Analisi a più variabili:

Integrale di Lebesgue

Osservazione:
Ripasso delle definizioni di Algebre, σ-Algebre, misure additive, misure σ-additive, Proprietà della misura astratta, misura esterna.

Definizione (Insieme φ-misurabile, Carathéodory misurabile):
Un insieme $E \subseteq \Omega$ è φ-misurabile se e solo se:
$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E) \ \ \forall\, A \subseteq \Omega$

Teorema di Carathéodory (D1 ; 5.9):
Gli insiemi φ-misurabili sono una σ-algebra e φ ristretta agli insiemi misurabili è una misura completa numerabilmente additiva.

Costruzione della misura esterna:

Dati Ω insieme, A famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che $\emptyset \in \Omega$; $\bigcup_{E \in A} E = \Omega$; supponiamo di avere:
$m_0 : A \to [0, \infty]$ tale che $m_0(\emptyset) = 0$

Lemma (D2 ; 5.12):

La funzione $\varphi(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} m_0(A_j)\}$ con $A_j \in A$; $E \subseteq \bigcup_j A_j$ è una misura esterna di Ω

Definizione (Pre-misura):

La funzione $m_0 : S_0 \to [0, \infty]$ è una premisura se $E_j \in S_0$; $E = \bigcup_j E_j \in S_0$ unione disgiunta →
$m_0(E) = \sum_j m_0(E_j)$

Dove S_0 è un'algebra di sottoinsiemi tali che:
$E_1, E_2 \in S_0 \to E_1 \cup E_2 \in S_0$; $E \in S_0 \to E^C \in S_0$

Lemma (D3 ; 5.14):

Se m_0 è una pre-misura e $\varphi(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} m_0(A_j)\}$ con $A_j \in S_0$; $E \subseteq \bigcup_j A_j$ è la sua misura esterna allora:
$\varphi(E) = m_0(E)\ \forall E \in S_0$

<u>Unicità dell'estensione di Carathéodory:</u>

Data una premisura (Ω, S_0, m_0), possiamo mediante il teorema di Carathéodory definire una sigma algebra:
$S = \{E \subseteq \Omega \,|\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E) \;\; \forall\, A \subseteq \Omega\}$
Il teorema garantisce che:

S è una σ-algebra
$\varphi(E) = m_0(E) \;\; \forall\, E \in S_0$
$\varphi_{|S} = m$ è una misura σ-additiva

Supponiamo che esista una seconda misura $\widetilde{m}$ definita su S e tale che:

$\widetilde{m}(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E) \;\; \forall\, A \subseteq \Omega$
$\widetilde{m}$ è una misura σ-additiva

Lemma (D4 ; 5.15):

Vale $\widetilde{m}(E) \leq m(E) \;\; \forall\, E \in S$

Lemma (D5 ; 5.16):

Se $m(\Omega) < \infty$ allora $\widetilde{m}(E) = m(E) \;\; \forall\, E \in S$

Lemma di Dynkin (Classi monotone):

Definizione (π-Sistema):

E' una famiglia I di sottoinsiemi di un insieme Ω tali che:

$I \neq \emptyset$

$A, B \in I \rightarrow A \cap B \in I$

Definizione(λ-Sistema, Classe monotona):

E' una famiglia M di sottoinsiemi di un insieme Ω tali che:

$\Omega \in M$

$A, B \in M\ ; B \subseteq A \rightarrow B \backslash A \in M$

$\{A_n\} \in M\ ; A_n \subseteq A_{n+1} \rightarrow \bigcup A_n \in M$

Notazioni:

F π-Sistema su Ω allora $\sigma(F)$ è la più piccola σ-algebra che contiene F e $\lambda(F)$ la più piccola classe monotona che lo contiene.

Lemma delle classi monotone (D6 ; 5.18):

Se I è un π-Sistema contenente Ω allora si ha l'uguaglianza:

$\sigma(I) = \lambda(I)$

Misura di Lebesgue:

Richiami su intervalli, pluri-intervalli e misura d Peano - Jordan.
I pluri-intervalli formano un'algebra su cui la misura di Peano - Jordan è additiva.

Lemma (ND):

Se I, J sono pluri-intervalli chiusi allora $I \cup J = \overline{I \cup J}$ è ancora un pluri-intervallo e:
$m_0(I \cup J) \leq m_0(I) + m_0(J)$
Se $m_0(I \cap J) = 0 \rightarrow m_0(I \cup J) = m_0(I) + m_0(J)$
(m_0 è la misura di Peano - Jordan)

Algebra di Borel:

L'algebra di tutti i pluri-intervalli non è una σ-algebra ma $A = \{aperti\}$ lo è (e ne è generata).
Questa è detta Algebra di Borel.

Teorema (Premisura) (D7; 5.20 ; A.85):

La misura di Peano - Jordan $(\Omega, \sum_0 \ , m_0)$, con $\sum_0$ plurintervalli, è una premisura.
Cioè se $I = \bigcup I_j$ disgiunta tale che $I_j, I\ (unione\ finita) \in \sum_0 \ \rightarrow m_0(I) = \sum m_0(I_j)$

Corollario (Charatheodory):

$(\Omega, \sum_0 \ , m_0) \rightarrow_{estensione} \ (\Omega, \sum, m)$ misura di Lebesgue.

Ridefinizione misura interna:

Lavorando con la premisura di Peano Jordan su di un intervallo limitato e chiuso $(I_0, \sum_0 \ , m_0)$ ridefiniamo a misura esterna come:
$\varphi \mid \varphi_{|\sum_0} = m$ e $\varphi(A) \coloneqq \inf_{\substack{A \subseteq \cup E_j \\ E_j \in \sum_0}} \{\sum m_0(E_j)\}$ è una misura esterna grazie al lemma e seguendo l'approccio di Carathéodory introduciamo la definizione di Lebesgue misurabile.

Definizione (Lebesgue - misurabile):

$E \subseteq I_0$ è Lebesgue misurabile (equivalente φ-misurabile) se e solo se:
$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \backslash E)$; $\forall\ A \subseteq I_0$

Osservazione:

La famiglia $\sum$ degli $E \subseteq I_0$ per i quali è vera la proprietà precedente è una σ-Algebra (Per il teorema di Carathéodory) e $m(E) = \varphi(E)$ è una misura σ-additiva.

Definizione (Misura di Lebesgue):

La tripla $(I_0, \sum, m\ )$ con gli elementi definiti come sopra è la misura di Lebesgue su I_0. La m è detta misura di Lebesgue (Rispetto a m^* aggiunge la proprietà sub-additiva).

Osservazione:
La misura esterna collegata con la misura di Peano Jordan era:
$m^*(A) = \inf_{I \supseteq A} m_0(I)$ che non soddisfa la proprietà di sub additività numerabile,

Lemma (D8 ; 5.26):
Se $K \subseteq \Omega$ compatto allora $m^*(K) = \varphi(K)$

Teorema (D9 ; A.86):
$K \subseteq \Omega$ compatto $\rightarrow K$ Lebesgue - misurabile.

Osservazione:
$\varphi(A) = \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap K^C)$

Lemma necessario (D10 ; 5.29 ; A.97):
K compatto $\rightarrow \exists\ K \subseteq U$ tale che $\varphi(U \backslash K) \leq \varepsilon$

Corollario (D11 ; A.87):
Borelliani $\subseteq \sum$

Integrale di Lebesgue:

Definizione (Funzione semplice):
Una funzione si dice semplice se assume un numero finito di valori.

$$f = \sum c_i I_{E_i} \text{ con } E_i \cap E_j = \emptyset$$

Integrale funzioni semplici:

$$\int_\Omega S(x)dm(x) = \sum c_j m(E_j)$$

Teorema di approssimazione mediante funzioni semplici (D12 ; A.88):
Se $f(x) \geq 0 \text{ q.o. } \forall x \in \Omega$ è misurabile allora:

$\exists S_k \nearrow f$ successione di funzioni semplici.

Definizione (Quasi ovunque):
Una proprietà è vera quasi ovunque se è vera a meno di un insieme a misura nulla.

Lemma misurabili (D13 ; A.89):
Siano E_k insiemi misurabili tali che $E_k \subseteq E_{k+1}$; sia $E = \bigcup E_k$; $E_k \nearrow E$, allora:

$$\int_{E_k} S(x)dm(x) \to \int_E S(x)dm(x)$$

Definizione (Funzione sommabile):
Una funzione $f(x) \geq 0$ q.o. si dice sommabile se:

$$\sup\left\{\int_\Omega S(x)dm \mid S(x) \text{ semplice} \,; 0 \leq S(x) \leq f(x) \text{ q.o.}\right\} < \infty$$

Questo sup si denota come:

$$\int_\Omega f(x)dm < \infty$$

Teorema di Beppo - Levi (D14 ; A.89 ; 5.65):
Dato uno spazio di misura e una successione di funzioni sommabili $f_k(x) \geq 0$ | $f_k(x) \nearrow f(x)$ q.o. con $f(x)$ sommabile, allora:

$$\int_\Omega f_k(x)dm \to \int_\Omega f(x)dm$$

Definizione (Componenti positive e negative):
$f_+(x) = f(x)I_{f(x)\geq 0}$
$f_-(x) = -f(x)I_{f(x)<0}$

Ogni funzione $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$

Teorema di Fatou (D15 ; A.91 ; 5.66):
Dato uno spazio di misura, se $f_k(x) \geq 0$ q.o. sono misurabili e $f(x) = \lim_{k\to\infty} \inf f_k(x)$ allora:

$$\int_\Omega f(x)dm \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega f_k(x)dm$$

Teorema di Lebesgue (Convergenza dominata) (D17 ; A.91 ; 5.66):
Dato uno spazio di misura e una successione $f_k(x)$ sommabili tali che:

$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$

$\exists\, g$ sommabile tale che $|f(x)| \leq g(x)$

Allora:

f è sommabile e $\int_\Omega f(x)dm = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dm$

Teorema di Fubini - Tonelli (D17 ; A.94):
Se $f(x,y): \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ è sommabile e $m_1(\Omega_1)\,; m_2(\Omega_2) < \infty$ allora:

La funzione $y \to f(x,y)$ è m_2-sommabile

La funzione $x \to f(x,y)$ è m_1-sommabile

$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)dm = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) dm_2 \right) dm_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) dm_1 \right) dm_2$

Lemma (ND A.93):
Se $F: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ è misurabile allora:

$f_x(y)$ è m_2-misurabile

$f_y(x)$ è m_1-misurabile

Integrale di Lebesgue:
$\left(\mathbb{R}^n, \sum \ , m \text{ (o } dx)\right)$ con l'algebra di Borel ; $B \subseteq \sum$; $dx = m$ misura.
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f: K \to \overline{\mathbb{R}}$
Estendiamo f a:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} \text{ definita su tutto } \mathbb{R}^n$$

Si ha che f è misurabile su $K \leftrightarrow \tilde{f}$ lo è su tutto $\mathbb{R}^n$

Lemma di Egorov (D18 ; A.96 ; 5.70):
Se $f_j(X) \to f(x)\ \forall\, x \in K$ compatto, con f_j Lebesgue - misurabili, allora:

$\forall\, \delta > 0\ \ \exists\, K_0 \subseteq K \mid m(K_0) < \delta$ e $f_j(x) \to_{uniformemente} \ \ f(x)$ in $K \backslash K_0$

Test di sommabilità (D19 ; A.97):
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ed m la misura di Lebesgue:
Se:

$\exists\, f_k(x)$; $f_k \to f$ q.o.
$\exists\, c \in \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f_k(x)|\, dm < c$

Allora:

f è sommabile.

Rapporto tra integrale di Riemann e di Lebesgue:
Teorema (D20 ; A.97):
Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ appartenente ad L^1 (sommabile secondo Lebesgue). Allora sono equivalenti:

f è Riemann - integrabile
$\exists F \subseteq I \mid f_{|I \backslash F}$ è continua e $m(F) = 0$

<u>Analisi a più variabili:</u>

Spazi L^p e Serie di Fourier

Spazi L^p (Spazi di Lebesgue):

Dato (Ω, S, m) spazio di misura con m misura σ-additiva; $1 \leq p < \infty$, f funzione misurabile su Ω a valori reali o complessi.

Definizione (norma L^p):

$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}}$

Definizione (Spazio delle funzioni a p-esima potenza sommabile):

$L^p(\Omega, m) = \{f \mid \|f\|_p < \infty\}$

Osservazione:

Siccome $\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ e l'insieme è chiuso per prodotto per scalare allora:

$L^p(\Omega, m)$ è uno spazio vettoriale complesso.

Somma di funzioni p-sommabili è p-sommabile.

La norma è completa quindi $L^p(\Omega, m)$ è uno Spazio di Banach.

Osservazione:

E' una seminorma perché esistono funzioni nulle quasi ovunque, identificando due funzioni se la norma L^p della differenza è nulla allora questa è una norma.

Norma L^∞ (Uniforme):

$\|f\|_\infty \coloneqq \inf\{C \geq 0 \,;\ |f(x)| \leq C \text{ quasi ovunque}\}$

Osservazione:

$L^\infty(\Omega, m)$ è uno spazio di Banach dove le funzioni sono limitate quasi ovunque.

Se Ω è compatto questo spazio contiene come spazio proprio lo spazio delle funzioni continue.

<u>Completezza dello spazio L^p:</u>

Lemma (D21 ; A.101 ; 5.78):

Se f_k è una successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$ allora esiste una sottosuccessione che converge quasi ovunque.

Completezza:

Se f_k è una successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$ allora esiste una sottosuccessione f_N ed una $f \in L^1$ tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f(x)|dx \to 0$$

<u>Disuguaglianza negli spazi L^p:</u>

Disuguaglianza di Holder (D22 ;5.81):

$f \in L^p(\Omega)$; $g \in L^{p'}(\Omega)$, si ha che:

$$fg \in L^1(\Omega)$$
$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Disuguaglianza di Minkowsy (D23 ; 5.82):

$f, g \in L^p(\Omega)$; $p \geq 1$, allora:

$$f + g \in L^p(\Omega)$$
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Disuguaglianza di interpolazione (D23 ; 5.83):

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue - misurabile ; m misura di Lebesgue.

Se $f \in L^{p_1}(\Omega, m) \cap L^{p_2}(\Omega, m)$; $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ allora:

$$f \in L^{p_1}(\Omega, m) \text{ e } \forall\, p \in (p_1, p_2)$$
$$\|f\|_p^p \leq \left(\|f\|_{p_1}\right)^{\theta}\left(\|f\|_{p_2}\right)^{1-\theta}$$

Con $\theta \in (0,1) \mid \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$

Teorema di Lusin (D24 ; 5.87):

Se f è sommabile su (K, S, m) con $m = dx$ misura di Lebesgue e $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto; allora $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g: K \to \mathbb{R}$ ed esiste un chiuso $F \subseteq K$ tale che $f(x) = g(x)$ su $K \backslash F$ con $m(F) < \varepsilon$

Corollario:

Se f è Lebesgue - sommabile su $\mathbb{R}^n$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists g$ continua a supporto compatto tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|dx \leq \varepsilon$$

Osservazione:

$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f(x) \in C(\mathbb{R}^n) \mid f(x) \text{ ha supporto compatto}\}$

$\forall\, p \in [1, \infty[\ \ C_0(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$

Serie di Fourier:

Definizione (Funzione periodica):
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se $f(t+T) = f(t) \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$

Data la misura di Lebesgue su $[0,T] \subseteq \mathbb{R}$ possiamo considerare:

$$M_{per}\,([0,T]) = \{f \mid f \text{ misurabile e } T - \text{periodica q. o.}\}$$

Definizione (Funzioni L^p periodiche):
$f \in M_{per}\,([0,T])$ è in $L^p\,(0,T)$ se:

$$f(x)I_{[0,T]}(x) \in L^p\,(\mathbb{R})$$

Osservazione:
Possiamo imporre $T = 2\pi$.
In questo caso valgono:

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$$
$$\int_0^{2\pi} f(t-u)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt \ \forall \ u \in T$$
$$\int_0^{2\pi} f(-t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$$

Definizione (Polinomio trigonometrico):
E' una combinazione lineare del tipo:

$$P_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt} \ \ \forall \ t \in [0,2\pi] \ ; a_k \in \mathbb{C}$$

Osservazione:
Il sistema $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è ortonormale in $L^2(0,2\pi)$

Definizione (Grado del polinomio trigonometrico):
E' il più grande intero N per il quale a_N o a_{-N} è diverso da 0.

Osservazione (Algebra commutativa):
I polinomi trigonometrici sono un'algebra commutativa:

$P_N \ ; Q_M \in P \to$

$$P_N + Q_M \in P$$
$$cP_N \in P$$
$$P_N Q_M = Q_M P_N \in P$$

Osservazione:

$P_N \in \mathbb{R} \leftrightarrow a_k = \overline{a_{-k}}$

$P_N \geq 0 \leftrightarrow \exists Q_N | P_M = Q_M \overline{Q_M}$

Definizione (Coefficiente di Fourier):
Data $f \in L^1(0,2\pi)$, il coefficiente k-esimo di Fourier è:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, e^{itk}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

Definizione (Serie di Fourier):
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{itk}$

Definizione (Somma N-esima parziale):
$P_{N,f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{itk}$
E' detto N-esimo polinomio trigonometrico associato ad f.

Osservazione:
$L^2(0,2\pi) \subseteq L^1(0,2\pi)$; in generale $1 \le p < q < \infty \to L^\infty(0,2\pi) \subseteq L^q(0,2\pi) \subseteq L^p(0,2\pi)$
Possiamo definire i coefficienti di Fourier $\forall\, f \in L^2(0,2\pi)$

Disuguaglianza di Bessel:
$\forall\, f \in L^2(0,2\pi)$ vale:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$$

Teorema di Riemann - Lebesgue:
$\forall\, f \in L^2(0,2\pi)$ vale:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

Definizione (Nucleo di Dirichlet):
$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{itk}$

Proprietà:
Il nucleo di Dirichlet è reale $\forall\ t \ \in [0,2\pi]$

$$D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}} & \\ 2N+1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 2\pi$

Polinomio trigonometrico mediante nucleo di Dirichlet:
$P_{N,f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_N(t-s)ds$

Identità:
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(t-s)ds$

__**Teorema di convergenza:**__
Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione 2π-periodica e localmente Holderiana di ordine $a \in \,]0,1[$ allora:
$\lim_{N\to+\infty} P_{N,f}(t) = f(t)$

Prodotto di convoluzione:

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue e 2π-periodiche. Il prodotto di convoluzione di f e g:

$$f * g(t) = \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)ds$$

Osservazione:

$$f * g(t) = \int_a^{a+2\pi} f(t-s)g(s)ds$$

Proprietà:

$f * g$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e 2π-periodica.

Date tre funzioni continue e 2π-periodiche f, g, h:

Associativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$
Commutativa: $f * g = g * f$
Distributiva: $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$

Derivata:

$(f * g)'(t) = f' * g(t) = f * g'(t)$

Proposizione:

$f \in L^2(0,2\pi)$; g una funzione continua in $\mathbb{R}$ e 2π-periodica, allora $f * g$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e 2π-periodica.

Disuguaglianza di Young:

$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$; $f \in L^q$; $g \in L^r$; $f * g \in L^p$

$\|f * g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r$