APV - 2 - DIMOSTRAZIONI:

D1 (Soluzione integrale al problema di Cauchy):

DIM: $u_j'(t) = f_j(t, u(t))$

$\Downarrow$ teo fond calcolo integrale

$$\underbrace{u_j(t) - u_j(t_0)}_{u_0} = \int_{t_0}^{t} \underbrace{u_j'(s)}_{f_j(s,u(s))} ds \Rightarrow u_j(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f_j(s, u(s))ds$$

Questo vale $\forall j = 1, \dots, n$ e $\forall t \in I$; e il viceversa è la stessa cosa all'inverso.

D2 (Teorema di Cauchy):

Sia
$$T < \min\left\{a, \tfrac{1}{L}, \tfrac{b}{M}\right\}$$
dove
$$M \geq \max\{|f(t, y)| : (t, \mathbf{y}) \in I \times J\}.$$
Si noti che $I \times J$ é compatto ed il teorema di Weierstrass implica che $\mathbf{f}$ é limitata, cosí $M \in \mathbb{R}$ é ben definito. Ovviamente si puó supporre $M > 0$.

Sia $I_T = [t_0 - T, t_0 + T]$. Si puó considerare lo spazio di Banach
$$(X, \|\cdot\|_{C^0})$$
delle funzioni
$$\mathbf{y} : I_T \to \mathbb{R}^n$$
continue con la norma dell'estremo superiore,
$$\|\mathbf{y}\|_{C^0} = \sup_{t_0 - T \leq t \leq t_0 + T} \|\mathbf{y}(t)\|.$$
Consideriamo la palla, definita da:
$$B = B(\mathbf{u}_0, R) = \{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \mathbf{u}_0\|_{C^0} \leq R\}.$$
Essendo lo spazio X completo, e $B \subseteq X$ chiuso, allora anche quest'ultimo risulta essere uno spazio completo rispetto alla norma indotta.

Si procede quindi definendo l'operatore
$$K : B(\mathbf{u}_0, R) \to X,$$
detto "operatore di Volterra", tale che
$$K(\mathbf{y})$$
e' definito da:
$$K\mathbf{y} = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\mathrm{d}s$$

Si nota innanzitutto che K é ben definito e abbiamo la proprietá

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{u_0}, b)$$

si ha

$$K(\mathbf{y}) \in B(\mathbf{u_0}, b).$$

Infatti:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u_0}\|_{C^0} = \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \mathrm{d}s \right\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} \mathrm{d}s \right|.$$

Ma per ipotesi $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq M$, da cui si deduce che:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u_0}\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} \mathrm{d}s \right| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq b.$$

Una volta assicurata la buona definizione di K é sufficiente dimostrare che questa e' una contrazione su B per $T > 0$ abbastanza piccolo. Il teorema delle contrazioni infatti ci assicura l'esistenza di un unico punto fisso (o punto unito) di K in $B(\mathbf{u_0}, b)$, quindi nel nostro caso di una funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in C^0(I_T; \mathbb{R}^n)$$

tale che $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, cioe'

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) \mathrm{d}s.$$

definita sull'intervallo I_T, e risolvente dunque il problema di Cauchy (3.0.27). Tenendo conto delle ipotesi su $\mathbf{f}$ (in particolare la lipschitzianita') si puo' scrivere:

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} = \sup_{t \in I_T} \left\| \int_{t_0}^{t} [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s)) \mathrm{d}s] \right\| \leq \tag{3.1.28}$$

$$\leq \sup_{t \in I_T} \left| \int_{t_0}^{t} L \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\| \mathrm{d}s \right| \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0} \tag{3.1.29}$$

e quindi abbiamo

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0}$$

e poiche' $LT < 1$, K é una contrazione.

Versione quaderno:

DIM. Abbiamo a, b, L, e cerchiamo T.

Consideriamo $M = \sup_{(t,u) \in \bar{I} \times \bar{J}} \|f(t,u)\| \in \mathbb{R}$ per Weierstrass, dato che $\bar{I} \times \bar{J}$ è compatto.

Per $0 < T < a$ consideriamo $\{ y(t) \in C((t_0 - T, t_0 + T), \mathbb{R}^n) \mid \sup_{|t_0 - t| \le T} \|y(t) - u_0\| < R \}$

Se consideriamo lo spazio di Banach $X := (C([t_0 - T, t_0 + t], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^0})$ completo componente per componente, dove $\|\cdot\|_{C^0}$ è la norma del sup, ovvero $\|y\|_{C^0} = \sup_{|t_0 - t| \le T} \|y\| \Rightarrow$ si ha che l'insieme sopra descritto è una palla in X di centro u_0 e raggio R:

$B_T(u_0, R) = \{ y(t) \in X \mid \|y - u_0\|_{C^0} < R \}$

Scegliamo $R = b \Rightarrow B = B_T(u_0, b) = \{ y(t) \in X \mid \|y - u_0\|_{C^0} < b \}$

Dato $y \in B$, definisco $K(y)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$

Se trovassi una giusta scelta di T che rendesse K contrazione:

$\Rightarrow K$ avrebbe un unico pto fisso y, per il quale varrebbe

$y(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$: avremmo la tesi.

Vediamo quindi di trovare T che renda K contrazione.

1) Per quali $T > 0$ $K : B \circlearrowleft$?

$$\|K(y) - u_0\|_{C^0} = \sup_{|t - t_0| \le T} \|K(y)(t) - u_0\| = \sup_{|t - t_0| \le T} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right\| \le$$

$$\le \sup_{|t - t_0| \le T} \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\|\, ds \le \sup_{|t - t_0| \le T} M |t - t_0| \le TM \overset{?}{\le} b$$

$\Rightarrow$ si se $T \le \frac{b}{M}$.

2) Per quali $T > 0$ $\|K(x) - K(y)\| \le k \|x - y\|$ con $0 < k < 1$; $x, y \in B$?

Siano $y, \tilde{y} \in B$

$$\|K(y) - K(\tilde{y})\|_{C^0} = \sup_{|t - t_0| \le T} \|K(y)(t) - K(\tilde{y})(t)\| =$$

$$= \sup_{|t - t_0| \le T} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{y}(s))\, ds \right\| =$$

$$= \sup \left\| \int^{t} \left(f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) \right) ds \right\| \le$$

$\leq \sup_{|t-t_0|\leq T} \int_{t_0}^{t} \| f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s)) \| ds \leq$

$\leq L \sup_{|t-t_0|\leq T} \int_{t_0}^{t} \| y(s) - \tilde{y}(s) \| ds \leq LT \| y-\tilde{y} \|_C \overset{?}{<} \| y-\tilde{y} \|_C$

sì, se $T < \frac{1}{L}$.

Quindi in totale, perché $K(y)(t)$ sia una contrazione devo avere $T < (\frac{b}{M}, \frac{1}{L}, a) \Rightarrow K$ contrazione $\Rightarrow$ ha un unico pto fisso. ∎

18) In questa dimostrazione ci sono 3 cose importanti da ricordare:

1) Qual è lo spazio di Banach
2) Qual è la palla
3) Chi è la contrazione

D3 (Lemma di Gronwall):

Lemma 3.2.1. *Se* $T > 0$ *e*

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T) \to \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_j \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \tag{3.2.30}$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T).$$

Idea della Dimostrazione. La funzione

$$v(t) = \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|^2$$

soddisfa la disequazione

$$v'(t) \leq Cv(t), v(t_0) = 0.$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall e concludere che $v(t) = 0$. □

Idea della Dimostrazione. Sia

$$v(t) = \exp\left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \in I.$$

La funzione v soddisfa

$$v'(t) = f(t)\,v(t), \qquad t \in I^\circ,$$

con $v(a) = 1$ e $v(t) > 0$ per tutti $t \in I$. Abbiamo le relazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(t)\,v(t) - v'(t)\,u(t)}{v^2(t)} \le \frac{f(t)\,u(t)\,v(t) - f(t)\,v(t)\,u(t)}{v^2(t)} = 0, \qquad t \in I^\circ,$$

cosi' la funzione $u(t)/v(t)$ deve soddisfare la disequazione

$$\frac{u(t)}{v(t)} \le \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \qquad t \in I.$$

□

DIM. Sia $\omega(t) = A + \int_0^t \varphi(s) V(s) ds \in C^1([0,T]) \cap C^0([0,T])$

$\Rightarrow \omega'(t) = \varphi(t) V(t) \overset{(5)}{\le} \varphi(t)\omega(t)$

Voglio verificare che $\omega'(t) \le \varphi(t)\omega(t)$

$\Downarrow$

$\omega(t) \le \omega(0) e^{\int_0^t \varphi(s) ds}$] lemma di G (6) in forma differenziale

Se valesse (11) $\Rightarrow V(t) \le \omega(t) \le A e^{\int_0^t \varphi(s)ds}$ avremmo la tesi.

Supp. quindi di avere $\omega \in C^1([0,T]) \cap C^0([0,T])$

$\omega'(t) \le \varphi(t)\omega(t) \overset{?}{\Rightarrow} \omega(t) \le \underbrace{\omega(0) e^{\int_0^t \varphi(s)ds}}_{\chi(t) > 0} \Rightarrow \chi'(t) = \varphi(t)\chi(t)$

Consideriamo:

$$\left(\frac{\omega(t)}{\chi(t)}\right)' = \frac{\omega'(t)\chi(t) - \omega(t)\chi'(t)}{\chi^2(t)} \le \underbrace{\frac{\varphi(t)\cancel{\omega(t)\chi(t)} - \varphi(t)\cancel{\omega(t)\chi(t)}}{\chi^2(t)}}_{=0}$$

Derivata $<0 \Rightarrow$ funzione decrescente, e cioè:

$$\frac{\omega(t)}{\chi(t)} \le \frac{\omega(0)}{\chi(0) = \omega(0)} = 1 \Rightarrow \omega(t) \le \chi(t) = \omega(0) e^{\int_0^t \varphi(s) ds}$$

■

D4 (Teorema di Prolungamento):

Idea della dimostrazione. (prolungabilitá a destra della soluzione di un problema di Cauchy)

Sia

$$\mathcal{T} = \{T_1 \in (0, A); \exists u \in C((t_0 - T, t_0 + T_1); J) \text{ soluzione del Problema di Cauchy } \}$$

con

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\}.$$

Ovviamente $T \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ non e' vuoto ed é un insieme limitato. Sia

$$T_{max} = \sup_{T_1 \in \mathcal{T}} T_1.$$

Usando Lemma di Gronwall si puo vedere che

Lemma 3.4.1. *Se*

$$0 < T_1 < T_2, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{S}$$

e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T_j) \to \mathbb{R}^n$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T_j)\,; \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \tag{3.4.44}$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T_1)\,.$$

Cos'i abbiamo unica soluzione

$$u(t) \in C([t_0 - T, t_0 + T_{max}); \mathbb{R}^n)$$

che é soluzione di

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, u(\sigma) d\sigma$$

per

$$t \in [t_0 - T, t_0 + T_{max}).$$

Se esiste successione $\{t_k\}_{k\to\infty}$, tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \to u^*$$

e $(t_0 + T_{max}, u^*)$ é un punto interno di Ω allora possiamo definire

$$\widetilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*)$$

come l'unica soluzione locale del problema

$$\widetilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u^* + \int_{t_0 + T_{max}}^{t} f(\sigma, \widetilde{u}(\sigma; t_0 + T_{max}, u^*)) d\sigma$$

e usando il Lemma 3.3.2 concludiamo che

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u(t),$$

per $t < t_0 + T$ e t vicino a $t_0 + T_{max}$.

Allora

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

é prolungabile a destra di $t_0 + T_{max}$ che é in contradizione con la definzione di T_{max}.

Cosi la traiettoria

$$\{(t, u(t); t \in (t_0 - T, t_0 + T_{max})\}$$

deve avere punto di accumulazione sulla frontiera

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2.$$

$\square$

Versione quaderno:

<u>IDEA</u>: Prendiamo un certo T_1; $\exists$ sol. $u \in C([t_0 - T, t_0 + T_1), \mathbb{R}^n)$?

Riscriviamo $u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\,ds$ (1)

Sia $S = \{T_1 \mid \exists \text{ sol } u \in C([t_0 - T, t_0 + T_1), \mathbb{R}^n) \text{ di } (1)\}$

Si ha $T \in S \neq \emptyset$ per Cauchy. Supponiamo S limitato;

$T_{max} = \sup_S T_1$ definiamo T_{max} così.

Se $T_1 \in S \Rightarrow u_1(t)$ è sol su $[t_0 - T, t_0 + T_1)$

$T_2 \in S \Rightarrow u_2(t)$ è sol su $[t_0 - T, t_0 + T_2)$

senza perdita di generalità, $0 < T_1 < T_2$ e per Gronwall si ha $u_1(t) = u_2(t)$ su $[t_0 - T, t_0 + T_1) = [t_0 - T, t_0 + T_1) \cap [t_0 - T, t_0 + T_2)$

$\Rightarrow$ possiamo prolungare! Chi sarà T_{max}?

1) $T_{max} = a \Rightarrow$ prolunghiamo fino a $t_0 + a$, ok

2) $T_{max} < a \Rightarrow$ supp. esista $\lim_{t \to T_{max}} u(t) = u^*$

Se avessimo $\|u^* - u_0\| < b \Rightarrow$ potrei applicare il teorema di Cauchy con punto iniziale $u^* = u(T_{max}) \Rightarrow$ potrei prolungare la soluzione in un intorno $[T_{max} - \varepsilon, T_{max} + \varepsilon]$ ASSURDO! T_{max} non sarebbe il max valore per il quale $\exists$ sol in I.

$\Rightarrow \|u^* - u_0\| = b$ esce su ∂J.

$\blacksquare$ ~

D5 (Lemma della soluzione del sistema differenziale):

Idea della dimostrazione. Rescriviamo il problema di Cauchy nella forma integrale

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s)u(s)ds. \tag{4.2.92}$$

L'esistenza della soluzione locale

$$u(t) \in C(-T,T);\mathbb{R}^n)$$

segue dal Teorema di Cauchy. Per prolungare la soluzione usiamo lemma di Gronwal per la funzione

$$E(t) = \|u(t)\|^2.$$

Abbiamo la disequazione

$$E'(t) = 2\langle u(t), u'(t)\rangle = 2\langle u(t), A(t)u(t)\rangle \leq 2\|A(t)\|\|u(t)\|^2 = 2A(t)E(t).$$

Lemma di Gronwall implica

$$E(t) \leq E(0)e^{a(t)},\ a(t) = \int_0^t 2\|A(s)\|ds.$$

Il principio di prolungamento completa la dimostrazione. □

D6 (Determinante):

DIM1: Vediamo il caso 2×2:

$$I+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12}\\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22}\end{vmatrix} = 1+\varepsilon(a_{11}+a_{22})+O(\varepsilon^2)$$

$\Rightarrow$ vale per le matrici 2×2. ■

OSS: Conseguenza del lemma 1 è il fatto che $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$

Infatti per definizione $e^A = \lim_{k\to\infty}\left(I+\frac{A}{k}\right)^k$; fissiamo un k:

$$\Longrightarrow \det\left(I+\tfrac{1}{k}A\right)^k = \det\left(I+\tfrac{1}{k}A\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(I+\tfrac{1}{k}A\right) = 1+\tfrac{1}{k}\mathrm{tr}A + O\left(\tfrac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \det e^A \cong \lim_{k\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{k}\mathrm{tr}A\right) = e^{\mathrm{tr}A}$$

■

D7 (Lemma di Liouville):

Idea della dimostrazione. Sviluppando in serie per $t \sim t_0$ la soluzione di $f_j'(t) = A(t)f_j(t)$ si ottiene

$$f_j(t) = f_j(t_0)+f_j'(t_0)(t-t_0)+o(|t-t_0|) = f_j(0)+A(t_0)(t-t_0)f_j(t_0)+o(|t-t_0|),$$

ottenendo cosí anche lo sviluppo della matrice di $W(t)$

$$\Phi(t) = (I + A(t_0)(t-t_0))\,\Phi(t_0) + o(|t-t_0|)$$

Calcolando il Wronskiano e usando Lemma 4.2.2 si ottiene

$$W(t) = (1 + \mathrm{tr}A(t_0)(t-t_0))\,W(t_0) + o(|t-t_0|)$$

Dunque per un generico t_0

$$W'(t_0) = \mathrm{tr}A(t_0)W(t_0).$$

□

D8:

Dimostraazione. Per ogni soluzione

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{4.2.96}$$

possiamo trovare $c_1, \cdots, c_n$ tali che

$$u(0) = c_1e_1 + \cdots c_ne_n. \tag{4.2.97}$$

Allora

$$U(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(t)$$

é una soluzione di (4.4.102) tale che

$$U(0) = u(0).$$

Il teorema di inicitá della soluzione implica

$$U(t) = u(t).$$

□

D9 (Metodo di variazione delle costanti arbitrarie):

Dimostrazione. Abbiamo

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)f_j'(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^{n} A(t)c_j(t)f_j(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) + A(t)u(t)$$

e quindi (4.3.98) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)f_j(t) = F(t).$$

□

D10 (Principio del confronto):

Proof. **Idea della dimostrazione**

Supponiamo per assurdo che esista

$$t^* \in (t_0, t_1),$$

tale che (3.6.52) non é vera, cio'e

$$y(t^*) \geq Y(t^*). \tag{3.6.53}$$

Consideriamo allora linsieme non vuoto:

$$A = \{t \in (t_0, t_1); y(t) \geq Y(t)\}.$$

Sia

$$\theta = \inf_A . \tag{3.6.54}$$

Ovviamente $\theta > t_0$. Per ogni $\in (t_0, \theta)$ abbiamo

$$y(t) < Y(t)$$

e quindi

$$y(\theta) \leq Y(\theta)$$

e la definizione di θ implicano

$$y(\theta) = Y(\theta)$$

La condizione

$$y'(\theta) = f(\theta, y(\theta) < F(\theta, y(\theta) = F(\theta, Y(\theta) = Y'(\theta) \tag{3.6.55}$$

e le equazioni (3.6.49), (3.6.50) implicano che

$$y(t) < Y(t),$$

quando $t \in (\theta, \theta + \delta)$ e $\delta > 0$ é piccolo. La funzione $y(t) - Y(t)$ ha massimo locale in θ quindi

$$y'(\theta) = Y'(\theta)$$

ma questo contradice a (3.6.55). □

D11 (Stabilità asintotica):

DIM: Sia $u = v + u^*$, consideriamo i sistemi

$$\begin{cases} v' = Av + R(v) \\ v(0) = u_0 - u^* \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = u_0 - u^* \end{cases}$$

Per la stabilità asintotica devo stimare $\|v(t) - y(t)\|$ e $\|v(t)\|$

In realtà se dimostro che $\|v(t)\| < \varepsilon e^{-\sigma_0 t}$, questo mi implica che $\|v(t) - y(t)\| \longrightarrow 0$ per $t \to \infty$.

Abbiamo $\langle v', v \rangle = \left(\frac{\|v(t)\|^2}{2} \right)' := (E(t))'$

Dato che $v' = Av + R(v) \Rightarrow \left(\frac{\|v(t)\|^2}{2} \right)' = \langle Av, v \rangle + o(\|v\|^2)$

Per il lemma, $(E(t))' = \langle Av, v \rangle + o(\|v\|^2) \leq -\sigma_0 \|v\|^2 + o(\|v\|^2) \leq -\frac{\sigma_0}{2} \|v\|^2$

Cioè $(E(t))' \leq -\frac{\sigma_0}{2} \|v\|^2 = -\sigma_0 E(t) \Rightarrow E(t) \leq E(0) e^{-\sigma_0 t}$

Quindi $\|v(t)\| \leq \sqrt{2E(0) e^{-\sigma_0 t}} = \varepsilon e^{-\sigma t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$ ■