Analisi a più variabili:

Equazioni differenziali

Definizione (Equazione ordinaria):
Dato un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} = \left(\mathbb{R}_{tempo} \times \mathbb{R}_{funzione} \times \mathbb{R}^{n}_{derivate}\right)$
Un'equazione ordinaria è data da $F\left(t, u(t), u^{'}(t), \dots, u^{(n)}(t)\right) = 0$ con $F: \Omega \to \mathbb{R}$ continua.

La soluzione è data da $u(t): I \to \mathbb{R}$ | $u(t) \in C^{n}(I)$ e che soddisfi l'equazione $\forall\ t \in I \subseteq_{aperto} \mathbb{R}$

Definizione (Forma normale):
Sia $\omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto e $G: \omega \to \mathbb{R}$ continua ; l'equazione è in forma normale se :

$$u^{(n)}(t) = G\left(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right) ; \forall\ t \in I$$

Definizione (Sistema di equazioni ordinarie di ordine 1):
Se $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ si chiama sistema di equazioni ordinarie di ordine 1:

$$\vec{u}^{'}(t) = f(t, \vec{u}) ; t \in I$$

Definizione (Sistema autonomo):
Si dice che il sistema è autonomo se f non dipende da t.

Definizione (Problema di Cauchy).
Un problema di Cauchy è definito da:

$$\begin{cases} u^{'}(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} ;\ J = \{y \mid |y - y_0| < b\} ;\ I = \{t \mid |t - t_0| < a\} ; f: I \times J \to \mathbb{R}^{n}$$

Soluzione integrale di un problema di Cauchy (D1 ; A.57):
$u \in C^{1}(I, \mathbb{R}^{n})$ è soluzione del problema di Cauchy precedente $\leftrightarrow$
$\forall\ t \in I\ \ u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big) ds$

Teorema di Cauchy (D2 ; A.57 ; 2.17):
Sia $f: I \times J \to \mathbb{R}^{n}$ continua e lipschitziana (Ossia $\exists\ L > 0$ | $\|f(t,u) - f(t,v)\| \le L\|u - v\|$; $t \in I$; $u, v \in J$) allora:

$\exists\ T > 0$, $\exists\ y(t): (t_0 - T, t_0 + T) \to \mathbb{R}^{n}$ di classe C^{1} unica soluzione del problema di Cauchy.

Lemma di Gronwall (D3 ; A.59 ; 2.20) in forma integrale:

Sia $V \in C([0,T])$; $\varphi \in C([0,T])$ con $V, \varphi \geq 0$, allora $V(t) \leq A + \int_0^{t_0} \varphi(s)V(s)ds \to V(t) \leq Ae^{\int_0^{t_0} \varphi(s)ds}$

Conseguenza:

Se $y(t)$; $\tilde{y}(t) \in C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$ vale:

$y(t) - \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\right) ds$

$V(t) = \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| ds \leq^{lip} L \int_{t_0}^{t} V(s)ds \to^{Gronwall}$

$V(t) \leq 0 \leftrightarrow y(t) = \tilde{y}(t)$

__**Teorema di prolungamento (D4 ; A.60 ; 2.29):**__

Ipotesi di Cauchy:

f continua in $I \times J$

$\exists\, L \mid \|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$

Vale:

$\exists\, T_{\max}$, $\exists\, u(t) \in C([t_0 - T, t_0 + T_{\max}[, \mathbb{R}^n) \mid \lim_{t \to T_{\max}} u(t) \in \partial J$

Oppure:

$u \in C([t_0 - T, t_0 + a[, \mathbb{R}^n)$

Disuguaglianza di Young:

$A^{1-a}B^a \leq (1-a)A + aB$; $\forall\, a \in]0,1[$

Definizione (Sistema differenziale):

$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ con $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{1n}(t) \\ a_{n1}(t) & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$

Lemma della soluzione (D5 ; A.63 ; 2.54):

$\forall\, u_0 \in \mathbb{R}^n$; $\exists\, u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ soluzione del sistema differenziale.

Definizione (Wronskiano):

Vogliamo determinare f_i | $\begin{cases} f_i'(t) = A(t)f_i(t) \\ f_i(0) = e_i \end{cases}$, detta $\phi(t) = (f_1(t) \quad | \quad \cdots \quad | \quad f_n(t))$ e detto Wronskiano (W) il determinante di $\phi(t)$ allora:

f_i indipendenti $\leftrightarrow$ Wronskiano diverso da 0

Osservazione (Determinante) (D6 ; A.64 ; 2.56):

$A \in M_n \to \det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + O(\varepsilon) \to \det e^A = e^{tr(A)}$

Lemma di Liouville (D7 ; A.64 ; 2.57):

$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t)$

Osservazione (D8 ; A.66 2.58):

Se $u'(t) = A(t)u(t)$ le soluzioni sono tutte e sole della forma $\sum c_i f_i(t)$

Se $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$ le soluzioni sono tutte e sole della forma $\sum c_i(t) f_i(t)$

Metodo di variazioni delle costanti arbitrarie (D9 ; A.67 ; 2.59):

Dato il sistema differenziale:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + F(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Siano $f_i(t)$ le soluzioni dei sistemi associati:

$$\begin{cases} f_i'(t) = A(t)f_i(t) + F(t) \\ f_i(0) = e_i \end{cases}$$

Allora ogni soluzione u del sistema originario è della forma $u(t) = \sum c_i(t) f_i(t)$ con $\sum f_i c_i'(t) = F(t)$

Definizione (Punto stazionario o di equilibrio):

Dato $u'(t) = f(u(t))$ si dice punto di equilibrio u^* | $f(u^*) = 0$

Principio del confronto (D10 ; 2.34):

Lemma 3.6.1. *(Principio di confronto) Siano*

$$y(t); Y(t) : [t_0, t_1) \to V \subseteq \mathbb{R}$$

funzioni derivabili,

$$f, F : [t_0, t_1) \times V \to \mathbb{R}$$

funzioni continue, con

$$f(t, y) < F(t, y), \quad \forall (t, y) \in [t_0, t_1) \times V \tag{3.6.48}$$

tali che:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ \forall t \in [t_0, t_1), \tag{3.6.49}$$

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \ \forall t \in [t_0, t_1). \tag{3.6.50}$$

Se

$$y(t_0) \leq Y(t_0) \tag{3.6.51}$$

allora

$$y(t) < Y(t) \tag{3.6.52}$$

per ogni $t \in (t_0, t_1)$

Teorema di stabilità asintotica (D11 ; A.71):

Teorema: (di stabilità asintotica)
Se u^* è punto di equilibrio di $u' = f(u)$ tale che
$A = f'(u^*)$ soddisfa $\lambda \in$ Spettro $A \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda < -\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$,
allora u^* è asintoticamente stabile.