tonelli):

DIM: Osservazioni: qui non serve $f \geq 0$ perché posso separare $f^+(x) = \sup(0, f(x))$
$f^-(x) = \sup(0, -f(x))$ e poi ricostruire $f(x) = f^+ - f^-$

Una funzione è sommabile se $\int_\Omega f^+(x) < \infty$, $\int_\Omega f^-(x) < \infty$

Per semplicità, possiamo quindi considerare $f(x,y) \geq 0$ q.o., ricordiamo che $f \geq 0$ q.o. è sommabile se $\sup\{\int_\Omega S(x)\,dm(x) \mid 0 \leq S(x) \leq f(x)\} < \infty$, e abbiamo che questo sup è $\int_\Omega f(x)\,dm$.

Lemma 3 ci dice che in un caso particolare vale F.T. e il caso è $f(x,y) = \mathbb{1}_S$ con S misurabile

$\Rightarrow$ possiamo considerare $S(x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{S_j}$ con S_j mis. (cioè S semplice) e $\cup S_j$ q. disg.

$\Rightarrow \iint S(x,y)\,dm_1 \otimes dm_2 = \int\left(\int S(x,y)\,dm_1\right)dm_2 = \int\left(\int S(x,y)\,dm_2\right)dm_1$

Applichiamo def di sommabilità x avere il caso generale ($f \geq 0$)

Ma ~~Per il lemma 2,~~ $\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dm_2$ e $\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dm_1$ sono misurabili? Sono integrabili? Nessuno me lo garantisce.

Proviamo ad approssimare f con una succ. di funzioni semplici (dal basso) per poter poi applicare il th di Lebesgue di convergenza dominata

x come misurabilità

Se f è misurabile $\Rightarrow$ possiamo costruire una succ di funzioni semplici $S_k(x,y)$ t.c. che $S_k(x,y) \nearrow f(x,y)$

Costruiamo per es. $S_k(x,y) = k\,\mathbb{1}_{\{(x,y) \mid f(x,y) > k\}} + \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k}$ (*)

E poi costruiamo $\mathbb{1}_{\{(x,y) \mid f(x,y) \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]\}}$ (*)

$\Rightarrow S_k(x,y) \to f(x,y)$

~~Applicando Lebesgue~~ dato che $S(x,y) = \sum_{1}^{N} c_j \mathbb{1}_{S_j}$

Si ripete il ragionamento (*) con S_k al posto di S e con Lebesgue facendo il limite passa dentro $\Rightarrow$ vale per f misurabile.

$\square$

D18 (Egorov):

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni k poniamo

$$B_{k,\varepsilon} = \{x \in \Omega; \exists j > k, \text{tale che } |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo

$$\cap_k B_{k,\varepsilon} = \emptyset.$$

Cosí per ogni $\delta > 0$ e per ogni ℓ possiamo trovare $N = N(\ell, \delta)$ tale che

$$m(B_{N,2^{-\ell}}) \leq \delta 2^{-\ell}.$$

Sia

$$B(\delta) = \cap_\ell B_{N,2^{-\ell}}.$$

Per ogni $x \in \overline{\Omega \setminus B}$ la successione $f_k(x)$ converge uniformamemnte su $\Omega \setminus B$. □

D19 (Sommabilità):

Idea: Siano $g_k(x) = \inf_{j \geq k} |f_j(x)| \Rightarrow g_k(x) \nearrow |f(x)|$ q.o.

Per Beppo-Levi, e per 1) $\Rightarrow \int g_k(x) \to \int |f(x)|$

2) $\Rightarrow \int g_k(x)dx \leq \int |f_k(x)| dx \leq C$ ma $\int g_k(x) \to \int |f(x)| \Rightarrow \int |f(x)| dx$

è limitato $\Rightarrow \int |f| dm(x) < C < \infty$

☑

D20 (Riemann)

DIM: Si basa sul criterio di sommabilità.

a ⇒ b) $s_N(x)$ somma inf. di Riemann
$S_N(x)$ " sup " " $\Rightarrow s_N(x) \leq f(x) \leq S_N(x)$ (1)

per ipotesi

Sia $P_N = \cup_k J_k$ partizione di I con $P_1 \subset P_2 \subset \ldots$ (sempre più fini) $\Rightarrow$ Somma inf $(P_N) = \sum_k \inf_{J_k} f \, \mu(J_k)$

$\Rightarrow s_N(x) = \sum_k \inf_{J_k} f \, \mathbb{1}_{J_k}$

Abbiamo quindi $s_N(x) \nearrow$ e $S_N(x) \searrow$, e hanno quindi limite puntuale $s_N \nearrow f_{low}$ e $S_N \searrow f_{up}$

Si ha ovviamente $f_{low}(x) \leq f(x) \leq f_{up}(x)$ (3)

Per il test di sommabilità, f_{low} + f_{up} sono sommabili

f int secondo Riemann: (1) $\Rightarrow s(P_N) \leq \int f \leq S(P_N)$ (2)

Lebesgue ora ci dice che prendendo il limite puntu a $\Delta x \in [\Delta x_j, b](P_N) \to \int f$ e $S(P_N) \to \int f$.

(2)+(3) $\Rightarrow \int f_{low}(x) \leq \int f(x)\,dx \leq \int f_{up}(x)$ ← secondo Lebesgue per f_{up} e f_{low}

non mi preoccupo in quale senso, quando gli altri

(2) $\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \left| \int f_{up}(x) - \int f_{low}(x) \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \int f_{low}(x)^{P^x} = \int f_{up}(x)^{P^x}$ (secondo Lebesgue)

$\Updownarrow$

$$\int \underbrace{f_{up}(x) - f_{low}(x)}_{g(x)}\,dx = 0$$

Se $g(x)$ è sommabile, $g(x) \geq 0$ q.o. $\int g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ q.o.

Quindi $E_k = \{x \mid g(x) > \frac{1}{k}\}$ ha misura zero

$\Rightarrow m(\bigcup_k E_k) = 0$ considerando $\bigcup_k E_k = F = \{x \mid g(x) > 0\}$

Dobbiamo concludere mostrando che $f|_{I \setminus F}$ è continua!

Ma $\int f_{low} = \int f_{up} \Leftrightarrow f_{low}(x) = f_{up}(x) = f(x)$ q.o.

e questo implica (b) mediante il teorema di Lusin, molto forte e utile: lo vedremo più tardi, ma dice che $\forall f$ sommabile è continua q.o.

facciamolo senza Lusin

$I, \quad P_1 \subset P_2 \subset \dots \quad S(P_N) \to 0$

$m(\partial P_N) = 0 \Rightarrow m(\bigcup \partial P_N) = 0$. Se $x \notin \bigcup \partial P_N$, allora

per (a) $f(x)$ è continua in $I \setminus \bigcup \partial P_N$

oss: questa parte mi può convertire

(b $\Rightarrow$ a) Analogo; sugli appunti.

Dare

MANCA UNA PARTE

D21 (Completezza Lp):

DIM. $f_{k_N}(x) = f_{k_1} + \dots + (f_{k_{N-1}} - f_{k_{N-2}}) + (f_{k_N} - f_{k_{N-1}})$

$g_N(x) = |f_{k_{N}} - f_{k_{N+1}}|$

Si ha che $g_{k_1} + g_{k_2} + \dots + g_{k_N} = S_N(x) \longrightarrow g(x)$

Ma $\int g_{k_N} = \int |f_{k_N} - f_{k_{N+1}}| < 2^{-N+1}$

Quindi $\sum_{j=1}^{N} \int |g_{k_j}| \, dx \leq 2$

$g \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow S_N(x) \to g(x)$ e $\int S_N(x) \leq C$

e questi valgono entrambi

Inoltre $f_{k_N}(x) \xrightarrow{\text{Lebesgue}} f \in \mathcal{L}^1$

Quanto vale $\int_\Omega |f_{k_N} - f(x)| \, dx$?

$f(x) = f_{k_1} + \dots + f_{k_N} - f_{k_{N-1}} + f_{k_{N+1}} - f_{k_N} + \dots$

$\Rightarrow f(x) - f_{k_N}(x) = f_{k_{N+1}} - f_{k_N} + f_{k_{N+2}} - f_{k_{N+1}} + \dots$

$\int |f(x) - f_{k_N}(x)| \leq \int |f_{k_{N+1}} - f_{k_N}| + \int |f_{k_{N+2}} - f_{k_{N+1}}| + \dots$

$\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{-j} < \varepsilon$ per N alto grande

Quindi oltre a convergere ptmente, converge nel senso di $\mathcal{L}^1$.

OSS: Sottosucc che conv $\Rightarrow$ la succ originale ha ! pto di acc. (di una succ di Cauchy)

$\Rightarrow$ (T) $\mathcal{L}^1(\Omega)$ è completo ⊠

Libro:

Lemma 4.8.1. *Se f_k é successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$ allora esiste sottosuccesione che converge q.o.*

Suggerimento. Sia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f_{N+1}(x)| dx \le 2^{-N}. \qquad (4.8.124)$$

come nel problema precedente. Possiamo considerare la successione

$$f_N(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{N-1} (f_{j+1}(x) - f_j(x)).$$

per la successione

$$g_N(x) = \sum_{j=1}^{N-1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)|$$

sappiamo che

$$g_N(x) \le g_{N+1}(x)$$

e

$$g(x) = \lim_{N \nearrow \infty} g_N(x) < \infty \; q.0.$$

La funzione g é sommabile, perche il teorema di Beppo Levi implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_N = \int_{\mathbb{R}^n} g$$

e

$$\sum_N \int_{\mathbb{R}^n} |g_N(x) - g_{N+1}(x)| dx \le \sum_N 2^{-N} \le 2.$$

Infatti se

$$E = \{x; g(x) = \infty\}$$

ha misura positiva, la funzione g non é sommabile. Cpsí deduciamo che

$$g_N(x) \to g(x) q.o.$$

e questo implica

$$f_N(x) \to f q.o.$$

□

Lemma 4.8.2. *Se f_k é successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$ allora esiste una sua sottosuccessione f_N ed esiste $f \in L^1$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f(x)| dx \to 0.$$

Suggerimento. Sia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f_{N+1}(x)| dx \le 2^{-N}. \qquad (4.8.125)$$

Possiamo considerare la successione

$$f_N(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{N-1} (f_{j+1}(x) - f_j(x)).$$

sappiamo che

$$g_N(x) \leq g_{N+1}(x)$$

e

$$g(x) = \lim_{N \nearrow \infty} g_N(x) < \infty \ q.0.$$

La funzione g é sommabile, perche il teorema di Beppo Levi implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_N = \int_{\mathbb{R}^n} g$$

e

$$\sum_N \int_{\mathbb{R}^n} |g_N(x) - g_{N+1}(x)| dx \leq \sum_N 2^{-N} \leq 2.$$

Infatti se

$$E = \{x; g(x) = \infty\}$$

ha misura positiva, la funzione g non é sommabile. Cpsí deduciamo che

$$g_N(x) \to g(x) q.o.$$

e questo implica

$$f_N(x) \to f \in L^1(\mathbb{R}^n) q.o.$$

Il teorema di Lebesgue della convergenza dominata implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f(x)| dx \to 0.$$

□

D22 (Holder):

Dimostrazione. La disequazione é ovvia se $p = 1$ o $p = \infty$. Sappiamo che

$$L^p_{semplice}(\Omega) = \{s(x) \in L^p(\Omega); s(x) \text{ é una funzione semplice}\}$$

e denso in L^p Cosi la disequazione segue dalla (4.9.126) e la densita dello spazio $L^p_{semplice}(\Omega)$ □

D23 (Minkowsky):

Dimostrazione. La disequazione é ovvia se $p = \infty$. Sappiamo che

$$L^p_{semplice}(\Omega, m) = \{s(x) \in L^p(\Omega, m); s(x) \text{ é una funzione semplice}\}$$

e denso in L^p Cosi la disequazione segue dalla (4.9.128) e la densita dello spazio $L^p_{semplice}(\Omega)$ □

D24 (Interpolazione):

Dimostrazione. Nella relazione

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f|^p dx = \int_\Omega \underbrace{|f(x)|^{p\theta}}_{u(x)} \underbrace{|f(x)|^{p(1-\theta)}}_{v(x)} dx$$

applichiamo la disequazione di Hölder (Lemma 4.9.1 con

$$\frac{1}{q} = \frac{p\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q'} = \frac{p(1-\theta)}{p_2}$$

e troviamo

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega)} \le \left(\int_\Omega u(x)^q dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega v(x)^{q'} dx\right)^{1/q'}$$

e usando le relazioni

$$\left(\int_\Omega u(x)^q dx\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{p\theta q} dx\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_1} dx\right)^{p\theta/p_1} =$$

$$= \|f\|^{p\theta}_{L^{p_1}(\Omega)}$$

e

$$\left(\int_\Omega v(x)^{q'} dx\right)^{1/q'} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{p(1-\theta)q'} dx\right)^{1/q'} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} dx\right)^{p\theta/p_2} =$$

$$\|f\|^{p(1-\theta)}_{L^{p_2}(\Omega)},$$

otteniamo (4.9.130). □

D25 (Lusin):

Dimostrazione. É sufficiente considerare il caso $f(x) \ge 0, q.o.$

Prima consideriamo il caso quando

$$f(x) = \mathbf{1}_E(x) \tag{4.10.137}$$

dove $E \subset K$ é misurabile. Usando Lemma 2.5.1 (per ogni insieme E misurabile esistono aperto $U \supseteq E$ e compattro $K_1 \subseteq K$, tale che $m(U \setminus K_1) \le \varepsilon$) per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$g_E(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, K) + d(x, U^c)}.$$

Si vede che $g \in C(K)$, e ponendo $V = U \setminus K$ troviamo un aperto tale che

$$m(V) \le \varepsilon \tag{4.10.138}$$

e

$$g_E(x) = 1 = f(x) \forall x \in E \setminus V.$$

Cosí la funzione g_E soddisfa anche la proprietá

$$|g_E(x)| \le |f(x)|. \tag{4.10.139}$$

Nello stesso modo, se

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j}, \tag{4.10.140}$$

dove E_j sono disgiunti, costruiamo $g_{E_j}(x)$ e troviamo aperti V_j tale che

$$m(V_j) \leq \frac{\varepsilon}{N}, \tag{4.10.141}$$

(M é un numero abbastanza grande) tale che

$$g_{E_j}(x) = f(x) \ \ \forall x \in E_j \setminus V_j.$$

La funzione

$$g(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j g_{E_j}(x)$$

adesso soddisfa le proprietá

$$g(x) = f(x) \ \forall x \in \cup_j (E_j \setminus V_j)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N} m(V_j) \leq \varepsilon.$$

Se f é sommabile, allora esiste una successione di funzioni semplici $s_k(x)$ tale che

$$0 \leq s_k(x) \leq f(x)$$

e

$$\int_K s_k(x) \ m(x) \leq \int_K f(x) \ m(x) \leq \int_K s_k(x) \ m(x) + \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{4.10.142}$$

Seguendo la dimostrazione del Lemma 4.8.1 (ogni successione di Cauchy in L^1 ha una sottosuccessione che converge puntualmente q.o.) possiamo concludere che

$$s_k(x) \nearrow f(x) q.o.$$

La funzione $s_k(x)$ ha la forma canonica

$$s_k(x) = \sum_{j=1}^{N_k} c_j \mathbf{1}_{E_{j,k}},$$

e $E_{j,k} \subset K$ sono misurabili e disgiunti per $j = 1, \cdots, N_k$. Per ogni k fissato siamo nel caso (4.10.140) e possiamo costruire per ogni $s_k(x)$ una funzione $g_k(x) \in C(K)$ ed un aperto V_k tale che

$$g_k(x) = f_k(x) \forall x \in (\cup_j E_{j,k}) \setminus V_k$$

e

$$m(V_k) \leq \varepsilon 2^{-k}.$$

Per la funzione g_k possiamo applicare il teorema di Egorov. $\square$