Traccia delle lezioni tenute ad Arezzo

Gioacchino Antonelli

April 25, 2016

Mattina:

Prima ora: Strategie dimostrative base per Cesenatico. Non serve molta teoria. Principio del pigeonhole: se ho n oggetti da disporre in m scatole, ce ne sarà almeno una con $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ oggetti. Prima applicazione: **Cesenatico 2014-5**. Eventuali difficoltà: come riconoscere gli oggetti e le scatole? Conosciamo i binomiali? Perché la disuguaglianza di polinomi è vera? Accennare al fatto che definitivamente $P(n) > Q(n)$ se il grado di $P(n)$ è maggiore del grado di $Q(n)$. Ordini di vincita: può essere $n > 2^n$? Evidentemente no: dimostrare $2^n > n$ per $n \geq 2$ usando l'induzione.

Gli strumenti della teoria dei numeri: le congruenze. Idea: associamo ad ogni numero il suo resto nella divisione per n. Esistono n rappresentanti privilegiati (i resti appunto) e identifico un numero con il suo resto. Si scrive $a \equiv b \pmod n$ intendendo che $n|a-b$. Per somme differenze e prodotti tutto va come ci si aspetta, mentre non sempre si può dividere: per esempio $3a \equiv 3b \pmod 6$ non implica che $a \equiv b \pmod 6$. Quando si può dividere? Quando n è coprimo con ciò che divido! Per questo i moduli primi sono importanti.

Piccolo teorema di Fermat (e dimostrazione?) $a^p \equiv a \pmod p$. Generalizzazione: chi è la ϕ di Eulero? $a^{\phi(n)} \equiv a \pmod n$ se $(a,n) = 1$. Molto importante la struttura dei residui quadratici, cubici modulo un numero. I residui quadratici modulo un primo sono $\frac{p+1}{2}$: fare a mano i casi $3, 5, 7$. Chi sono i quadrati modulo 4 e modulo 8? (Formula generale, se dovesse servirvi: i possibili residui n-esimi modulo p sono esattamente $\frac{p-1}{(n,p-1)} + 1$). Dire a questo proposito di fare ***Cesenatico 2012-4***.

Seconda ora: Applichiamo quanto detto nell'ora precedente. Acquisiamo familiarità con il concetto di divisibilità e le proprietà base facendo il **Cesenatico 2014-3**. Per il punto b cerchiamo di avere che $3^k || 1 + 2^n + 3^n$. Per questo studiamo i fattori 3 in $1 + 2^n$. Formulazione generale di LTE e possibili controesempi. Concludiamo il Cesenatico.

Esercizi lasciati:

1. Mostrare che fissato $k > 0$ esistono infiniti n tali che $n|1 + 2^n + \ldots + k^n$.

2. ($\star$) Mostrare che dati a e b due numeri reali qualasi, se $a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, ... sono interi allora a e b sono interi.

Doppia faccia della teoria dei numeri: fattorizzazioni. Dovete saper fattorizzare: spiegare perché se $m|n$ allora $a^m + b^m | a^n + b^n$. Fattorizzazioni parziali e fattorizzazione notevole: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Terza ora: ***Cesenatico 2015-4***. Si inizia con geometria: serve un ripasso sui parallelismi, similitudini, talete? Fatelo, sono estremamente importanti. L'importanza dei quadrilateri inscritti in una circonferenza. Proprietà angolari, potenze (teorema della corda, tangente, secante), assi radicali. Mostrare che gli assi radicali di tre cironferenze concorrono. Cosa sono gli assi radicali per circonferenze tangenti? Mostrare che l'asse radicale interseca le tangenti interne ed esterne nei punti medi. Iniziamo a girare gli angoli: **Cesenatico 2015-3**. **Cesenatico 2014-4**.

Esercizi lasciati:

1. Provare a risolvere il ***Cesenatico 2015-4*** cercando di fattorizzare *senza* utilizzare la formula data.

2. Provare a risolvere il **Cesenatico 2015-5**. (Se c'è tempo lo si può fare a lezione)

Pomeriggio:

Prima ora: Combinatoria geometrica: **Semifinale A-2015, 1**. Esercizi lasciati relativi:

1. In quante parti dividono il piano n rette al massimo? (Da fare)

2. Quante sono le diagonali di un n-agono? Quanti triangoli vengono a formarsi nel poligono supponendo che non ci sia un punto in cui concorrono più di due diagonali? (Da accennare)

3. ($\star$) Sia S un insieme finito di punti nel piano, in posizione qualsiasi. Si traccino dei segmenti che congiungono tali punti in modo tale che nessuno dei segmenti tracciati ne intersechi nessun altro e in modo tale da non poter tracciare più alcun segmento. Dimostrare che, indipendentemente da come si scelgono i segmenti, si otterranno sempre un certo numero fissato N di triangoli, dipendente solo dalla configurazione di punti. (Consiglio di provarci)

4. ($\star\star$). Sia dato S un insieme finito di punti nel piano. Supponiamo che S soddisfi la seguente proprietà: dati due qualsiasi punti in S, la retta per essi contiene almeno un altro punto di S. Mostrare che tutti i punti in S sono allineati. La conclusione vale ancora se S è un insieme infinito? (Problema famoso e difficile, molto istruttivo)

Somme telescopiche: **Semifinale A-2015,7**. Esercizi lasciati:

1. Calcolare $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$.

2. Notare che $k^5 = \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)^5 - i^5 = \sum_{i=0}^{k-1} 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$. Usando ciò, ricordando quanto valgono $\sum_{i=0}^{k-1} i$, $\sum_{i=0}^{k-1} i^2$ e $\sum_{i=0}^{k-1} i^3$, ricavare $\sum_{i=0}^{k-1} i^4$. Formulare un metodo generale per ricavare $\sum_{i=0}^{k-1} i^h$ per un certo $h > 0$. Se interessa, le formule esplicite vengono scritte in termini dei *numeri di Bernoulli*.

Seconda ora: Semifinale A-2015,13. Accenno all'importanza delle somme simmetriche e relazione con le radici dei polinomi. Usare le somme simmetriche per avere fattorizzazioni non banali. Qualche conteggio per finire: ***Semifinale A-2015,11***. Se avanza tempo, a proposito dei cambiamenti di base, fare il ***Semifinale A-2015,4***.

1 Problemi Proposti

I problemi segnati con le ($\rightarrow$) verrano sicuramente svolti a lezione con un approfondimento sulla teoria. I problemi segnati con ($\hookrightarrow$) verrano svolti a lezione se ce ne sarà il tempo ed eventualmente su richiesta. E' raccomandato comunque lo svolgimento degli stessi per impadronirsi delle tecniche viste a lezione. Gli esercizi segnati da ($\circ$) quasi certamente non saranno svolti a lezione, ma ritengo che sia molto istruttivo provarli. Fra questi, indicati con le ($\star$), ci sono quelli che ritengo più difficili. La maggior parte dei problemi sono presi dalle gare degli anni passati: la dicitura [Cesenatico $x - y$] indica che il problema è l'y-esimo problema della gara individuale svoltasi a Cesenatico nell'anno x. Le soluzioni a questi problemi si possono trovare facilmente su internet. Alcuni problemi sono stati presi dalla Semifinale A della gara a squadre tenutasi nel 2015 a Cesenatico. La dicitura [Semifinale A-2015, n] indica ovviamente che si tratta dell'n-esimo problema della gara. Le soluzioni *numeriche non commentate* di questi esercizi si trovano, ancora una volta, facilmente su internet. Gli esercizi senza fonte li ho trovati in giro per il web. Nella lista anche un teorema dalla storia particolarmente interessante: si tratta del *teorema di Sylvester-Gallai*, la cui dimostrazione si trova anche su internet, di cui vi invito a leggere la storia :).

1. ($\rightarrow$) [Cesenatico 2014-5] Dimostrare che esiste un intero positivo che può essere scritto come somma di 2015 potenze 2014-esime distinte di interi positivi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2015}$ in almeno due modi.

2. ($\rightarrow$) [Cesenatico 2014-3] Per ogni intero positivo n, sia D_n il massimo comune divisore di tutti i numeri della forma $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$ al variare di a fra tutti gli interi positivi (si intende lo zero escluso).
   - Dimostrare che, per ogni n, D_n è della forma 3^k per qualche intero $k \geq 0$.
   - Dimostrare che, per ogni $k \geq 0$, esiste un intero n tale che $D_n = 3^k$.

3. ($\hookrightarrow$) [Cesenatico 2012-4] Sia $x_1, x_2, x_3, \ldots$ la successione definita per ricorrenza come segue:
$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_{n+1} &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n + 5 \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$
   (I primi termini della successione sono quindi $x_1 = 4$, $x_2 = 4 + 5 = 9$, $x_3 = 4 \cdot 9 + 5 = 41, \ldots$) Trovare tutte le coppie di interi positivi $\{a, b\}$ tali che $x_a x_b$ è un quadrato perfetto.

4. ($\circ$) Mostrare che fissato $k > 0$ esistono infiniti n tali che $n | 1 + 2^n + \ldots + k^n$.

5. ($\circ, \star$) Mostrare che dati a e b due numeri reali qualasi, se $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $\ldots$ sono interi allora a e b sono interi.

6. ($\hookrightarrow$) [Cesenatico 2015-4] Determinare tutte le coppie di numeri interi (a, b) che risolvono l'equazione $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

7. ($\rightarrow$) [Cesenatico 2015-3] Sia ABC un triangolo, sia K il piede della bisettrice relativa a BC e sia J il piede della trisettrice relativa a BC più vicina al lato AC (ossia J è il punto su BC tale che $3\angle CAJ = \angle CAB$). Siano poi C' e B' due punti sulla retta AJ, dalla parte di J rispetto ad A, tali che $AC' = AC$ e $AB = AB'$. Dimostrare che il quadrilatero $ABB'C'$ è inscrivibile in una circonferenza se e solo se le rette $C'K$ e $B'B$ sono parallele.

8. ($\rightarrow$) [Cesenatico 2014-4] Su una circonferenza di centro A e raggio R vengono presi nell'ordine quattro punti distinti B, C, G, H in modo tale che G giaccia sul prolungamento della mediana del triangolo ABC condotta da B, e H giaccia sul prolungamento dell'altezza di ABC condotta da B. Detta X l'intersezione fra le rette AC e GH, si dimostri che il segmento AX è lungo $2R$.

9. ($\hookrightarrow$) [Cesenatico 2015-5] Siano Γ una circonferenza, AB una sua corda, C un punto interno ad AB, r una retta per C tale che, dette D ed E le intersezioni di r con Γ, esse si trovino in parti opposte rispetto all'asse di AB. Siano poi Γ_D la circonferenza tangente esternamente a Γ in D e tangente in un punto F ad AB, Γ_E la circonferenza tangente esternamente a Γ in E e tangente in un punto G ad AB. Dimostrare che $CA = CB$ se e solo se $CF = CG$.

10. ($\rightarrow$) [Semifinale A-2015,1] Per passare un pomeriggio piovoso, Mario rispolvera la sua collezione di vecchi videogiochi. Ne ha davvero tanti! Sono tanti quanti il massimo numero di regioni in cui può essere suddiviso il piano tracciando 49 circonferenze dello stesso raggio, tutte passanti per uno stesso punto comune. Quanti sono i videogiochi?

11. ($\rightarrow$) In quante parti dividono il piano n rette al massimo?

12. ($\hookrightarrow$) Quante sono le diagonali di un n-agono? Quanti triangoli vengono a formarsi nel poligono supponendo che non ci sia un punto in cui concorrono più di due diagonali?

13. ($\circ, \star$) Sia S un insieme finito di punti nel piano, in posizione qualsiasi. Si traccino dei segmenti che congiungono tali punti in modo tale che nessuno dei segmenti tracciati ne intersechi nessun altro e in modo tale da non poter tracciare più alcun segmento. Dimostrare che, indipendentemente da come si scelgono i segmenti, si otterranno sempre un certo numero fissato N di triangoli, dipendente solo dalla configurazione di punti.

14. ($\circ, \star, \star$) [Teorema di Sylvester-Gallai]. Sia dato S un insieme finito di punti nel piano. Supponiamo che S soddisfi la seguente proprietà: dati due qualsiasi punti in S, la retta per essi contiene almeno un altro punto di S. Mostrare che tutti i punti in S sono allineati. La conclusione vale ancora se S è un insieme infinito?

15. ($\rightarrow$) [Semifinale A-2015,7] Arctanoid è un gioco il cui obiettivo è distruggere un enorme muro formato da 2015 mattoncini: Mario è imbattibile e li distrugge al ritmo di uno al secondo. Il punteggio viene assegnato in questo modo: ogni due mattoncini distrutti si guadagna un numero razionale di punti pari al rapporto tra 10000 e $s^2 - 1$, dove s sono i secondi trascorsi

dall'inizio del gioco. Perciò, quando dopo 2 secondi Mario distrugge il secondo mattoncino guadagna i suoi primi $\frac{10000}{3}$ punti e quando dopo 4 secondi distrugge il quarto guadagna altri $\frac{10000}{15}$ punti. Quanti punti avrà alla fine del gioco?

16. ($\circ$) Calcolare $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$.

17. ($\circ, \star$) Notare che $k^5 = \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)^5 - i^5 = \sum_{i=0}^{k-1} 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$. Usando ciò, ricordando quanto valgono $\sum_{i=0}^{k-1} i$, $\sum_{i=0}^{k-1} i^2$ e $\sum_{i=0}^{k-1} i^3$, ricavare $\sum_{i=0}^{k-1} i^4$. Formulare un metodo generale per ricavare $\sum_{i=0}^{k-1} i^h$ per un certo $h > 0$. Se interessa, le formule esplicite di $\sum_{i=0}^{k-1} i^h$ possono essere scritte ragionevolmente bene in termini dei *numeri di Bernoulli* (Digitare su internet *numeri di Bernoulli* per maggiori dettagli).

18. ($\rightarrow$) [Semifinale A-2015,13] Ezio Cardano, l'assassino matematico, girava per i tetti della Firenze rinascimentale eliminando tutti coloro che non sapevano risolvere le sue equazioni. A una delle sue vittime pose questo problema: siano a, b, c reali tali che $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 128$ e $a^5 + b^5 + c^5 = 28800$. Quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$?

19. ($\hookrightarrow$) [Semifinale A-2015,11] Per immortalare la sua ultima vittoria in Evolution Equation Soccer, Mario decide di fotografare la sua squadra di 11 giocatori (1 portiere, 4 difensori, 3 centrocampisti, 3 attaccanti). Per questo ordina ai suoi giocatori di disporsi su un'unica fila, uno a fianco all'altro. Però, gli attaccanti non si passano mai la palla tra di loro, quindi nessun attaccante vuole stare vicino ad un altro attaccante. I centrocampisti, invece, vogliono stare a tutti i costi vicini. In quanti modi si possono disporre gli 11 giocatori in modo che ognuno sia contento? Tutti i giocatori, anche quelli con lo stesso ruolo, sono distinguibili tra loro. Si risponda fornendo le prime quattro cifre del risultato.

20. ($\hookrightarrow$) [Semifinale A-2015,4] Il lemmang (plurale lemmings) è un simpatico animaletto protagonista di un gioco molto amato da Mario. Nell'ultimo livello ci sono delle buche, numerate da 0 a un certo numero n. In ciascuna di esse si possono imprigionare dei lemmings e in ogni momento sullo sfondo viene visualizzato il polinomio $p(x) = a_n x^2 + \ldots a_1 x + a_0$, dove a_i è il numero di lemmings nella buca i. Per completare il livello occorre che fare in modo che $p(7) = 33611$. Mario ci riesce riempiendo ogni buca con un numero di lemmings compreso tra 1 e 6. Determinare il prodotto dei coefficienti del polinomio in quel momento.