APV - 3 - DIMOSTRAZIONI:

D1:

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo un ricoprimento

$$U_j, j = 1, \cdots, N$$

di A con U_j intervalli e

$$\sum_{j=1}^{N} m(U_j) \leq \varepsilon.$$

Allora

$$U_j \times I$$

é un ricoprimento di $A \times I$ con

$$m(U_j \times I) = m(U_j)m(I)$$

tale che

$$\sum_{j=1}^{N} m(U_j)m(I) \leq \varepsilon m(I).$$

□

D2 (Unicità plurintervalli):

DIM: Sia $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$; scriviamo una partizione di ogni intervallo $[a_i, b_i]$: $P_1 = \{a_1 = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_{N_1}^{(1)} = b_1\}$ di $[a_1, b_1]$

$P_1 = \{\Delta_{1K};\ K = 1, \ldots, N_1\}$ dove $\Delta_{1K} = [x_{K-1}^{(1)}, x_K^{(1)}]$

Usando queste notazioni $\forall j = 1, \ldots, N$ si ottiene

$P_j = \{\Delta_{jK} \mid K = 1, \ldots, N_j\}$ con $\Delta_{jK} = [x_{K-1}^{(j)}, x_K^{(j)}]$ partizione di $[a_j, b_j]$

Se considero $j_i = (1, \ldots, N_i)$, la partizione di I è

$P = \{\Delta = \Delta_{1j_1} \times \Delta_{2j_2} \times \ldots \times \Delta_{mj_m}\}$

Io ho $I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ q. disg, voglio costruire una partizione tale che

$I_j = \bigcup_{\substack{\Delta \subset I_j \\ \Delta \in P}} \Delta \quad \forall j = 1, \ldots, N$

Ci sono 2 possibilità: $\forall \Delta \in P, \forall I_j \begin{cases} \Delta \subset I_j \\ m(\Delta \cap I_j) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow m(I_j) = \sum_{\Delta \subset I_j} m(\Delta) \quad \forall j = 1, \ldots, N$

Quindi, $\forall \Delta \in P$
$$\begin{cases} \Delta \in \mathcal{J}_1 = \{\Delta \mid \Delta \subset I_1\} \Rightarrow \sum_{\Delta \in \mathcal{J}_1} m(\Delta) = m(I_1) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Delta \in \mathcal{J}_N = \{\Delta \mid \Delta \subset I_m\} \Rightarrow \sum_{\Delta \in \mathcal{J}_m} m(\Delta) = m(I_N) \end{cases}$$

Noi abbiamo $\sum_{\Delta \in P} m(\Delta) = m(I)$; se consideriamo:

$m(I) = \sum_{\Delta \in P} m(\Delta) = \sum_{\Delta \in \mathcal{J}_1} m(\Delta) + \ldots + \sum_{\Delta \in \mathcal{J}_N} m(\Delta) = m(I_1) + \ldots + m(I_N)$

Si ha la tesi: $m(I) = \sum_{j=1}^{N} m(I_j)$. ∎

D3 (2° Criterio di misurabilità):

DIM: ($\Rightarrow$) A misurabile; sia $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists I_1, I_2$ tali che (C1) sia soddisfatto; per I_1 e I_2 $\exists P$ partizione t.che

$$\Delta \in P \Rightarrow \begin{cases} \Delta \in I_2 & \text{cui } \begin{cases} \Delta \subset I_1 \\ \Delta \subset I_2 \setminus I_1 \end{cases} \\ m(\Delta \cap I_2) = 0 \end{cases}$$

Considerando $\alpha = \{\Delta \in P \mid \Delta \subset I_2, m(\Delta \cap I_1) = 0\}$

Si ha $\partial A \subset \bigcup_{\Delta \in \alpha} \Delta \Rightarrow \sum_{\Delta \in \alpha} m(\Delta) = m(I_2) - m(I_1)$

Ma $m(I_2) - m(I_1) < \varepsilon$ per ipotesi $\Rightarrow \partial A$ è contenuto in un insieme di misura $< \varepsilon$

$\Rightarrow m(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow m(\partial A) = 0$.

($\Leftarrow$) Possiamo costruire la partizione come sopra e avere $\sum_{\Delta \in \alpha} m(\Delta) = m(I_2) - m(I_1)$ per $I_1 \subset A \subset I_2$.

Siano $\beta_1 = \{\Delta \in P \mid \Delta \subset I_1\}$ e $\beta_2 = \{\Delta \in P \mid \Delta \subset I_2\}$: $\alpha = \beta_2 \setminus \beta_1$

$$\left.\begin{aligned} m(I_2) &= m\Big(\bigcup_{\Delta \in \beta_2} \Delta\Big) = \sum_{\Delta \in \beta_2} m(\Delta) \\ m(I_1) &= m\Big(\bigcup_{\Delta \in \beta_1} \Delta\Big) = \sum_{\Delta \in \beta_1} m(\Delta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m(I_2) - m(I_1) = \sum_{\Delta \in \alpha} m(\Delta) = m(\partial A) \underset{\varepsilon}{\wedge}$$

D4 (Assolutamente continue):

DIM: So che $m(A) = 0 \Rightarrow \exists$ ricoprimento finito di A, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} I_j$, tale che $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(I_j) < \delta$ piccola; inoltre $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} f(I_j)$

Grazie all'assoluta continuità, $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(I_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(f(I_j)) < \varepsilon$

e cioè $m(f(A)) < \varepsilon \Rightarrow m(f(A)) = 0$. ∎

D5 (Frontiera):

DIM: f integrabile (Riemann) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists P = \{\Delta_j \mid j = 1, \dots, N\}$ partizione di I_0 tale che $0 \le S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$

$\forall \Delta_j$ possiamo definire
$$\Delta_j \longmapsto m_j = \min_{\Delta_j} f(x)$$
$$\Delta_j \longmapsto M_j = \max_{\Delta_j} f(x)$$

$\Rightarrow \Gamma(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} (\Delta_j \times [m_j, M_j])$

Quindi $m(\Gamma(f)) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(\Delta_j \times [m_j, M_j]) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(\Delta_j) m([m_j, M_j]) =$

$= \sum_{j=1}^{\tilde{N}} m(\Delta_j)(M_j - m_j) = S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$ per hp

$\Rightarrow m(\Gamma(f)) = 0$. ∎

D6 (Sezione):

DIM: Per P-J, $\mathcal{U}$ misurabile $\Leftrightarrow m(\partial \mathcal{U}) = 0$, ma $\partial \mathcal{U} = \Gamma(f_1) \cup \Gamma(f_2)$ e quindi per il lemma precedente, $m(\partial \mathcal{U}) = m(\Gamma(f_1)) + m(\Gamma(f_2)) = 0$ ∎

D7 (Misura nulla):

DIM: ($\Rightarrow$) $m(K)=0 \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ t. che $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \varepsilon$

Ma posso scrivere $I_j = \bigcup_k \Delta_{jk}$ q. disg, con $\Delta_{jk} \in \mathcal{P}$ partizione, $\forall j$

Allora, $m(I_j) = \sum_k m(\Delta_{jk}) \Rightarrow K \subset \bigcup_{\Delta_{jk}\cap K \neq \emptyset} \Delta_{jk}$ unione q. disg.

Dato che $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \varepsilon$ per ipotesi, si ha

$$\sum_{j=1}^{N} m(I_j) = \sum_{j=1}^{N} m\Big(\bigcup_{\Delta_{jk}\cap K\neq\emptyset} \Delta_{jk}\Big) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\Delta_{jk}\cap K \neq \emptyset} m(\Delta_{jk}) = S(P, 1\!\!1_K) - s(P, 1\!\!1_K) < \varepsilon$$

$\Rightarrow 1\!\!1_K$ è integrabile (Riemann).

($\Leftarrow$) Completare.

Dimostrazione. Supponiamo (eq.PP6 4.5.0.4) e' vera.

Fissando $\varepsilon > 0$ é possibile trovare una partizione $\mathcal{P}$ di I tale che

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) < \varepsilon.$$

Se

$$I = \cup_j I_j$$

allora consideriamo

$$J_+ = \{j : I_j \cap K \neq \emptyset\}$$

L'unione

$$\cap_{j \in J_+} I_j$$

e' quasi disgiunta e contenente K Abbiamo

$$\sum_{j \in J_+} m(I_j) = S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) < \varepsilon.$$

Questo significa $m(K) = 0$.

Viceversa, siano

$$J_1, J_2, \cdots, J_N$$

intervalli con unione

$$\cap_{j=1}^{N} J_j$$

quasi disugiunta, contenente K é tale che

$$\sum_j m(J_j) < \varepsilon.$$

Sia I un intervallo che contiene tutti i J_j. Sia inoltre $\mathcal{P}$ una partizione di I tale che fra tutti intervalli in cui I e suddiviso vi siano anche i $J_1, \cdots, J_N$. Allora:

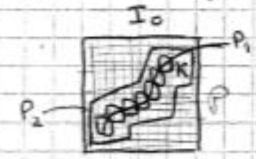
$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) = \sum_j m(J_j) < \varepsilon.$$

che implica (eq.PP6 4.5.0.4). $\square$

D8:

<u>DIM</u>: ($\Rightarrow$) Sappiamo che $\exists m(K) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P_1, P_2$ pluriintervalli tali che $P_1 \subset K \subset P_2$; cerchiamo $\mathcal{P}$ partizione fine di I_0, $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$

Siano $\alpha \subset \beta \subset \{1, \dots, N\}$



$P_2 = \bigcup_{j \in \beta} I_j$ q. disg

$P_1 = \bigcup_{j \in \alpha} I_j$ q. disg

K misurabile $\Rightarrow 0 \leq m(P_2) - m(P_1) < \varepsilon$

Ma $m(P_1) = \sum_{j \in \alpha} m(I_j)$ (1) $\quad$ (<u>SPG</u> non ho considerato gli I_j

$\quad m(P_2) = \sum_{j \in \beta} m(I_j)$ (2) $\quad$ t.che $I_j \cap K = \emptyset$)

Da qui vogliamo mostrare che $\mathbb{1}_K$ è integrabile.

$$S(P_2, \mathbb{1}_K) = \sum_{j \in \beta} m(I_j) \overbrace{\sup_{I_j} \mathbb{1}_K}^{=1} = \sum_{j \in \beta} m(I_j) \overset{(2)}{=} m(P_2)$$

$$s(P_1, \mathbb{1}_K) = \sum_{j \in \alpha} m(I_j) \underbrace{\inf_{I_j} \mathbb{1}_K}_{=1} = \sum_{j \in \alpha} m(I_j) \overset{(1)}{=} m(P_1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underset{S(P_2, \mathbb{1}_K)}{\underset{\shortparallel}{m(P_2)}} - \underset{s(P_1, \mathbb{1}_K)}{\underset{\shortparallel}{m(P_1)}} < \varepsilon$$

$$\underset{m(K)}{\underset{\shortparallel}{S(P_2, \mathbb{1}_K) - s(P_1, \mathbb{1}_K)}} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \mathbb{1}_K \text{ è int, e } \int_{I_0} \mathbb{1}_K \, dx = m(K)$$

($\Leftarrow$) si fa allo stesso modo. $\blacksquare$

D9 (Formule di riduzione):

Lemma:

Lemma 4.1.0.17. *L'integrale di Riemann di f nell'intervallo chiuso e limitato I esiste se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ di I tale che*

$$|S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Dim:

Dimostrazione. Possiamo usare il criterio di integrabilitá in senso di Riemann (Lemma l.crR 4.1.0.17) e per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo una partizione $\mathcal{P}$ del intervallo $I \times J$ tale che

eq.FF1 (4.7.0.13)

$$\iint_{I \times J} f(x,y)\,dxdy - \varepsilon < s(\mathcal{P}) < S(\mathcal{P}) \leq \iint_{I \times J} f(x,y)\,dxdy + \varepsilon.$$

Possiamo supporre

$$\mathcal{P} = \{I_j \times J_k, j = 1, \cdots, N, \ k = 1, \cdots, M\}$$

e

$$I = \cup_j \cup_k I_j \times J_k$$

unione quasi disgiunta. Per ogni k fissato e ogni $y \in J_k$ abbiamo

$$\sup_{x \in I_j} f(x,y) \leq \sup_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y)$$

eq.FF2

$$g(y) \leq \sum_j \sup_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) m(I_j), \tag{4.7.0.14}$$

e

$$\inf_{x \in I_j} f(x,y) \geq \inf_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y),$$

eq.FF3

$$g(y) \geq \sum_j \inf_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) m(I_j). \tag{4.7.0.15}$$

Le disequazioni (eq.FF2 4.7.0.14) implicano

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \sum_{jk} \left(\sup_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) \right) m(I_j) m(J_k) = S(P).$$

e

$$\sum_{k=1}^{N} \inf_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \geq \sum_{jk} \left(\inf_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) \right) m(I_j) m(J_k) = s(P)$$

quindi (eq.FF1 4.7.0.13) ci da

eq.FF5

$$\iint_{I \times J} f(x,y) dx dy - \varepsilon < s(\mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{N} \inf_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \tag{4.7.0.16}$$

$$\leq \int_J g(y) dy \leq \sum_{k=1}^{N} \sup_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \iint_{I \times J} f(x,y) dx dy + \varepsilon.$$

Da conseguenza, otteniamo

$$\iint_{I \times J} f(x,y) dx dy - \varepsilon \leq \int_J g(y) dy \leq \iint_{I \times J} f(x,y) dx dy + \varepsilon$$

che implica (eq.FU1 4.7.0.12). $\square$