Teoria ed esercizi proposti per lo stage di Livorno

Gioacchino Antonelli

April 27, 2016

Teoria dei Numeri

1 Teoria

- Enunciato del teorema di divisione. Come si dimostra? (E' importante avere il *minimo intero*). Generalizzazione velocissima ai polinomi in una variabile. Dopo aver enunciato il teorema di divisione dire cosa vuol dire $a|b$ (useremo a e b con segno). Qualche proprietà ovvia con le divisibilità

  - $a|b \Leftrightarrow a|b+ka \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
  - $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|kb+ch$.
  - Per ogni n, $a|na$.

  Svolgi l'esercizio 1. Idea intuitiva di massimo comune divisore e minimo comune multiplo. Perché sono così importanti ($a|b$ e $a|c$ allora $a|\gcd(b,c)$; $a|b$ e $a|c$ allora $a|lcm(b,c)$). Notare che $\gcd(a,b) = \gcd(a, b-ka)$ (mostrare entrambe le divisibilità). (attenzione al segno, il gcd lo prendiamo sempre positivo). Algoritmo di divisione euclidea partendo da (a,b). Il massimo comune divisore rimane lo stesso. Finisce? E se si dove? Far vedere come ciò è utile per trovare una soluzioni di $12x+5y=1$. **Dire di svolgere**, a proposito, l'esercizio 2.

- Fattorizzazione + divisibilità è importantissimo in Teoria dei Numeri. Perché? Perché è la materia dei prodotti! Ricordate che abbiamo la *fattorizzazione unica*. Farlo capire con l'esercizio 3. (Fai notare come quell'esercizio è risolubile con quanto visto nella prima parte). Qualche divisibilità da ricordare. Vedere l'esercizio 4. (Svolgi solo il primo punto e **dire di pensare** agli altri). Per capire quanto sia importante questa tecnica **dare da svolgere** il Cesenatico 4/2015, ovvero l'esercizio 5. In generale a Cesenatico ritorna molto spesso l'idea di fattorizzare.

- Piccolissima introduzione alle congruenze: definizione. $a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n|a-b$. Osservazioni:

  - Notare che se $a \equiv b \pmod n$ allora si può sommare sottrarre e moltiplicare tranquillamente. Lecitissimo!
  - Si possono semplificare gli α in $\alpha a \equiv \alpha b \pmod{\alpha n}$? E in $\alpha a \equiv \alpha b \pmod n$? Quale condizione ci vuole?

- E' sempre vero che dato un certo a esiste b tale che $ab \equiv 1 \pmod{n}$? No! Serve $\gcd(a,n) = 1$. Dunque se n è primo sempre!
- Le congruenze modulo un primo devono essere sapute benissimo. Piccolo teorema di Fermat $a^p \equiv a \pmod{p}$.

2 Esercizi

1. Trovare i numeri n di tre cifre tali che il numero n_0 ottenuto togliendo gli 0 è un divisore proprio (cioè non è n) di n.
2. Trovare *tutte* le soluzioni di $12x + 5y = 1$.
3. Trovare tutti gli (x, y) interi tali che $xy - 7x + 2y - 5 = 0$.
4. Mostrare che:
   - $n|m \Leftrightarrow a^n - 1|a^m - 1$. Analogamente vale che $n|m \Leftrightarrow a^n - b^n|a^m - b^m$.
   - $(\star)$ Il massimo comune divisore fra $a^n - 1$ e $a^m - 1$ è $a^{\gcd(n,m)} - 1$.
   - Mostrare che se $2^n - 1$ è un numero primo, allora n è un numero primo. Vale il viceversa? Cioè p primo implica $2^p - 1$ primo?
5. $(\star)$ Trovare tutte le soluzioni (a, b) intere dell'equazione $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.
6. (GaS, 2015) Trovare tutti i numeri che sono uguali a 245 volte la somma delle loro cifre se scritti in base 7.
7. (GaS, ?) Due allevatori convengono che un maiale vale 560 euro e una pecora 390 e saldano i loro debiti scambiandosi i suddetti animali. Ad esempio, se il primo deve dare al secondo 50 euro, gli dà 3 pecore e riceve 2 maiali ($3 \cdot 390 - 2 \cdot 560 = 50$) Quanti animali, al minimo, saranno coinvolti nel baratto per saldare un debito di 20 euro?
8. Qual è la cifra delle unità di 7^{7^7}? E il resto della sua divisione per 11?
9. Ho 10 000 lampadine, ognuna numerata da 1 a 10 000. All'inizio tutte le lampadine sono spente e poi, in ordine, schiaccio gli interruttori di tutte quelle con numero multiplo di 2, poi quelle con numero multiplo di 3, e così via, fino ad arrivare a 10 000. Quante lampadine saranno accese alla fine?

Geometria

3 Prima Parte

Nella prima parte di Lezione svolgerò dei veloci richiami di teoria (similitudini, teoremi di Talete e quadrilateri ciclici) e approfondirò alcuni aspetti riguardanti i punti notevoli del triangolo. Mi propongo di svolgere durante la spiegazione tutti gli esercizi contenuti nella prima sottosezione dei problemi assegnati (Quelli indicati con una A). E' (molto) probabile che non li riesca a svolgere tutti: in ogni caso raccomando di provarli e magari alcuni li correggerò alla fine (alcuni di essi sono impegnativi, o comunque non di immediata risoluzione). Dei problemi, i primi 4 simulano i quesiti a risposta numerica della gara di Febbraio, e ho provato a metterli in ordine di difficoltà. I successivi 3 simulano le dimostrazioni della gara di Febbraio e anche questi ho provato a metterli in ordine di difficoltà. Gli ultimi 2, per gli appassionati, sono problemi riguardo luoghi geometrici, un po' di nicchia, da fare se uno ha finito tutto: il primo leggermente più semplice e il secondo un po' più complesso.

4 Seconda Parte: Esercizi

1. (A) Mostrare che in un triangolo il simmetrico dell'ortocentro rispetto ad un lato giace sulla circonferenza circoscritta. Idem se il simmetrico è fatto rispetto al punto medio di un lato. Notare, avendo ciò, che in un triangolo i piedi delle altezze e i punti medi (così come i punti medi fra i vertici e l'ortocentro) giacciono tutti sulla stessa circonferenza (detta Circonferenza di Feuerbach del triangolo).
2. (A) In un triangolo ABC, detti O e H l'ortocentro e il circocentro, mostrare che le rette AO e AH sono simmetriche rispetto alla bisettrice dell'angolo in A. Essendo M il punto medio di BC, mostrare che $AH = 2OM$.
3. (A) In un triangolo ABC, detto I l'incentro e M il punto medio dell'arco BC della circonferenza circoscritta che non contiene A, mostrare che $BM = MI = MC$.
4. (A) Quale dei 4 punti notevoli del triangolo ha la seguente proprietà? "P è tale che PAB, PBC e PCA hanno la stessa area".
5. (A) Mostrare che in un triangolo l'ortocentro H, il circocentro O e il baricentro G sono allineati e $OG = 2GH$.

5 Terza parte: Problemi

1. Sia $ABCDE$ un pentagono regolare di lato 1 e sia P l'intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto misura il segmento PC?
2. Dato un triangolo ABC, sia A' il simmetrico di A rispetto a C, A'' il simmetrico di A rispetto a B, B' il simmetrico di B rispetto a A, B'' il simmetrico di B rispetto a C, C' il simmetrico di C rispetto a B e C'' il

simmetrico di C rispetto a A. Determinare il rapporto tra l'area di $A'B'C'$ e quella dell'esagono $A'A''C'C''B'B''$.

3. Dato il triangolo ABC rettangolo in A costruiamo sull'ipotenusa il quadrato $BCDE$ (con D, E dalla parte opposta di A rispetto a BC). Sapendo che le aree dei triangoli ABE e ACD valgono rispettivamente 6 e 27, quanto vale l'area del triangolo ABC?

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $DA = 7$, $BD = 25$. Quanto è lungo AC?

5. Sia T un punto e sia A su una circonferenza data, in modo che TA sia tangente. Si tiri da T una secante che incontra la circonferenza in B e C. Siano X e Y i punti di incontro tra la bisettrice dell'angolo ATB e AC e AB. Dimostrare che $AX = AY$.

6. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo BAD interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza e che i triangoli ANB e ABM sono simili.

7. Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB che non contiene C. Si dimostri che $AP + BP = CP$.

8. Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza data. Se A e B sono fissati, qual è il luogo descritto dall'incentro I di ABC al variare di C sulla circonferenza?

9. Si consideri un punto P nel piano equidistante da due rette parallele a, b assegnate. Si tracci una retta r per P che interseca a, b in A, B. Si descriva, al variare di r, il luogo geometrico dei punti C per i quali ABC è equilatero.