Problemi Proposti per lo Stage Locale di Locri

Gioacchino Antonelli

February 3, 2015

1 Algebra

La seguente lista di esercizi è da intendersi come segue: i primi (in base all'andamento della lezione se ne potranno fare 2, 5 o tutti) verranno letti e commentati fin da subito e si ritiene possano avere delle idee originali utili per molti problemi. A questa prima parte di lezione (2 ore-2 ore e mezza) seguirà una piccola pausa e poi lo svolgimento, per un tempo variabile da mezz'ora a un'ora degli esercizi rimanenti. Seguirà una correzione dei più significativi, o quelli di cui il maggior numero di ragazzi richiede soluzione. I restanti, ad esempio tutti quelli con la stella, eccettuati quelli che si riusciranno a correggere, se ci saranno, sono lasciati alla meditazione del singolo.

Prima Parte

1. Siano a, b, c numeri reali tali che $a+b+c = 4$ e $\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 7$. Calcolare $\sum_{cyc} \frac{c}{a+b}$.

2. Sia α una radice del polinomio $x^3 + x - 1$. Quanto vale $\alpha^9 - 3\alpha^6 + 4\alpha^3$?

3. Siano α, β e γ le radici del polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 15$. Scrivere un polinomio che abbia come radici $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ e uno che abbia come radici $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$ e infine uno che abbia come radici $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ e $\alpha + \gamma$.

4. Sia $p(x) = x^{20} + a_1 9x^{19} + \ldots + a_0$ un polinomio di ventesimo grado tale che $p(k) = 2k$ per tutti i numeri naturali $1 \leq k \leq 20$. E' vero che $p(21) = 42$?

5.
   - Mostrare che $a^2 + b^2 \geq 2ab$ per ogni a e b reali.
   - Mostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ per ogni a, b e c reali.
   - Mostrare che $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.
   - ($\star$) Mostrare che, dati $a_1, \ldots, a_n$ reali positivi, vale la seguente (Disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica)

     $$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

   - ($\star$) Mostrare che, dati $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ reali, vale la seguente (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

     $$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2$$

   - ($\star$) Usando la precedente si riesce a mostrare la seguente (Disuguaglianza fra media quadratica e aritmetica)

     $$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

   - Dati x e y reali positivi tali che $x + y = 12$, trovare il massimo di $x^2 y$.

- Fornire le interpretazioni geometriche possibili delle precedenti disuguaglianze.

6. - Mostrare che $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   - Cercare, utilizzando la precedente, di trovare una formula per $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$ e $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.
   - Scrivere una formula per $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n$
   - ($\star$) E' possibile scrivere una formula ricorsiva in k, per $\sum_{i=1}^{n} i^k$?

Seconda parte

1. (GaS Nazionale, 6 Maggio 2011, Semifinale C, 11) f è una funzione tale che $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$ per ogni $x \neq 0, 1$. Quanto vale $f(10)$?
2. Se x e y sono numeri reali tali che $y = \sqrt[5]{x^3 + 2x} = \sqrt[3]{x^5 - 2x}$ quanto valgono x e y?
3. (GaS Locale, 16 Marzo 2007, 23) x, y e z sono tre numeri reali. Si richiede il minimo, al variare di x, y e z di
$$(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(y-x)^2+4} + \sqrt{(z-y)^2+1} + \sqrt{(10-z)^2+9})^2$$
4. (GaS Nazionale, 9 Maggio 2008, Semifinale A, 10) Sappiamo che $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ è una sequenza di numeri reali tali che $x_1 = 3^8$, $x_2 = 1000$ e, per ogni $n \geq 2$, $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{x_{n-1}}$. Quanto vale x_{2008}?
5. Cercare le soluzioni del sistema di tre equazioni $x+y+z = 9$, $x^2+y^2+z^2 = 29$, $x^3 + y^3 + z^3 = 99$.
6. Cercare il massimo valore di k tale che sia verificata la seguente disuguaglianza
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq k$$
per ogni coppia di numeri reali e positivi a e b tali che $a + b = 1$.
7. Siano a, b e c i lati di un triangolo.
   - Mostrare che esistono tre numeri positivi x, y e z tali cge $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.
   - Sia Q la quantità $Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$. Mostrare che, qualsiasi siano i lati del triangolo, vale sempre che $Q \geq \frac{3}{2}$ e $Q \leq 2$.
   - ($\star$) Mostrare che esiste un triangolo tale che $Q = \frac{3}{2}$ e che per ogni $h < 2$ esiste un triangolo con lati a, b, c tali che $Q > h$. In altre parole, mostrare che non è possibile "rendere più stretta" la disuguaglianza $\frac{3}{2} \leq Q \leq 2$. Esiste un triangolo con $Q = 2$?
   - ($\star$) Mostrare che $Q \geq \frac{3}{2}$ anche se a, b e c non sono i lati di un triangolo.

2 Teoria dei Numeri

La seguente lista di esercizi è da intendersi come segue: i primi (in base all'andamento della lezione se ne potranno fare 2, 5 o tutti) verranno letti e commentati fin da subito e si ritiene possano avere delle idee originali utili per molti problemi. A questa prima parte di lezione (2 ore-2 ore e mezza) seguirà una piccola pausa e poi lo svolgimento, per un tempo variabile da mezz'ora a un'ora degli esercizi rimanenti. Seguirà una correzione dei più significativi, o quelli di cui il maggior numero di ragazzi richiede soluzione. I restanti, ad esempio tutti quelli con la stella, eccettuati quelli che si riusciranno a correggere, se ci saranno, sono lasciati alla meditazione del singolo.

Prima parte

1. Determinare le soluzioni intere di $xy - 7x + 2y - 5 = 0$.
2. Mostrare che se $2^n + 1$ è un numero primo, allora n è una potenza di 2. Mostrare che se $2^n - 1$ è un numero primo allora p è un primo. E' vero il viceversa? Cioè, se p è primo, è vero che $2^p - 1$ è primo? Per il viceversa del primo enunciato, vedere il problema (6).
3. Quanti sono i numeri razionali r tali che $0 < r < 1$ e la somma tra numeratore e denominatore di r scritto ai minimi termini è 8000?
4. Dimostrare che esistono 100 numeri interi positivi tali che la differenza di due comunque presi è un divisore del maggiore.
5. (GaS, ?) Due allevatori convengono che un maiale vale 560 euro e una pecora 390 e saldano i loro debiti scambiandosi i suddetti animali. Ad esempio, se il primo deve dare al secondo 50 euro, gli dà 3 pecore e riceve due maiali: infatti $3 \cdot 390 - 2 \cdot 560 = 50$. Quanti animali, al minimo, saranno coinvolti nel baratto per saldare un debito di 20 euro?
6. Sia $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   - Mostrare che 641 è un divisore proprio (cioè non è tutto F_5) di F_5.
   - Mostrare che $F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} + 2$. Dedurre che F_n e F_m sono numeri primi fra loro per ogni scelta di n e m diversi.
   - Concludere che i numeri primi sono infiniti.
7. Dimostrare che l'unica terna di numeri interi tali che $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ è data da $x = y = z = 0$.

Seconda parte

1. (GaS, ?) Definiamo Δ l'operazione di accostamento fra numeri naturali. Ad esempio $35\Delta2 = 352$. Per quali n, fra 2 e 2011, n è un divisore di $m\Delta n$ qualunque sia la scelta di m numero naturale?
2. (GaS, ?) Quante sono le terne ordinate di interi positivi (x, y, z) tali che $x, y, z \geq 2$ e $x|yz - 1$, $y|xz - 1$, $z|xy - 1$?

3. (GaS Nazionale, 9 Maggio 2014, Semifinale D) Trovare il più grande numero intero con meno di 6 cifre, che sia un quadrato perfetto e che sia scrivibile come $n^3 + 3n$.

4. (GaS Nazionale, 9 Maggio 2014, Semifinale D) Ognuno dei 300 soldati di un esercito è identificato da un numero n, da 1 a 300, e l'effigie sul proprio scrudo è proprio il numero di zeri con cui termina $n!$. Ad esempio il soldato 300 ha impresso 74 che è il numero di zeri con cui finisce 300!. Quali numeri fra 0 e 74 non figureranno mai sugli scudi?

5. (GaS Nazionale, 9 Maggio 2008, Semifinale A) Ogni giorno Numer apre il frigo e conta le lattine: se sono in numero multiple di 3 ne consuma $\frac{2}{3}$ altrimenti ne beve una sola. Contando che al minimarket ci sono 2008 birre, quante ne deve comprare perché la scorta gli duri più tempo possibile?

6. Ho 10 000 lampadine, ognuna numerata da 1 a 10 000. All'inizio tutte le lampadine sono spente e poi, in ordine, schiaccio gli interruttori di tutte quelle con numero multiplo di 2, poi quelle con numero multiplo di 3, e così via, fino ad arrivare a 10 000. Quante lampadine saranno accese alla fine?

7. ($\star$) Trovare gli n e m interi positivi (> 0) tali che $7^m - 4^n = 3$