Analisi a più variabili:

Misura di Peano - Jordan
ed
Integrale di Riemann

Definizione (Algebra):
$T \subseteq P(\Omega)$ è un'algebra se:
$A, B \in T \rightarrow A \cup B \in T$
$\emptyset, \Omega \in T$
$A \in T \rightarrow A^C \in T$
Se $A_i \in T \rightarrow \bigcup A_i \in T$ si dice σ-Algebra

Definizione (Misura):
$m: T \rightarrow [0, +\infty]$ additiva (σ-additiva) è una misura.

Definizione (Intervallo):
$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un intervallo.

Osservazioni:
La famiglia degli intervalli non è un'algebra.
Si può definire la misura di un intervallo: $m(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$
Vale $m(I \times J) = m(I)m(J)$

Definizione (Insieme a misura nulla di Peano - Jordan):
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme a misura nulla se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ un ricoprimento con intervalli $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ non necessariamente disgiunti tali che $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \varepsilon$

Lemma (D1 ; A.74 ; 3.25):
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura nulla $\rightarrow \forall\ I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo vale: $A \times I \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ha misura nulla.

Corollario:
$I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo $\rightarrow m(\partial I) = 0$

Proprietà:
$m(B) = 0\,; A \subseteq B \rightarrow m(A) = 0$
A_i finiti | $m(A_i) = 0 \rightarrow m(\bigcup A_i) = 0$

Algebra dei pluri-intervalli:

Definizione (Pluri-intervallo):
Un pluri-intervallo è un'unione finita di intervalli.

> **Osservazioni:**
> I plurintervalli definiscono un'algebra.
> Una misura sui pluri-intervalli è data dalla suddivisione in intervalli quasi disgiunti e dalla somma delle misure degli intervalli così definiti.

Definizione (Unione quasi disgiunta):
$\bigcup A_k$ è detta quasi disgiunta se $m(A_h \cap A_k) = 0$

Proprietà di suddivisione:
In $\mathbb{R}$:
> Ogni aperto si può scrivere come unione di aperti disgiunti.

In $\mathbb{R}^n$:
> Ogni aperto si può scrivere come unione quasi disgiunta di intervalli chiusi.
> Ogni intervallo chiuso si può scrivere come unione quasi disgiunta di intervalli chiusi.

Lemma di unicità (Corollario sui pluri-intervalli) (D2 ; A.76 ; 3.29):
Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo chiuso; $I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ unione quasi disgiunta di intervalli chiusi, allora:
$$m(I) = \sum_{j=1}^{N} m(I_j)$$

> **Corollario:**
> Due scomposizioni in intervalli chiusi quasi disgiunti di un Pluri-intervallo danno la stessa misura.
>
> **Osservazione:**
> La misura sui pluri intervalli è additiva.

Idea:
I plurintervalli sono un'algebra, vogliamo adesso estendere la misura su di essi definita ad un generico $A \subseteq I_0 \subseteq \mathbb{R}^n$

Definizione (Misura esterna):
$m^*(A) = \inf_{A \subseteq I} m(I)$ con I pluri-intervalli.
Subadditività finita: $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$
$A \subseteq B \to m^*(A) \leq m^*(B)$

Definizione (Misura interna):
$m_*(A) = \sup_{A \supseteq I} m(I)$ con I pluri-intervalli.
Superadditività finita: $m_*(A \cup B) \geq m^*(A) + m^*(B)$
$A \subseteq B \to m_*(A) \leq m_*(B)$

Osservazione:
$m^*(A) \geq m_*(A) \ \forall A \subseteq I_0$

Osservazioni:
Subadditività misura esterna: $m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2)$
Superadditività misura interna: $m_*(A_1 \cup A_2) \geq m_*(A_1) + m_*(A_2)$
Le misure interna ed esterna sono monotone.

Misura di Peano - Jordan:
$\left(F_{pluri-intervalli}, m, I_0\right) \subseteq (F_{misurabili}, m, I_0)$
$A \subseteq I_0$ è misurabile $\leftrightarrow m_*(A) = m^*(A)$ e in tal caso:
$m(A) := m_*(A) = m^*(A)$

Proprietà:
$A \cap B = \emptyset \to m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
$A \subseteq I_0$ misurabile $\to I_0 \setminus A$ misurabile.
A, B misurabili $\to A \cap B$ misurabile.

1° Criterio di misurabilità:
$A \subseteq I_0$ misurabile $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P_1 ; P_2$ plurintervalli tali che:
$P_1 \subseteq A \subseteq P_2 ; 0 \leq m(P_2) - m(P_1) \leq \varepsilon$

2° Criterio di misurabilità (D3 ; A.79 ; 3.38):
$A \subseteq I_0$ misurabile $\leftrightarrow m(\partial A) = 0$

Insieme di Cantor:

L'insieme di Cantor si definisce per ricorrenza sull'intervallo $[0,1]$ eliminando ogni volta il terzo centrale dei punti rimasti.

Proprietà:

E' più che numerabile.

Ha misura di Lebesgue nulla, considerando il complementare infatti ha misura:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1$$

L'insieme di Cantor è non vuoto (Contiene $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$ ... e tutti i decimali che scriti in base tre contengono solo cifre $\neq 2$)

Questo insieme ha parte interna nulla.

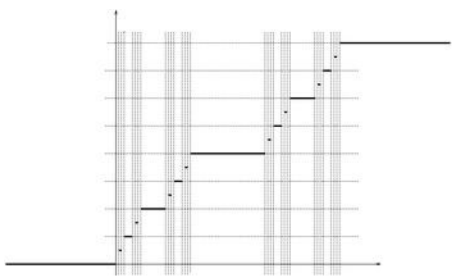
Questo è un esempio di misurabile che non sia un pluri-intervallo.

Infatti se $Cantor = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ avremmo almeno un $I_k = (a,b)$ con $a < b \rightarrow Cantor^{\circ} \neq \emptyset$ assurdo.

Funzione di Cantor:

Funzione definita per ricorrenza su $[0,1]$ come:

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{cases} f_k(3x) & x \in \left[\frac{0,1}{3}\right] \\ 1 & x \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \\ 1+3f\left(k-\frac{2}{3}\right) & x \in \left[\frac{2}{3},1\right] \end{cases} \end{cases}$$



Proprietà:

Continua in quanto limite uniforme di funzioni continue.

Crescente, surgettiva.

Non derivabile in nessun punto dell'insieme di Cantor.

Negli altri punti è derivabile con derivata 0 (Questo insieme ha misura nulla).

<u>Funzioni continue e proprietà:</u>

Osservazione:
$A \subseteq I_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso con $m(A) = 0$; $f: A \to B$ continua con $B \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto $\nrightarrow m(B) = 0$

Definizione (Assolutamente continua):
$f: I_0 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è assolutamente continua se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ e $\bigcup I_j$ numerabile | $\sum m(I_j) < \delta \to \sum m\left(f(I_j)\right) < \varepsilon$

Osservazione:
$f \in C^1(I_0 \subseteq \mathbb{R})$ crescente $\to$ Assolutamente continua.

Proprietà (D4 ; A.81 ; 3.42):
$A \subseteq \mathbb{R}^n$; $m(A) = 0$; $f: A \to B = f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ assolutamente continua $\to m(B) = 0$

Integrale di Riemann:
Sia $I_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $f: I_0 \to \mathbb{R}$ limitata; $P = \{\Delta\}$ partizione di I_0 formata da intervalli.

Somma superiore di Riemann:
$S(P, f) = \sum_{\Delta\in P}(\sup_{x\in\Delta} f(x))m(\Delta)$

Somma inferiore di Riemann:
$s(P, f) = \sum_{\Delta\in P}(\inf_{x\in\Delta} f(x))m(\Delta)$

> **Osservazione:**
> $\forall\, P, Q$ partizioni $s(P) \leq S(Q)$

Definizione (Riemann-integrabile):
f si dice Riemann-integrabile $\leftrightarrow \sup_P s(P, f) = \inf_P S(P, f)$
In tal caso:
$\int_{I_0} f(x)dx = \sup_P s(P, f) = \inf_P S(P, f)$

> **Osservazioni:**
> $f \to \int_{I_0} f(x)dx$ è un operatore lineare.
> $f \in C^0(I_0) \to \exists \int_{I_0} f(x)dx$
> f è integrabile se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P_1, P_2$ (anche coincidenti)| $0 \leq S(P_1, f) - s(P_2, f) \leq \varepsilon$

Proprietà (D5 ; A.82 ; 3.61):
$f: I_0 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabile $\to m\big(\text{frontiera}(f)\big) = 0$

Proprietà (D6 ; A.82 ; 3.61):
$f_1, f_2: I_0 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabili con $f_2(x) \leq f_1(x)\ \ \forall\, x \in I_0 \to M \coloneqq \{(x, y) \in\ \mid f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$ è misurabile.

Proprietà (Lineari):
$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, $\det(A) \neq 0$ allora: $m\big(A(I)\big) = \det(A)\, m(I)$

(K Compatto):

Proprietà (Compatti):
$f: K \subseteq_{compatto} \ I_0 \to \mathbb{R}$ è integrabile $\leftrightarrow$ $F: I_0 \to \mathbb{R}$ è integrabile, con $F(x) = f(x) I_K$
In tal caso:

$$\int_K f(x)dx = \int_{I_0} F(x)dx$$

Proprietà (D7 ; A.83 ; 3.64):
$K \subseteq I_0$ ha misura nulla$\leftrightarrow$ $\int_k I_k\,(x)dx = \int_{I_0} I_k\,(x)dx = \int_k 1dx = 0$

Proprietà (D8 ; A.84 ; 3.65):
$K \subseteq I_0$ è misurabile $\leftrightarrow$ I_k è integrabile e in tal caso: $m(K) = \int_{I_0} I_k(x)dx$

Definizione (Funzione semplice):
$f: I_0 \to \mathbb{R}$ è semplice $\leftrightarrow$ il codominio è un insieme finito e $K_j \coloneqq \{x \mid f(x) = c_j\}$ è un insieme misurabile.

Osservazione:
f semplice $\to$ $f = \sum c_j \ I_{K_j}$
Quindi è Riemann Integrabile.

Formule di riduzione (D9 ; 3.63 ; Teorema di Fubini Tonelli)):

Osservazione 4.7.0.3. *Sia $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ due intervalli chiusi. Se*

$$f(x,y) : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

é una funzione integrabile in senso di Riemann, allora NON é vero in generale che per ogni $y \in J$ la funzione

$$x \in I \longrightarrow f(x,y)$$

é integrabile in senso di Riemann. Piú precisamente sia

eq.FU2 (4.7.0.11)
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & per\ y = 1/3,\ x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

FT1 **Lemma 4.7.0.25.** *(Teorema di Fubini - Tonelli per integrale di Riemann) Sia $I \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}^m$ due intervalli chiusi. Se*

$$f(x,y) : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

é una funzione integrabile in senso di Riemann e se la funzione

$$y \in J \longrightarrow g(y) = \int_I f(x,y)dx$$

esiste ed é integrabile in senso di Riemann su J, allora vale la formula

eq.FU1 (4.7.0.12)
$$\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J g(y)dy = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx \right) dy.$$

Teorema di Fubini - Tonelli:
$I \subseteq \mathbb{R}^n$; $J \subseteq \mathbb{R}^m$ chiusi e limitati, allora:

$f: I \times J \to \mathbb{R}$ Riemann - integrabile in $I \times J$

$\forall\, y \in J$ fissato $\exists\, g(y) = \int_I f(x,y)dx$ e g è Riemann - integrabile.

Vale inoltre:

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J g(y)dy$$

Cambiamento di variabili in integrali multipli:
Siano U, V due aperti di $\mathbb{R}^2$ (Generalizzabile ad $\mathbb{R}^n$).
Sia $\varphi: V \to U$ un diffeomorfismo (Il cambiamento di coordinate).
Sia $f: U \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua.

Allora per ogni insieme integrabile secondo Riemann $E \subseteq U$ si ha:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(E)} f\big(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\big)\big|J_\varphi(u,v)\big|dudv$$

Notazione:
$\varphi^{-1}(E)$ si ricava calcolando esplicitamente l'immagine della funzione inversa.
$\varphi_i(u,v)$ è l'i-esima componente della funzione a più variabili φ
x, y sono le variabili originali della funzione, u e v quelle con cui voglio sostituirle.
Di conseguenza per poter calcolare il Jacobiano dobbiamo ricordarci che è una funzione che va dalle nuove variabili a quelle vecchie.

Un esempio di trasformazione scritta in modo lecito potrebbe essere:

$$\varphi(u,v) = (u \cdot \cos v\, , u \cdot \sin v)$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \end{cases}$$

Osservazione:
Se la trasformazione è scritta al contrario $(u,v) = g(x,y)$ dobbiamo per prima cosa invertirla.
$J_\varphi(u,v)$ è detto Jacobiano della trasformazione e si calcola come:

$$J_\varphi(u,v) \coloneqq \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$