APV - 1 - DIMOSTRAZIONI:

D1 (Holder):

Idea della dimostrazione. Consideriamo solo il caso $1 < p, q < \infty$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Possiamo dimostrare la disequazione di Hölder solo per a_j, b_j, positivi per $j = 1, 2, \cdots, n$. La funzione $f(x) = x^p$ é convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$, cosi' possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1, \mu_j \geq 0 \Longrightarrow (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n)^p \leq \mu_1 x_1^p + \cdots \mu_n x_n^p. \quad (1.2.10)$$

Ponendo

$$a_j = \mu_j^{1/p} x_j, b_j = \mu_j^{1-1/p} = \mu_j^{1/q},$$

possiamo rescrivere (1.2.10) come segue

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^q = 1, b_j \geq 0 \Longrightarrow (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^p \leq a_1^p + \cdots a_n^p. \quad (1.2.11)$$

La proprietá (1.2.11) implica (1.2.9). □

D2 (Minkowsky):

Idea della dimostrazione. Abbiamo l'identitá

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^p = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^{p-1} a_j}_{S_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^{p-1} a_j}_{S_2}.$$

Applicando la disequazione di Hölder otteniamo

$$S_1 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{1/p},$$

dove $1/p + 1/q = 1$, da cui si ottiene

$$S_1 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^p \right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{1/p} = \|\vec{a} + \vec{b}\|_p^{p-1} \|\vec{a}\|_p$$

e

$$S_2 \leq \|\vec{a} + \vec{b}\|_p^{p-1} \|\vec{b}\|_p.$$

Ovviamente la disequazione

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|_p^p \leq \|\vec{a} + \vec{b}\|_p^{p-1} \left(\|\vec{a}\|_p + \|\vec{b}\|_p \right)$$

implica la disequazione di Minkowski. □

D3 (Teorema delle contrazioni):

Dimostrazione. La dimostrazione si fa in due passi. Iniziamo ad occuparci della esistenza, poi ricaveremo l'unicit.

Sia definita una successione ricorrente (o successione delle iterate) come segue:

$$x_1 = T(x_0)\,, \quad x_2 = T(x_1)\,, \quad \ldots, \quad x_n = T(x_{n-1})\,.$$

Sfruttiamo la metrica d e la proprietá di contrazione per valutare la distanza tra due punti successivi x_n, x_{n+1} :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq k\, d(x_{n-1}, x_n) = k\, d(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})) \leq$$

$$\leq k^2\, d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^n\, d(x_0, x_1)\,.$$

Prendiamo due numeri $m\,, n \in \mathbb{N}$ tali che $m < n$: attraverso la disuguaglianza triangolare e la propriet di cui sopra

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} k^i =$$

$$= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} k^{i+m} = k^m\, d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} k^i\,.$$

Per $n \to \infty$, l'ultima una serie geometrica che converge perch il termine generale compreso tra 0 e 1, quindi

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1)\, \frac{k^m}{1-k} \to 0 \qquad \text{per} \qquad m \to \infty$$

ottenendo il criterio di Cauchy per le successioni. Passiamo ora dalla completezza dello spazio X , la quale garantisce l'esistenza di

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Poich la T un'applicazione uniformemente continua, vale

$$T(x^*) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*\,.$$

L'unicit si dimostra per assurdo: poniamo che esista un secondo punto $y*$ tale che $T(y^*) = y^*$

$$d(x^*, y^*) \leq d(T(x^*), T(y^*)) \leq k\, d(x^*, y^*) \quad \Rightarrow \quad k \geq 1$$

che contraddice le ipotesi di partenza. □

D4 (Teorema di Ascoli Arzela):

DIM: La dimostrazione si divide in due passi:

1) Usando il fatto che f_n è uniformemente limitata, si dimostra che $\exists \{f_k\} \subset \{f_n\}$ e che $\exists f^*: \mathbb{Q} \cap [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_k(q) \longrightarrow f^*(q)$ $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$

ovvero, "aggiustiamo" f_n sui razionali

Supponiamo quindi $\{f_n\}$ uniformemente limitata;

sia $q_1, q_2, \dots, q_n$ la successione di tutti i razionali in $[a,b]$

Prendiamo q_1, e consideriamo $\{f_n(q_1)\}$.

Questa succ è limitata $\Rightarrow$ per Bolzano-Weierstrass, $\exists \{f_{1,n}\} \subseteq \{f_n\}$

Come la scegliamo?

$\{f_{1,n}\} = f_{1,1}(q_1), f_{1,2}(q_1), \dots, f_{1,n}(q_1)$ converge a un certo $f^*(q_1)$

Prendiamo $q_2 \Rightarrow \{f_{1,n}(q_2)\}$ è limitata; consideriamo

$\{f_{2,n}\} \subseteq \{f_{1,n}\} = f_{2,1}(q_j), f_{2,2}(q_j), \dots, f_{2,n}(q_j)$ per $j = 1, 2$;

converge ad un certo $f^*(q_2)$

Generalizzando, $\{f_{k,n}(q_{k+1})\}$ è limitata e consideriamo

$\{f_{k+1,n}\} \subseteq \{f_{k,n}\} \subseteq \dots \subseteq \{f_{1,n}\}$, con $f_{k+1,n}(q_j) \longrightarrow f^*(q_j)$

per $j = 1, 2, \dots, k+1$

Sia $\{f_{n,n}\}$ la diagonale; sappiamo che $\{f_{n,n}\} \subseteq \{f_{k,n}\}$ $\forall k$

$\Rightarrow \{f_{n,n}\} \subseteq \{f_n\}$

$\forall q_k$ $\exists$? il limite di $f_{n,n}(q_k)$? SI, basta scegliere $n \geq k+1$

e abbiamo $f_{k+1,n}(q_j) \longrightarrow f^*(q_j)$ e $\{f_{n,n}(q_k)\} \subseteq \{f_{k+1,n}(q_k)\}$

$\Rightarrow$ sottosuccessione convergente $f_{nn}(q_k) \longrightarrow f^*(q_k)$

2) Si dimostra che f_k converge uniformemente a $f^*(x)$ con $f^*(x) \in C([a,b])$ usando la densità di $\mathbb{Q}$.

DIM FACOLTATIVA

D5 (Funzioni in $\mathbb{R}^n$):

Dimostrazione. Sappiamo (vedi Problema 3.4.1) che la convergenza della successione

$$\vec{v}_1 = (a_1, b_1), \vec{v}_2 = (a_2, b_2), \cdots \vec{v}_n = (a_n, b_n) \cdots$$

in $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$, dove (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono due spazi metrici, significa che entrambi le successioni

$$a_1, a_2, \cdots a_n, \dots$$

e

$$b_1, b_2, \cdots b_n, \dots$$

sono convergenti in X_1 e X_2 rispettivamente. Il fatto che il teorema di Bolzano-Weierstrass vale in $\mathbb{R}$ implica che vale in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Possiamo concludere la dimostrazione applicando induzione in n. $\square$

Proof. Consideriamo solo

$$\inf_{x \in X} f(x) = L.$$

Il fatto che f é limitata implica che $L > -\infty$. La definizione di inf implica che esiste una successione minimzzante, cioé

$$x_k \in X, \; L \leq f(x_k) < L + \frac{1}{k}. \tag{3.8.24}$$

La successione x_k é in compatto X, cosi' possiamo estrare sottosuccessione

$$\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty},$$

tale che

$$\lim_{m \to \infty} x_{k_m} = x_* \in X.$$

Usando la continuitá della funzione f otteniamo

$$\lim_{m \to \infty} f(x_{k_m}) = f(x_*)$$

e le disequazioni (3.8.24) mostrano che

$$f(x_*) = L.$$

$\square$

Dimostrazione. Se K é compatto allora K é chiuso e limitato.

Viceversa, si consideri un insieme K limitato e chiuso, consideriamo il caso $n = 2$ per semplicitá.

L'insieme K é limitato, allora é contenuto in una palla $B(0, R)$. Si consideri una successione in K, che essendo in $\mathbb{R}^2$ avra' due coordinate:

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \forall k \in \mathbb{N}$$

e tale che:

$$\|x_k\| \leq R \Longrightarrow |x_k^{(1)}| \leq R, |x_k^{(2)}| \leq R.$$

Essendo quindi $x_k^{(1)}$ limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass é possibile estrarre una sottosuccessione che converga:

$$x_{k_m}^{(1)} \to x_\star^{(1)}.$$

La successione

$$y_m = x_{k_m}^{(2)}$$

é limitata quindi possiamo scegliere sottosuccessione

$$y_{m_\ell} = x_{k_{m_\ell}}^{(2)}, \lim_{\ell\to\infty} y_{m_\ell} = x_\star^{(2)}.$$

Cosí otteniamo due sottosuccessioni

$$\left\{x_{k_{m_\ell}}^{(1)}\right\}_{\ell=1}^{\infty}, \quad \left\{x_{k_{m_\ell}}^{(2)}\right\}_{\ell=1}^{\infty},$$

tali che

$$\lim_{\ell\to\infty} x_{k_{m_\ell}}^{(1)} = x_\star^{(1)}, \lim_{\ell\to\infty} x_{k_{m_\ell}}^{(2)} = x_\star^{(2)}.$$

In questo modo si puo ottenere per la sottosuccessione

$$x_{k_{m_\ell}} = \left(x_{k_{m_\ell}}^{(1)}, x_{k_{m_\ell}}^{(2)}\right)$$

la convergenza

$$\lim_{\ell\to\infty} x_{k_{m_\ell}} = x_\star, x_\star = \left(x_\star^{(1)}, x_\star^{(2)}\right).$$

Se K e chiuso ovviamente $x_\star \in K$. □

D6 (Equivalenza fra norme):

Proof. É sufficiente a vedere che la norma euclidea $\|\cdot\|_\infty$ ed equivalente a qualsiasi norma $\|\cdot\|$, cioé

$$\|x\| \leq C_1\|x\|_\infty \tag{6.3.32}$$

$$\|x\|_\infty \leq C_2\|x\|. \tag{6.3.33}$$

Per la prima disequazione (6.3.32) abbiamo

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$

e

$$\|x\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|\right) \|x\|_\infty.$$

Questa disequazione significa che

$$x \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \Longrightarrow x \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

é una funzione continua allora il teorema di Weierstrass implica esistenza di un punto y^* con $\|y^*\|_\infty = 1$ e tale che

$$C_* = \|y^*\| = \inf_{\|y\|_\infty=1} \|y\|,$$

ovviamente $\|y_*\| > 0$ e possiamo affermare

$$\|y\|_\infty = 1 \Longrightarrow \|y\| \geq C_*. \tag{6.3.34}$$

Per dimostrare (6.3.33) si prende $x \neq 0$ e si pone

$$y = \frac{x}{\|x\|_\infty}.$$

Abbiamo $\|y\|_\infty = 1$ e la proprieta (6.3.34) implica

$$\|x\| = \|\|x\|_\infty y\| = \|x\|_\infty \|y\| \geq \|x\|_\infty C_*$$

quindi vale (6.3.33) con $C_2 = 1/C_*$. □

D7 (Differenziabile → Continua):

DIM: lo sviluppo di f in x_0+h è $f(x_0+h) = f(x_0) + O(1)$ perché $O(\|h\|^a) \subset o(\|h\|^b)$ per $h \to 0$ con $a > b$

la nuova identità implica che quando $h \to 0$, $f(x_0+h) \to f(x_0)$ e quindi f è continua. ■

D8 (Teorema):

DIM: $F(x+h) = F(x) + L(h) + o(\|h\|) \Rightarrow$ prendendo u_j della base canonica

$F_j(x+h) = F_j(x) + \langle L(h), u_j \rangle + o(\|h\|) \Rightarrow F_j$ è differenziabile

Scegliendo $h = te_k \Rightarrow \|h\| = |t| \to 0$ e quindi

$F_j(x+te_k) = F_j(x) + \langle L(e_k), u_j \rangle t + o(t)$

$\Rightarrow \partial_{x_k} F_j(x) = \lim_{t\to 0} \dfrac{F_j(x+te_k) - F_j(x)}{t} = \langle Le_k, u_j \rangle$ esiste $\forall k, j$. ■

Quindi se $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{u_1, \dots, u_m\}$ sono le basi canoniche $\Rightarrow \langle L(e_k), u_j \rangle = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} & a_{kj} & \end{pmatrix} & k \\ j & \end{array}$

Resta quindi identificato in modo univoco L:

$$\boxed{L(x) = \sum a_{kj} x_k u_j}$$

Esempio: $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia F differenziabile, e v il gradiente

[COME TROVARE IL GRADIENTE]

$F(x_0+h) = F(x_0) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$

prendo $h = te_k$, ottengo $F(x_0+te_k) = F(x_0) + \langle v, e_k \rangle t + o(|t|)$

e quindi $\partial_{x_k} F(x_0) = \langle v, e_k \rangle \Rightarrow \boxed{v = \sum_{k=1}^{m} \partial_{x_k} F(x_0) e_k =: \nabla F(x_0)}$

D9:

Dimostrazione. Abbiamo la relazione

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) + o(t),$$

secondo la definzione della differenziabilita di f. La definizione della derivata direzionale ci da

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + tD_v f(\mathbf{x}) + o(t),$$

quindi

$$t\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = tD_v f(\mathbf{x}) + o(t)$$

e possiamo scrivere

$$\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = D_v f(\mathbf{x}) + o(1) \implies \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = D_v f(\mathbf{x}).$$

□

D10 (Differenziale totale):

Dimostrazione: solo per $n = 2$. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $\mathbf{x}^* \in U$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione tale che vi sia una palla

$$B(\mathbf{x}^*, r) \subseteq U$$

tale che esistano tutte le 2 derivate parziali in $B(\mathbf{x}, r)$ e

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x})$$

sono continui in $\mathbf{x}^*$. Vogliamo dimostrare che la funzione e' differenziabile in $\mathbf{x}^*$ Per ogni

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2)$$

poniamo

$$\mathbf{h}^* = (0, h_2)$$

e possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) + f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) - f(\mathbf{x}^*),$$

applicando il teorema di Lagrange abbiamo

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}*) = \partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2)h_1,$$

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) - f(\mathbf{x}^*) = \partial_{x_2} f(x_1^*, \eta)h_2,$$

dove $\xi = x_1^* + O(h_1), \eta = x_2^* + O(h_2)$. La continuitá di $\partial_{x_j} f, j = 1, 2$ in (x_1^*, x_2^*) implica

$$\partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x}*) + o(1)$$

e

$$\partial_{x_2} f(x_1^*, \eta) = \partial_{x_2} f(\mathbf{x}*) + o(1)$$

cosi otteniamo

$$\partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2)h_1 + \partial_{x_2} f(x_1^*, \eta)h_2 =$$

$$= \partial_{x_1} f(\mathbf{x}*)h_1 + \partial_{x_2} f(\mathbf{x}*)h_2 + o(\|\mathbf{h}\|).$$

L'identitá

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x}*)h_1 + \partial_{x_2} f(\mathbf{x}*)h_2 + o(\|\mathbf{h}\|)$$

mostra la differenziabilita' di f in $\mathbf{x}^*$. □

D11 (Derivazione funzione composta):

Dimostrazione. Differenziabilitá di f, g respettivamente in x_0 e y_0 si puo esprimere con le relazioni

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|),\ h \in \mathbb{R}^n,$$

$$g(y_0+k) - g(y_0) = g'(y_0)k + o(\|k\|),\ k \in \mathbb{R}^m.$$

Possiamo scegliere $k \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$y_0 + k = f(x_0+h) \Longrightarrow k = f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|).$$

Usando la proprietá d) di Lemma 8.1.1 si trova

$$\|k\| \le C\|h\| \Longrightarrow o(\|k\|) \subseteq o(\|h\|)$$

quindi

$$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)f'(x_0)h + o(\|h\|).$$

Il teorema é dimostrato. □

D12 (Teorema di Schwartz semplice):

Dimostrazione. Sia

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^{(0}, x_2^{(0)}) \in U$$

. Si sceglie *varepsilon* > 0 tale che (qui usiamo la norma euclidea!)

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \|x - x^0\| \le \varepsilon\} \subset U.$$

Si definiscono due funzioni φ e ψ come segue:

$$\varphi(t) = \varphi_s(t) = f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)} + s) - f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)}) \qquad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\psi(s) = \psi_t(s) = f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)} + s) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + s) \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Si prova facilmente che, fissati t e s nei rispettivi intervalli:

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = \psi_t(s) - \psi_t(0)$$

Inoltre, applicando due volte il teorema di Lagrange:

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = t\varphi'(\xi_1) = t\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \xi_1, x_2^{(0)} + s) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \xi_1, x_2^{(0)})\right] =$$

$$= ts\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0 + \xi_1, y_0 + \eta_1)$$

e analogamente:

$$\psi_t(s) - \psi_t(0) = st\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + \xi_2, y_0 + \eta_2)$$

con $|\xi_i| \le t$ e $|\eta_i| \le s$.

Facendo tendere t e s a 0 (e quindi anche ξ_i e σ_i) si ha la tesi. □

D13 (Formula di Taylor in più variabili):

DIM: $x_0 \in \mathcal{U}$; vogliamo scrivere Taylor in un intorno di x_0.
"Colleghiamo" x e x_0 per stimare $F(x)-F(x_0)$:

$x = x_0 + th$ con $0<t<\delta$, $\|h\|=1$

Consideriamo $h = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ per x vicino a $x_0 \Rightarrow x = x_0 + \delta h = \varphi(\delta)$

Abbiamo quindi $\varphi(t) := x_0 + th : (-\delta,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \varphi(\delta)$

Definiamo $g(t) := F(\varphi(t)) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

la formula di Taylor per g ci darà quella per F:

$\partial_t (F(\varphi(t))) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_{x_k} F)(\varphi(t)) \cdot \partial_t \varphi_k$ ⊛ dove $\partial_t = \frac{d}{dt}$, $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$

Sappiamo però che $\varphi(t) = x_0 + th \Rightarrow \varphi'(t) = h$, e quindi

⊛ $= \sum_{k=1}^{n} (h_k \partial_k F)(\varphi(t)) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k F\right)(\varphi(t))$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = \left(\sum h_k \partial_k\right) F \Big|_{x=\varphi(t)} := F_1(\varphi(t))$ ← è di nuovo una funzione composta

$\Rightarrow \frac{d}{dt} F_1(\varphi(t)) = \left(\sum h_k \partial_k\right) F_1 \Big|_{x=\varphi(t)} := F_2(\varphi(t))$ e così via...

$F_{j+1}(x) = \left(\sum h_k \partial_k\right) F_j(x)$

Quindi:

$g'(t) = F_1(\varphi(t)) = \left(\sum h_k \partial_k\right) F(\varphi(t))$

$g''(t) = F_2(\varphi(t)) = \left(\sum h_k \partial_k\right)^2 F(\varphi(t))$

$\vdots$

$g^{(m)}(t) = \left(\sum h_k \partial_k\right)^m F(\varphi(t)) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{h^\alpha \partial^\alpha F(\varphi(t))}{\alpha!} \cdot m!$; con $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$

Usiamo adesso Taylor (con resto di Peano) di g:

$g(\delta) = \sum_{m=0}^{N} \frac{g^{(m)}(0)\,\delta^m}{m!} + o(\delta^N)$

Osserviamo che $\|x-x_0\| = \delta$ perché $x = x_0 + \delta h$ con $\|h\|=1$

Inoltre, $\varphi(\delta) = x$, $\varphi(0) = x_0$ e $h = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \Rightarrow \delta^m h^\alpha = (x-x_0)^\alpha$ se $|\alpha| = m$

$\Rightarrow F(x) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{\partial^\alpha F(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} + o(\|x-x_0\|^N)$

D14 (Principio di Laplace):

DIM: 1) Con Taylor si ha:

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0,y_0) + \partial_x F(x_0,y_0)h + \partial_y F(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

Scegliendo $k=0$ la formula resta vera, e ponendo $h=t\neq 0$, e

$$\Rightarrow \frac{F(x_0+h, y_0)-F(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2}} = \frac{F(x_0+t,y_0)-F(x_0,y_0)}{|t|} \sim \partial_x F(x_0,y_0)+o(1$$

Passando al limite a dx e a sx cambia segno

$\Rightarrow \partial_x F(x_0,y_0)=0$.

Lo stesso vale per $\partial_y F(x,y)$.

2) $F(x_0+t,y_0)-F(x_0,y_0) = \partial_x F(\cancel{x_0,y_0})t + \partial_{xx}F(x_0,y_0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$\Rightarrow \frac{F(x_0+t,y_0)-F(x_0,y_0)}{t^2} = \frac{1}{2}\partial_{xx}F(x_0,y_0)+o(1)$$

Se a destra fosse positivo, $F(x_0+t,y_0)-F(x_0,y_0)\geq 0$ assurdo perché (x_0,y_0) è massimo $\Rightarrow \partial_x^2 F(x_0,y_0)\leq 0$

$\partial_y^2 F(x_0,y_0)\leq 0$ ■

D15:

DIM: Si ha:

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0,y_0) + \partial_x F(\cancel{x_0,y_0})h + \partial_y F(\cancel{x_0},y_0)k + \frac{\partial_x^2 F(x_0,y_0)h^2}{2} + \frac{\partial_y^2 F(x_0,y_0)k^2}{2} + \frac{2\partial_x\partial_y F(x_0,y_0)hk}{2} + o(h^2+k^2)$$

$$\Rightarrow F(x_0+h,y_0+k) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial_{xx}F(x_0,y_0)h^2 + 2\partial_{xy}F(x_0,y_0)hk + \partial_{yy}F(x_0,y_0)k^2}{2}$$

Ovvero sia $\boxed{H = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}}$ la MATRICE HESSIANA,

$$\Rightarrow F(x_0+h,y_0+k) = F(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left\langle H\binom{h}{k}, \binom{h}{k}\right\rangle + o(h^2+k^2)$$

Quindi $F(x_0,y_0)\geq F(x_0+h,y_0+k) \Rightarrow (x_0,y_0)$ è max. ■

D16:

DIM: Per prima cosa, $H(x)=F(x,g(x))$ ha come massimo x_0:

$\partial_x H(x_0) = \partial_x F(x_0) + \partial_y F(x_0)\cdot g'(x_0) = 0$

allora $f(x,g(x))=0$ e $\partial_x f(x,g(x)) = \partial_x f + \partial_y f\cdot g'(x) = 0$

Sapendo quindi che $\nabla f \uparrow\uparrow \nabla F$, e che $(1, g'(x_0))$ è ortogonale sia a ∇F che a ∇f, si può trovare λ.

D17 (Teorema sugli spazi compatti):

Lemma ⊗: Sia (X,d) metrico; se $\exists \{x_n\}$ senza punti di accumulazione $\Rightarrow X$ non è compatto per ricoprimenti

DIM: $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; cosa significa che A non ha punti di accumulazione?

$$\forall x \in X, \quad U_x \cap A = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ x & x \in A \end{cases}$$

So che $\cup \{U_x \mid x \in X\}$ è un ricoprimento di X.

Abbiamo due possibilità:

- X non è compatto per ricoprimenti $\Rightarrow$ abbiamo vinto
- X è compatto per ricoprimenti $\Rightarrow$ estraggo $x_1, \dots, x_n$ tali che $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \supset X$ sottoricoprimento finito di $\bigcup_{x \in X} U_x$.
  quindi, $\forall x \in X$, $x \in U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$
  ma per esempio se $x \in U_{x_i} \Rightarrow U_{x_i}$ contiene un numero finito di elementi di A
  $\Rightarrow$ ASSURDO: avremmo A finito!

$\Rightarrow X$ compatto per ricoprimenti ∎

D18 (Teorema del DIni):

Idea della dimostrazione. Si consideri il relativo sviluppo al primo ordine di Taylor:

$$F(x_1,x_2) = F(a_1,a_2) + \partial_{x_1}F(a_1,a_2)(x_1-a_1) + \partial_{x_2}F(a_1,a_2)(x_2-a_2) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)$$

Tenendo conto che $F(a_1,a_2) = 0$, uguagliando a zero la prima parte del termine al primo ordine si ottiene:

$$\partial_{x_1}F(a_1,a_2)(x_1-a_1) + \partial_{x_2}F(a_1,a_2)(x_2-a_2) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)$$

Per ipotesi,

$$\partial_{x_2}F(a_1,a_2) \neq 0,$$

si puó quindi ricavare x_2 in funzione di x_1:

$$x_2 = a_2 - \frac{\partial_{x_1}F(\mathbf{a}^*)}{\partial_{x_2}F(\mathbf{a}^*)}(x_1-a_1) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}^*\|).$$

Applicando il teorema della contrazione possiamo completare la dimostrazione. □