Capitolo 2: Il gruppo simmetrico S_n:

S_n è il gruppo delle permutazioni di *n* elementi.

Osservazione:
Se $n \geq 3 \rightarrow S_n$ è non abeliano.
$|S_n| = n!$

Definizione(Ciclo):
Di lunghezza *n* è $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ che rappresenta la permutazione che associa all'elemento a_i l'elemento a_{i+1} e all'ultimo il primo.

Osservazione:
I cicli disgiunti commutano.
Ogni permutazione si decompone in modo unico (A meno dell'ordine) in un prodotto di cicli disgiunti.

Definizione (Trasposizione):
È un 2-ciclo (a, b)

Osservazione:
Ogni ciclo può essere scritto come composizione di trasposizioni.
Un ciclo di lunghezza n si può ottenere come prodotto di $n-1$ trasposizioni.

Definizione (Struttura ciclica):
Due elementi σ, τ si dicono avere la stessa struttura ciclica $[k_1, k_2, \dots, k_n]$ se quando σ si spezza in k_i cicli di lunghezza i per $i = 1,2, \dots n$ lo stesso accade per τ.

Osservazione:
$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + .. + n \cdot k_n = n$

Teorema:
Due elementi di S_n hanno la stessa struttura ciclica $\leftrightarrow$ sono coniugati.

Teorema (Struttura ciclica per calcolare le classi di coniugio)(:
Il numero di classi di coniugio di S_n è uguale al numero delle partizioni di n.

Esempio:
Il numero di classi di coniugio di S_4 sono 5 in quanto le partizioni sono:
$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 2 + 2$

Teorema (Pratico):
Sia $c = (12 \dots k), \sigma \in S_n \rightarrow \sigma(12 \dots k)\sigma^{-1} = \big(\sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(k)\big)$

Studiare classe di coniugio e centralizzatore di un elemento σ:

Vale la relazione: $|S_n| = |\mathrm{Cl}(\sigma)||\mathrm{Z}(\sigma)|$

$\mathrm{Cl}(\sigma)$ è la classe di coniugio di σ, siccome l'unico invariante per coniugio è la struttura ciclica la cardinalità di questo insieme è uguale al numero di elementi in S_n che hanno la stessa "forma".

Per calcolare $|\mathrm{Cl}(\sigma)|$ dobbiamo quindi considerare:

1- I modi per assegnare ogni ciclo disgiunto che compongono σ.
2- Le permutazioni interne di ogni ciclo di lunghezza *n*, sono $(n-1)!$
3- Bisogna dividere per le permutazioni esterne che sono isomorfe ad S_n con n numero di cicli di stessa lunghezza.

Esempio:

$\sigma = (123)(456)(78)$ su S_n ; $|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{2} \cdot 2! \cdot 2! \cdot \frac{1}{2!}$

$Z(\sigma)$ invece è formato da quegli elementi che lasciano invariati σ mediante coniugio, in pratica ciò che commuta con lui. Per ricavarne la cardinalità ci limitiamo a sfruttare $|Z(\sigma)| = \frac{|S_n|}{|\mathrm{Cl}(\sigma)|}$

Per ricavarlo in maniera esplicita dobbiamo considerare chi sono gli elementi che commutano con σ:

1- I cicli disgiunti, se σ ha lunghezza i su $S_n$saranno $(n-i)!$ (Cicli disgiunti)
2- I modi di permutare i cicli di lunghezza uguale. (Scambio di pezzi)
3- Ciò che commuta su ogni singolo elemento disgiunto (Il gruppo generato)

Esempio:

$\sigma = (123)(456)(78)$ su S_n ; $|\mathrm{Z}(\sigma)| = \frac{|S_n|}{|\mathrm{Cl}(\sigma)|} = 3!\,3!\,(n-8)!$

I cicli disgiunti sono $(n-8)!$

I cicli che possiamo scambiare sono quelli di uguale lunghezza, precisamente (123) e (456) quindi il sottogruppo è isomorfo a S_2 e in questo caso sarà $\{e, (14)(25)(36)\}$

Consideriamo $H_{123} = \{e, (123), (321)\}$; $H_{456} = \{e, (456), (654)\}$; $H_{78} = \{e, (78)\}$ che commutano rispettivamente con $(123), (456), (78)$ in quanto $\sigma^k \sigma \sigma^{-k} = \sigma$ e con gli altri perché disgiunti.

Dunque $|Z(\sigma)| = (n-8)! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 3!\,3!\,(n-8)!$

Definizione (Normalizzatore):

$N(\langle\sigma\rangle)$ è l'insieme delle permutazioni che lasciano il gruppo generato da σ invariato.

Notazione:
Talvolta si indica con $N(\sigma)$ ma è imprecisa come notazione perché è il normalizzatore di un gruppo, non di un elemento.

Calcolare la cardinalità del normalizzatore:
Sfruttiamo la relazione: $|N(\langle\sigma\rangle)| = |\mathrm{Stab}(\sigma)| \cdot |\mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle)| = |\mathrm{Z}(\sigma)| \cdot |\mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle)|$

Osservazione (Ricavare $|\mathbf{Aut}(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle)|$):
Sfruttiamo il fatto che $\langle\sigma\rangle$ è ciclico → Abeliano → Isomorfo ad un prodotto di gruppi ciclici.
Quindi per individuare il numero dei generatori basta studiare $\phi\big(ord\ (\sigma)\big)$.

Definizione (Gruppo alterno A_n):

È il sottogruppo di S_n formato solo dalle permutazioni ottenute come composizione di un numero pari di trasposizioni.

Osservazione:
$|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$

Osservazione:
Per studiare $\mathrm{Cl}_{A_n}(\sigma) = \mathrm{Cl}_{S_n}(\sigma) \cap A_n$ e $\mathrm{Z}_{A_n}(\sigma) = \mathrm{Z}_{S_n}(\sigma) \cap A_n$ sfruttiamo il fatto che se uno dei due è pari e l'altro e dispari è evidente che quello dispari non potrà essere diviso per due → uguale a quello in S_n

Equazioni in S_n:

Si risolvono sfruttando il seguente teorema:

1- Il quadrato di un ciclo di lunghezza dispari è un ciclo di lunghezza dispari.
2- Il quadrato di un ciclo di lunghezza pari sono due cicli di lunghezza dimezzata.

Esempio:
$x^2 = (1234)$ è impossibile.

Se le condizioni sono soddisfatte si risolve in maniera costruttiva.

Esempio:
$x^2 = (1234)(5678) \rightarrow x = (1\square 2\square 3\square 4\square)$ e poi assegno i $\square$. Ad esempio: $x = (15263748)$

Esercizi ed esempi

Su S_n può venir richiesto di risolvere alcune equazioni oppure, dato un elemento $\sigma \in S_n$, cercare $\mathrm{Cl}(\sigma)$; $Z(\sigma)$; $\mathrm{N}(\langle\sigma\rangle)$.

Esempio 1 (Equazioni):
Dire quando sono risolubili le seguenti equazioni in S_n:

$x^2 = (123)$	$x = (321)\rho \mid \rho^2 = \mathrm{Id}$, ossia un 2-ciclo, questo vale anche per i successivi.
$x^2 = (1234)$	Mai, infatti nessun elemento al quadrato può dare un ciclo di lunghezza pari.
$x^2 = (1234)(56)$	Mai, i due cicli pari dovrebbero avere stessa lunghezza.
$x^2 = (12)(34)$	Si costruisce mettendo gli spazi dove dovrebbe esserci il secondo ciclo: $(1\blacksquare 2\blacksquare)$, quindi riempiendo gli spazi ottengo: $\{(1324) ; (1423)\}$
$x^2 = (123)(456)$	$\{(142536) ; (152634) ; (162435) ; (321)(654)\}$

Esempio 2 (Centralizzatore):
$\sigma = (123)(456) \in S_6$; determinare $|\mathrm{Cl}(\sigma)|$ e $Z(\sigma)$.

Per cercare $|\mathrm{Cl}(\sigma)|$ sfrutto il fatto che gli elemento coniugati di σ hanno la stessa struttura, quindi caratterizzo gli elementi di $|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{6}{3}\binom{3}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 40$; $|Z(\sigma)| = \frac{|S_n|}{|\mathrm{Cl}(\sigma)|} = \frac{6!}{40} = 18$

Per caratterizzare gli elementi considero che:

1- Tutti i cicli disgiunti da σ vanno bene (Sono 0)

2- Tutto ciò che è generato dai cicli disgiunti da cui è formato: $H_1 = \{\mathrm{Id}, (123), (321)\}$ e $H_2 = \{\mathrm{Id}, (456), (654)\}$

Consideriamo dunque che $H_1H_2 \in Z(\sigma)$ e vale $|H_1H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 9$

Questa precisazione è superflua in questo caso ma in generale bisogna prestarci attenzione.

3- Infine le permutazioni che scambiano gli elementi, essendo due sarà un oggetto $\cong S_2$; cercandolo in maniera esplicita: $K = \langle(14)(25)(34)\rangle$

Ottengo quindi $|HK| = 18$, quello che stavo cercando.

Esempio 3 (Centralizzatore):
$\sigma = (12)(345) \in S_6$; determinare $|\mathrm{Cl}(\sigma)|$ e $Z(\sigma)$.

$|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{n}{2}\binom{n-2}{3} \cdot 2 = \frac{n!}{2!(n-5)!}$; $|Z(\sigma)| = 6(n-5)!$ ed individuandoli otteniamo quelli generati dai cicli di σ: $H_1 = \{\mathrm{Id} ; (12)\}$; $H_2 = \{\mathrm{Id} ; (345) ; (543)\}$ e i cicli distinti da σ che sono $(n-5)!$, osserviamo inoltre che non esistono permutazioni interne in quanto i cicli di σ hanno lunghezza diversa.

Esempio 4 (A_n):
Studiare lo stesso $\sigma = (123)$ su S_4 e su A_4.

$|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{4}{3} \cdot 2 = 8$ in S_4 ; $|Z(\sigma)| = 3$ e quindi siccome $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$ segue che essendo uno pari ed uno dispari debba essere quello pari dimezzato, $|\mathrm{Cl}(\sigma)|_{A_4} = 4$; $|Z(\sigma)|_{A_4} = 3$.

Esempio 5 (A_n):
Studiare lo stesso $\sigma = (123)$ su S_5 e su A_5.

$|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{5}{3} \cdot 2 = 20$ in S_4 ; $|Z(\sigma)| = 6$ quindi non posso usare il trucco di prima, cerco quindi di dimostrare che uno di loro è completamente contenuto in A_n, in questo caso l'intera orbita di (123) è formata da elementi di A_n, quindi: $|\mathrm{Cl}(\sigma)|_{A_5} = 20$; $|Z(\sigma)|_{A_5} = 3$

Esempio 6 (<u>Normalizzatore</u>):
Calcolare la cardinalità del normalizzatore di $\sigma = (123)(4567) \in S_7$.

Ricaviamo $|\mathrm{Cl}(\sigma)| = \binom{7}{3}\binom{4}{4} \cdot 2! \cdot 3! \rightarrow |Z(\sigma)| = 12$ inoltre sappiamo che:
$|N(\langle\sigma\rangle)| = |Z(\sigma)| \cdot |\mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle)|$
Studiando la cardinalità degli automorfismi (Basta assegnare il generatore essendo ciclico),
$|\mathrm{Aut}(\langle\sigma\rangle)| = \phi(12) = 4$ quindi $|N(\langle\sigma\rangle)| = 48$
Sono quelli di $Z(\sigma)$ combinati con gli automorfismi di $\langle\sigma\rangle$.

Esercizio 1 (9/11/11):
Siano $\tau_1 = (1234)$; $\tau_2 = (4567)$; $\tau_3 = \tau_1\tau_2$ permutazioni su S_7. Determinare l'ordine del centralizzatore e del normalizzatore di τ_1 e di τ_3

τ_1: $|\mathrm{Cl}(\tau_1)| = \binom{7}{3} \cdot 3! \rightarrow |Z(\tau_1)| = \frac{7!}{|\mathrm{Cl}(\tau_1)|} = 4!$ e $N(\langle\tau_1\rangle) = 4! \cdot |\mathrm{Aut}(\langle\tau_1\rangle)| = 4! \cdot 2$ in quanto $\langle\tau_1\rangle$ è un gruppo ciclico di quattro elementi $\rightarrow \Phi(4) = 2$

τ_3: osserviamo che $\tau_3 = (1234567)$ dunque $|\mathrm{Cl}(\tau_3)| = \binom{7}{7} \cdot 6! \rightarrow |Z(\tau_3)| = \frac{7!}{|\mathrm{Cl}(\tau_3)|} = 7$ e $N(\langle\tau_1\rangle) = 7 \cdot |\mathrm{Aut}(\langle\tau_3\rangle)| = 7 \cdot 6$ in quanto $\langle\tau_3\rangle$ è un gruppo ciclico di sette elementi $\rightarrow \Phi(7) = 6$

Esercizio 2 (5/06/12):
Determinare il numero di sottogruppi di ordine 6 di S_5 dividendoli per classe di coniugio.

Un gruppo può essere abeliano oppure no.
Caso abeliano:
Il gruppo deve essere prodotto diretto di gruppi ciclici quindi isomorfo a $Z_2 \times Z_3$ e dunque ciclico.
Cerchiamo dunque i possibili generatori di questo gruppo ciclico di ordine 6, ossia cerchiamo gli elementi di ordine 6 in S_5. Questi sono tutte e sole le permutazioni della forma $(abc)(de)$ che sono $\binom{5}{3}\binom{2}{2} \cdot 2! = 20$ tutte fra loro coniugate. In ogni gruppo ciclico di ordine 6 ci sono $\Phi(6) = 2$ elementi di ordine 6 $\rightarrow$ ci sono 10 gruppi ciclici di ordine 6 tutti coniugati fra loro.
Caso non abeliano:
Nel caso non abeliano dobbiamo avere un elemento di ordine 3, quindi della forma (abc) e un elemento di ordine 2 $(x, y)|$ non appartenga al centralizzatore di (abc) altrimenti sarebbe abeliano ma deve invece appartenere al normalizzatore per poter costruire il prodotto semidiretto.
Esistono due tipi di sottogruppi di s_5 isomorfi a S_3. Il primo è quello del tipo:

$$A = \{e, (abc), (cba), (ab), (ac), (bc)\}$$

Di elementi (abc) ne abbiamo $\binom{5}{3} = 20$ tutti fra loro coniugati dunque 10 gruppi di questo tipo.
Trovare i secondi è meno banale, fissato (abc) dobbiamo trovare un ciclo di ordine 2 che ad esso applicato mi dia un ciclo di ordine 2.
Il trucco è osservare la struttura di $(abc) = (ab)(bc)$ aggiungere un ciclo di ordine 2 che commuti con (abc), ad esempio (de), ed uno per eliminare la parte che non ci interessa come (ab)
Infatti vale $(ab)(de)(ab)(bc) = (de)(bc)$, dunque sarà del tipo:

$$B = \{e, (abc), (cba), (ab)(de), (bc)(de), (ac)(de)\}$$

Anche questo è univocamente determinato dalla scelta di $(abc) \rightarrow$ ci sono $\binom{5}{3} = 20$ elementi di quella forma e dunque 10 gruppi fra loro coniugati di questo tipo.

Esercizio 3 (26/06/12):
Dimostrare che S_7 contiene un sottogruppo isomorfo a D_{12} mentre A_7 no.

$D_{12} \cong Z_{12} \rtimes Z_2$ quindi devo individuare un gruppo ciclico di ordine 12 generato da x ed un y di ordine 2 | $y^{-1}xy = x^{-1}$ Un esempio potrebbe essere $x = (1234)(567)$; $y = (14)(23)(56)$
Su A_7 non può esistere in quanto gli unici elementi di ordine 12 sono del tipo $(abcd)(efg)$ e $(abcd) \notin A_7$