<u>Analisi a più variabili:</u>

Calcolo Differenziale

Definizione (Norma):

$\| \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

$\|x\| \geq 0$ (seminorma) ; $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Disuguaglianza di Holder (D1 ; 1.6):

$x_1, \dots, x_n \geq 0$; $y_1, \dots, y_n \geq 0$; $1 \leq p, q < +\infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (coniugati); allora:

$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q$

Disuguaglianza di Minkowsy (D2 ; 1.6):

$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

Definizione (Spazio topologico):
(X, T) ; $T \subseteq P(X)$ detti aperti tali che:

$\emptyset, X \in T$

$A_i \in T \rightarrow \bigcup A_i \in T$

$A, B \in T \rightarrow A \cap B \in T$

Definizione (Spazio metrico):
E' uno spazio topologico dotato di una distanza, ossia di una funzione:
$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:
$d(x, y) \geq 0$ (pseudodistanza) ; $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x + y) + d(y + z) \geq d(x, z)$

Definizione (Limite):
Si dice che $\exists$ il limite di $\{x_n\}$ se $d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

Definizione (Spazio completo):
Si dice che uno spazio topologico è completo se ogni successione di Cauchy converge.

Definizione (Contrazione):

$f: X \to X$ si dice una contrazione se $d\big(f(x), f(y)\big) \leq k\, d(x,y)$; $k \in (0,1)$

$k = 0$ è una funzione costante

$k = 1$ si dice funzione non espansiva

<u>Teorema delle contrazioni (D3 ; 1.24):</u>

(X, d) spazio metrico completo ; f contrazione, allora:

$\exists!\, x_* \mid f(x_*) = x_*$

Definizione (Successione uniformemente limitata):

$f_n \subseteq C([a,b])$ si dice uniformemente limitata se $\exists\ M > 0 \mid |f_n(x)| \leq M \ \ \forall x$; $\forall\, n$

Definizione (Successione equicontinua):

$f_n \subseteq C([a,b])$ si dice equicontinua se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \mid \forall\, n$ vale:

$\|f_n(x) - f_n(y)\|_{\sup} \ \leq \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$

<u>Teorema di Ascoli - Arzelà (D4 ; A.9):</u>

$f_n \subseteq C([a,b])$ uniformemente limitata ed equicontinua, allora:

$\exists f_{n_k}$ sottosuccessione convergente uniformemente ad f_* (Dunque $f_* \in C([a,b])$)

Definizione (Spazio di Hilbert):
$\exists \langle\ \rangle \rightarrow^{induce} \|\ \|$

Definizione (Spazio di Banach):
E' uno spazio normato completo.

Relazioni:
Hilbert ⊆ Banach ⊆ Normato ⊆ Metrico ⊆ Topologico

<u>Teoremi funzioni in $\mathbb{R}^n$ (D5 ; A.13 ; 1.34):</u>

Teorema di Bolzano - Weierstrass:
$\{v_i\}$ limitata in $\mathbb{R}^n$ → $\exists\{v_{i_k}\}$ sottosuccessione convergente (componente a componente).

Teorema di Weierstrass:
$K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto ; $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua; allora ammette massimo e minimo.

Teorema di Heine - Borel:
$K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto ↔ Chiuso e limitato

<u>Teorema di equivalenza fra norme (D6 ; 1.36):</u>
∀ norma $\|\ \|$ in $\mathbb{R}^n$ ∃ c_1 , c_2 tali che:

$$c_1\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Definizione (Funzione continua in x_0):
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua in x_0 se $f(x_0 + h) - f(x_0) = o(1)$ per $\|h\| \to 0$

Definizione (Funzione omogenea di ordine n):
$f(x_1, \dots, x_k)$ omogenea di ordine n se $\forall\ \lambda > 0\ f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_k)$

Definizione (Landau):
$f(x_1, \dots, x_k) = O(\|x\|^k) \leftrightarrow \frac{|f(x_1, \dots, x_k)|}{\|x\|^k} \leq c$

Definizione (Funzione differenziabile in x_0):
$f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in U$ se $\exists L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ operatore lineare tale che:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|)$

$L \coloneqq f^{'}(x_0)\,; L \coloneqq Df(x_0)$

$\exists v \mid L(h) = \langle v, h \rangle$ detto gradiente. (Lemma ND)

Teorema (D7 ; A.33):
Differenziabile → Continua

Definizione (Derivata parziale):
$F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $\{e_i\}\,;\{u_i\}$ basi canoniche dei due spazi, $F(x) = \sum_{k=1}^{m} F_k(x) u_k$ con $F_k = \langle F(x), u_k \rangle$

La derivata parziale in x_k di F_i è:

$\partial_{x_k} F_i(x) = \lim_{t \to 0} \frac{F_i(x + te_k) - F_i(x)}{t}$

Osservazione:
Se $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\{e_1 \dots, e_n\}\,;\{u_1, \dots, u_m\}$ sono le basi canoniche → $\langle L(e_k), u_j \rangle = (a_{jk})\,;\ [k \times j]$
Resta quindi identificato in maniera univoca $L(x) = \sum a_{jk}\, x_k u_j$

Teorema (D8 ; A34):
F differenziabile in x → $\exists \partial_{x_k} F_i(x)$
$\nabla F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} F(x_0) e_k$

Definizione (Derivata direzionale):
$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $v \in \mathbb{R}^n$; $v \neq 0$; la derivata direzionale è:

$$\partial_v F(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

Proprietà (D9 ; A.36 ; 1.72):
$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t$ differenziabile in $x_0 \to \exists \partial_v F(x_0) = \sum \partial_{x_j} F(x_0) v_j$

Teorema del differenziale totale (D10 ; A.37 ; 1.74)
Se $\partial_{x_i} F(x) \exists \ \forall \ x \in U$ aperto e $\partial_{x_i} F(x)$ è continua in $U \to F$ differenziabile in U

Proprietà di derivazione della funzione composta (D11 ; A.37 ; 1.75)
$H(x) = g\big(f(x)\big)$; f differenziabile in x_0 e g differenziabile in $y_0 = f(x_0) \to H^{'}(x_0) = g^{'}(y_0) f^{'}(x_0)$ (ND)

Teorema di Schwartz semplice (Principio di simmetria) (D12 ; A.40 ; 1.78):

Se esistono e sono continue $F(x_1, x_2)$; $\partial_{x_1} F$; $\partial_{x_2} F$; $\partial_{x_1 x_2} F$; $\partial_{x_2 x_1} F$ su U allora:

$$\forall\, x \in U\ \partial_{x_1 x_2} F(x) = \partial_{x_2 x_1} F(x)$$

Definizione (Divergenza e rotore):

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $F = (F_1, \dots, F_n)$

$$\mathrm{div}(F) = \nabla \cdot F = (\partial_1 \quad \cdots \quad \partial_n) \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F$$

Formula di Taylor in più variabili (D13 ; A.41):

$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $F \in C^k(U)$

Sia $X_0 \in U$, $n \in \mathbb{N}$ allora:

$$F(x) = \sum_{a \le n} \partial^a F(x_0) \frac{(x - x_0)^a}{a!} + o(\|x - x_0\|^n)$$

Definizione (Massimo relativo):

$(x_0, y_0) \in U$ è un massimo relativo $\leftrightarrow \exists \delta > 0$ | $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \rightarrow f(x,y) \le f(x_0, y_0)$

Principio di Laplace (D14 ; A.43):

$(x_0, y_0) \in U$ massimo relativo per $F \in C^2(U)$ allora:

$$\partial_x F(x_0, y_0) = \partial_y F(x_0, y_0) = 0$$
$$\partial_x^2 F(x_0, y_0) + \partial_y^2 F(x_0, y_0) \le 0$$

Proprietà (D15 ; A.44):

$(x_0, y_0) \in U$; se $\partial_x F(x_0, y_0) = \partial_y F(x_0, y_0) = 0$; $F \in C^2(U)$ e

$A = \begin{pmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F \end{pmatrix} (x_0, y_0) <_{\text{def}}$ 0 allora è un massimo relativo.

Osservazione:

$A < 0 \leftrightarrow \det A > 0$ e $a_{11} < 0$

$A > 0 \leftrightarrow \det A > 0$ e $a_{11} > 0$

Principio dei moltiplicatori di Lagrange (D16 ; A.46):

Sia $(x_0, y_0) = \max_{f(x,y)=0} F(x,y)$ (o minimo), allora:

$$\exists\, \lambda \mid \partial_x [F(x_0, y_0) - \lambda f(x_0, y_0)] = \partial_y [F(x_0, y_0) - \lambda f(x_0, y_0)] = 0$$

Teorema sugli spazi compatti (D17 ; A.7):

Dato (X, d) spazio metrico:

$$\begin{array}{ccc} X \text{ compatto per ricoprimenti} & \rightarrow & X \text{ compatto per successioni} \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & X \text{ Separabile} & \end{array}$$

Teorema del Dini (D18 ; 1.104):

Il teorema di Dini descrive le soluzione della equazione

$$F(x_1, x_2) = 0$$

quando il punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ é vicino ad un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ tale che $F(a_1, a_2) = 0$.

Lemma 13.4.1. *(Teorema di Dini) Sia*

$$F(x_1, x_2) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

una funzione definita in un dominio U aperto, sia F di classe C^1 in U. Se il punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ in U sodddisfa l'ipotesi

$$F(\mathbf{a}) = 0, \partial_{x_2} F(\mathbf{a}) \neq 0, \qquad (13.4.103)$$

allora esiste un intorno di a del tipo

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| < \varepsilon, |x - 2 - a_2| < \delta\}$$

ed esiste una funzione

$$\varphi : (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \to (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$$

tale che:

a) per ogni $x_1 \in (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon)$ abbiamo

$$F(x_1, \varphi(x_1)) = 0;$$

b) se $(x_1, x_2) \in V$ é soluzione dell'equazione

$$F(x_1, x_2) = 0,$$

allora $x_2 = \varphi(x_1)$;

c) la funzione

$$\varphi : (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \to (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$$

é di classe C^1.