APV - 4 - DIMOSTRAZIONI:

D1:

Esempio:

Esempio 1.6.0.2. *Sia $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 2\}$ Per ogni punto $x \in U$ possiamo definire il cammino*

$$\varphi_x(t) = (tx_1, x'), \quad t \in [0,1], \quad x' = (x_2, \cdots, x_n).$$

Il cammino

$$\underbrace{\varphi_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n}_{\gamma_1(x)}$$

permette di definire

$$F(x) = \int_{\gamma_1(x)} \omega$$

per ogni 1− forma $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x)dx_j$ in U (che é in classe C^0 per esempio). Abbiamo

$$F(x) = \int_0^1 \omega_1(tx_1, x')x_1 dt = \int_0^{x_1} \omega_1(s)ds$$

e quindi abbiamo

$$\partial_{x_1} F(x) = \omega_1(x), \ \forall x \in U.$$

L'integrale dipende della orientazione della curva γ.

Dim:

Idea della dimostrazione. **a)** $\Longrightarrow$ **b)** Se ω é esatta allora esiste una funzione (campo scalare) $G : U \to \mathbb{R}$ tale che

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x)dx_j = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} G(x)dx_j.$$

Sia

$$\underbrace{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n}_{C}$$

una curva chiusa, cioé $\varphi(a) = \varphi(b)$. Allora la derivata della funzione composta di G e $\varphi(t)$ e:

$$\frac{\mathrm{d}\, G(\varphi(t))}{\mathrm{d}\, t} = \nabla G(\varphi(t))\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Integrando su C otteniamo

$$\int_C \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\, G(\varphi(t))}{\mathrm{d}\, t} dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

e usando il fatto che C é chiusa deduciamo $G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = 0$

b) $\Longrightarrow$ **c)** Per ipotesi abbiamo

$$C = C_1 + (-C_2)$$

é una curva chiusa, applicando **b)** insieme con Lemma 1.6.0.8 e Lemma 1.6.0.9, otteniamo

$$0 = \oint_C \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{-C_2} \omega = \int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega.$$

Questo dimostra **c)**.

c) $\Longrightarrow$ **a)**

Sia $x_0 \in U$ fisso e sia

$$F(x) = \int_{\gamma(x_0,x)} \omega,$$

dove $\gamma(x_0, x)$ é qualsiasi cammino tra x_0 e x. Dobbiamo dimostrare che

$$\partial_{x_j} F(x) = \omega_j(x). \tag{1.6.0.21}$$

Usando la proprietá di additivitá dell'integrale rispetto la somma dei cammini, possiamo scrivere

$$\int_{\gamma(x_0,x)} \omega = \int_{\gamma(x_0,x^*)} \omega + \int_{\gamma(x^*,x)} \omega$$

e vedere che (1.6.0.21) ed equivalente alla proprietá

$$\partial_{x_j} F^*(x) = \omega_j(x) \ \ \forall j = 1, 2, \cdots, n, \ \|x - x^*\| \leq \varepsilon \tag{1.6.0.22}$$

dove

$$F^*(x) = \int_{\gamma(x^*,x)} \omega$$

e x, x^* sono abbastanza vicino, cio'e

$$\|x - x^*\| \leq \varepsilon \implies x \in U.$$

Usando la costruzione dell'esempio 1.6.0.2 possiamo costruire cammino

$$\varphi_1(x) = x_1^* + t(x_1 - x_1^*), (x' - (x^*)')$$

Formula di Stokes - Green:

2.12 Formula di Stokes - Green

Lemma 2.12.0.31. *Se il punto $x \in Int(\Sigma)$ é un punto interno, W é intorno di x con parametrizzazione*

$$\varphi : U = I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \to W \cap \Sigma.$$

ed α é una forma con coefficienti con supporto in W allora

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = 0. \tag{2.12.0.53}$$

Idea della dimostrazione. Sia

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) dx_j.$$

Abbiamo l'identitá

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = \sum_{\ell,m=1}^{2} \int_{I_\varepsilon} G_{\ell m}(u) du_\ell \wedge du_m,$$

con

$$G_{\ell m}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} \alpha_j(\varphi(u)) \partial_{u_\ell} \varphi_i(u) \partial_{u_m} \varphi_j(u) =$$

$$\partial_{u_\ell} \left(\alpha_j(\varphi(u)) \right) \partial_{u_m} \varphi_j(u).$$

Abbiamo la relazione

$$\int_{I_\varepsilon} \partial_{u_\ell} \left(\alpha_j(\varphi(u)) \right) \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m =$$

$$= - \int_{I_\varepsilon} \left(\alpha_j(\varphi(u)) \right) \partial_{u_\ell} \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m. \tag{2.12.0.54}$$

grazie al fatto che la funzione

$$\alpha_j(\varphi(u))$$

ha supporto in I_ε. Tenendo conto che

$$\sum_{\ell,m=1}^{2} \partial_{u_\ell}\partial_{u_m}\varphi_j(u)du_\ell \wedge du_m = 0$$

otteniamo (2.12.0.53).

□

Lemma 2.12.0.32. *Se il punto $x \in \partial\Sigma$ é un punto della frontiera, W é intorno di x con parametrizzazione*

$$\varphi : U = I_\varepsilon^+ \subset \mathbb{R}^2 \to W \cap \Sigma.$$

ed α é una forma con coefficienti con supporto in W allora

$$\int_{\Sigma\cap W} d\alpha = \int_{\partial\Sigma\cap W} \alpha, \qquad (2.12.0.55)$$

dove $\partial\Sigma_k$ é con la parametrizzazione

$$\psi(u_1) = \varphi(u_1, 9) : I_\varepsilon^+ \cap \{u_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to W \cap \partial\Sigma.$$

Idea della dimostrazione. Sia

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)dx_j.$$

Abbiamo l'identitá

$$\int_{\Sigma\cap W} d\alpha = \sum_{\ell,m=1}^{2} \int_{I_\varepsilon^+} G_{\ell m}(u)du_\ell \wedge du_m,$$

con

$$G_{\ell m}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\alpha_j(\varphi(u))\partial_{u_\ell}\varphi_i(u)\partial_{u_m}\varphi_j(u) =$$

$$\partial_{u_\ell}\left(\alpha_j(\varphi(u))\right)\partial_{u_m}\varphi_j(u).$$

Abbiamo la relazione (2.12.0.56) se $\ell = 1$. Se $\ell = 2$ abbiamo

$$\int_{I_\varepsilon^+} \partial_{u_2}\left(\alpha_j(\varphi(u))\right)\partial_{u_1}\varphi_j(u)du_2 \wedge du_1 =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\alpha_j(\varphi(u_1)))\, \partial_{u_1}\varphi_j(u_1,0)du_1 - \int_{I_\varepsilon^+} (\alpha_j(\varphi(u)))\, \partial_{u_2}\partial_{u_m}\varphi_j(u)du_2 \wedge du_1 \tag{2.12.0.56}$$

grazie al fatto che la funzione

$$\alpha_j(\varphi(u))$$

ha supporto in I_ε^-. Tenedo conto che

$$\sum_{\ell,m=1}^{2} \partial_{u_\ell}\partial_{u_m}\varphi_j(u)du_\ell \wedge du_m = 0$$

otteniamo (2.12.0.59), perche

$$\int_{\partial\Sigma\cap W} \alpha = \int_{I_\varepsilon\cap\{u_2=0\}} (\alpha_j(\varphi(u)))\, \partial_{u_m}\varphi_j(u)du_m.$$

□

Possiamo unire i due Lemmi precedenti in una versione globale per una

$$\Sigma = Int(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

regolare orientabile e con bordo $\partial\Sigma$ e con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \cdots, \infty\}$$

localmente finito é partizione dell unita' subordinato a questo atlante localmente finito (Lemma 2.6.0.24)

Cosí abbiamo una famiglia di funzioni

$$\psi_k : \Sigma \to [0,1],$$

tale che

a) $\psi_k \in C^m(\Sigma)$;

b) $\mathrm{supp}\psi_k \subseteq W_k \cap \Sigma$;

c) per ogni $x \in \Sigma$ esiste al massimo numero finito di k tale che $\psi_k(x) \neq 0$;

d) $\sum_k \psi_k(x) = 1$.

Possiamo definire

$$\int_\Sigma d\alpha = \sum_k \int_\Sigma d\alpha^k \qquad (2.12.0.57)$$

$$\int_{\partial\Sigma} d\alpha = \sum_k \int_{\partial\Sigma} \alpha^k \qquad (2.12.0.58)$$

Ricordiamo che

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j$$

possiamo definire il differenziale di α che e 2 forma

$$\omega = d\alpha = \sum_{1\le i<j\le n} F_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\alpha_j(x) dx_i \wedge dx_j$$

dove

$$F_{ij}(x) = \partial_{x_i}\alpha_j(x) - \partial_{x_j}\alpha_i(x).$$

Lemma 2.12.0.33. *(Formula di Stokes - Green) Se*

$$\Sigma = Int(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

é una superficie regolare orientabile e con bordo $\partial\Sigma$ *e*

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j$$

é 1 - forma, allora

$$\int_\Sigma d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha. \qquad (2.12.0.59)$$