Aritmetica

1. Trovare tutti gli n interi positivi tali che $n | 2^n + 1$.

2. Un numero si dice *perfetto* se è somma dei suoi divisori, escluso se stesso. Mostrare che i numeri perfetti pari sono della forma $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$, dove $2^{n+1} - 1$ è primo.

3. Trovare esplicitamente un x tale che $3x \equiv 1 \pmod{5^8}$. (*Hint: Risolvere* $3x \equiv 1 \pmod 5$ *e cercare un modo per sollevare la soluzione)*. Trovare esplicitamente un x tale che $3x \equiv 1 \pmod{5^6}$.

4. Sia n dispari e sia S l'insieme dei numeri x tali che $(x, n) = 1 \wedge (x + 1, n) = 1$. Mostrare che $\displaystyle\prod_{x \in S} x \equiv 1 \pmod n$.

5. Mostrare che per ogni primo p è possibile scegliere un n intero positivo tale che $2^n + 3^n + 6^n - 1$ sia divisibile per p.

6. Siano a, b e c tre numeri non divisibili per p. Mostrare che $ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv 0 \pmod p$ ha almeno una solzione. Cosa succede invece se $c = 0$? E se $b = c = 0$?

($\star$) In realtà vale che l'equazione di sopra ha esattamente p^2 soluzioni. Mostrarlo (la soluzione è tutt'altro che facile, ma non invoca, comunque, teoremi particolarmente difficili).