Regolarità per partizioni di alcune equazioni lineari e Teorema di Rado

Gioacchino Antonelli

July 12, 2015

Abstract

In questo seminario introdurrò la questione, ben nota in letteratura, della regolarità per partizioni di equazioni lineari. Il punto centrale del seminario sarà rispondere alla seguente domanda: data $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, un'equazione lineare omogenea in n incognite, quando è possibile che per ogni colorazione di $\mathbb{N}$ con un numero arbitrario di colori, esista una soluzione $(x_1, \ldots, x_n)$ monocromatica? La risposta sarà fornita dal Teorema di Rado. Collateralmente introdurrò la nozione di *grado di regolarità* (ovvero il più piccolo numero di colori che testimonia la non regolarità dell'equazione lineare) e discuterò, solo superficialmente senza alcuna dimostrazione, qualche questione ad essa collegata. Accennerò anche brevemente alla *Rado Boundness Conjecture*.

1 Lemmi e Teoremi utili

A lezione è stato dimostrato il seguente

Teorema 1 (van der Waerden)**.** *$\forall r \in \mathbb{N}$ sia $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ una r-colorazione. Allora esiste almeno un $1 \leq i \leq r$ tale che C_i contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.*

A lezione è stato dimostrato anche il seguente

Teorema 2 (Compattezza combinatoria)**.** *Sia X un insieme e $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi finiti di X. Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia r-regolare su X, ovvero tale che ogni volta che $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, esiste un $1 \leq i \leq r$ tale che $A \subseteq C_i$, con $A \in \mathcal{A}$. Allora, in tale ipotesi, esiste Y sottoinsieme finito di X tale che $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y.*

Un'immediata conseguenza dei due precedenti è la seguente

Teorema 3 (van der Waerden finito)**.** *Comunque dati due numeri r e l, esiste un numero $W(r,l)$ con la seguente proprietà: $\forall n \geq W(r,l)$, comunque siano scelti $C_1, \ldots, C_r$ di modo che $\{1, \ldots, n\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, esiste un $1 \leq i \leq r$ tale che C_i contiene una progressione aritmetica di lunghezza l.*

Proof. Basta notare che, in virtù del **Teorema 1.**, l'insieme delle progressioni artimetiche di lunghezza l è r-regolare su $\mathbb{N}$ e dunque per il **Teorema 2.** è regolare su un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$, diciamo A. Allora basta prendere $W(r,l) = \max A$. $\square$

Si può leggermente rinforzare il teorema di Van der Waerden come segue

Lemma 1. *Dati r, l, s tre numeri naturali, esiste un numero $M(r, l, s)$ con la seguente proprietà: $\forall n \geq M(r, l, s)$, comunque siano scelti $C_1, \ldots, C_r$ di modo che $\{1, \ldots, n\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, allora esiste un $1 \leq i \leq r$ tale che $a + d, \ldots, a + ld$ e sd appartengono a C_i.*

Proof. La dimostrazione segue per induzione su r.

- *Passo base* $r = 1$. In tal caso, è evidente che basta porre $M(1, l, s) = \max\{l + 1, s\}$. Infatti, se scelgo $a = d = 1$, i numeri che vogliamo essere monocromatici, divengono $2, \ldots, l + 1$, s, che sono tutti minori o uguali di $\max\{l + 1, s\}$. Siccome la colorazione è monocromatica non c'è niente da controllare, senonché i numeri siano nell'insieme, dunque basta effettivamente scegliere $M(1, l, s) = \max\{l + 1, s\}$.

- *Passo induttivo* Uso la notazione adottata nel **Teorema 3.**, denotando con $W(r, l)$, dunque, l'intero a partire dal quale vale la versione di van der Waerden finito. Mostro che è possibile scegliere

$$M(r, l, s) = sW(r, lM(r - 1, l, s))$$

  Sia dunque n un qualsiasi naturale con $n \geq sW(r, lM(r - 1, l, s))$. Mostro che vale la proprietà del Lemma. Considero una r colorazione $\{1, \ldots, n\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$. Essendo a maggior ragione $n \geq W(r, lM(r-1, l, s))$, allora esiste un certo $1 \leq j \leq r$ tale che C_j contiene una progressione aritmetica lunga $lM(r-1, l, s)$ fra i primi $W(r, lM(r-1, l, s)$ elementi. Dunque esistono degli a e d' tali che

$$X = \{a + id' : 1 \leq i \leq lM(r - 1, l, s)\} \subseteq \{1, \ldots, W(r, lM(r - 1, l, s))\}$$

  e di modo che $X \subseteq C_j$. Ci sono due possibilità

  - Esiste un certo $k \leq M(r - 1, l, s)$ per cui $sd'k$ appartiene a C_j (notare che $d'k \leq a + d'k \in X$ e dunque effettivamente $sd'k \leq sW(r, lM(r - 1, l, s)$, garantendo che effettivamente $sd'k$ è fra i numeri colorati). Allora, essendo $d = d'k$, $a+d, \ldots, a+ld$, ovvero $a + d'i, \ldots, a + ld'k$ appartengono a C_j (poiché $lk \leq lM(r - 1, l, s)$). Inoltre sd apparterrebbe anche a C_j e dunque avrei concluso.
  - Gli elementi dell'insieme $\{sd'k : 1 \leq j \leq M(r - 1, l, s)\}$ non appartengono mai a C_j. Dunque sono colorati con $r - 1$ colori (al più). In maniera naturale, la colorazione su questi numeri (a patto di dividere per sd') induce una colorazione su $B = \{1, \ldots, M(r-1, l, s)\}$ con $r-1$ colori. Dunque per ipotesi induttiva esistono dei numeri A e D tali che $A+D, \ldots, A+lD$ e sD, tutti appartenenti a B, hanno lo stesso colore (nel senso della colorazione indotta). Allora, rimoltiplicando per sd', ho che $sd'A + sd'D, \ldots, sd'A + lsd'D$ e $s(sd'D)$ hanno lo stesso colore nella colorazione iniziale. Dunque scegliendo $sd'A$ e $sd'D$ come i nuovi a e d, ho la tesi.

□

Dal lemma precedente si deduce il seguente

Corollario 1. *Per ogni r-colorazione di $\mathbb{N}$ e per ogni coppia s, l di interi positivi, esistono a e d interi positivi tali che gli elementi dell'insieme $\{a + id : -l \leq i \leq l\}$ e sd hanno lo stesso colore*

Proof. Per il **Lemma 1.** sicuramente esistono b e d tali che $b+d, \ldots, b+(2k+1)d$ e sd hanno lo stesso colore (basta concentrarsi solo sui primi $M(r, 2k + 1, s)$ numeri della colorazione). A questo punto basta scegliere $a = b + (k + 1)d$. □

2 Equazioni regolari per partizioni

Definizione 1. *Un'equazione lineare* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$*, con gli* a_i *interi, si dice regolare per partizioni se per ogni* r*- colorazione di* $\mathbb{N}$*, qualunque sia* r*, esiste una* n*-upla di numeri* $(x_1, \ldots, x_n)$ *che sono soluzioni dell'equazione.*

Definizione 2. *Un'equazione non regolare per partizione ha grado di regolarità* n *se è* n*-regolare (ovvero per ogni* n*-colorazione di* $\mathbb{N}$ *ha almeno una soluzione monocromatica) e non è* $n+1$*-regolare (e quindi chiaramente non è* m*-regolare per ogni* $m > n$*).*

Stato dell'arte 1. *Rado, nel 1933, riuscì a mostrare che un'equazione lineare del tipo* $ax + by + c = 0$ *o è regolare per partizioni, oppure ha grado di regolarità 1 ([1] pag.2). Egli congetturò allora l'esistenza di equazioni lineari di grado di regolarità* n *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. La congettura è rimasta aperta per lungo tempo, finché nel 2009 Alexeev e Tsimerman ([4]) provarono che l'equazione*

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2^i}{2^i - 1}\right) x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2^i}{2^i - 1} x_{i+1} = 0$$

ha grado di regolarità $n-1$*. Un articolo del 2014, di Noah Golowich, ([5]) verifica inoltre che la più semplice equazione*

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-2} x_{n-1} - 2^{n-1} x_n = 0$$

ha grado di regolarità $n-1$*.*

Fatto 1. *L'equazione* $x + y - 3z = 0$ *non è regolare per partizioni*

Proof. Definita $v_5(x)$ la più grande potenza di 5 che divide x, consideriamo la seguente 4-colorazione su $\mathbb{N}$: per ogni $1 \leq i \leq 4$, $x \in C_i \Leftrightarrow \frac{x}{5^{v_5(x)}} \equiv i \pmod 5$. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione monocromatica (x, y, z). Se tutti e tre i numeri non sono divisibili per cinque, allora, visto che sono monocromatici e vista la definizione della colorazione, $x \equiv y \equiv z \pmod 5$. Dunque sostituendo nell'equazione $x + y - 3z = 0$, e analizzando modulo 5 si avrebbe $x \equiv 0 \pmod 5$, che è assurdo vista la supposizione iniziale.

Se tutti e tre i numeri sono divisibili esattamente per la stessa potenza di 5, allora anche $\frac{x}{v_5(x)}$ e cicliche sarebbero soluzioni dell'equazione, poiché basterebbe dividere $x + y - 3z = 0$ per $v_5(x)$. Vista com'è definita la colorazione, però, *dividere un numero per 5 non ne altera la colorazione* e quindi un discorso simile a quello precedente, porta a concludere anche qui con un assurdo.

E', d'altra parte, molto semplice notare che se i tre numeri non sono divisibili esattamente per la stessa potenza di 5, ma almeno uno è divisibile per 5, dividendo l'equazione $x + y - 3z = 0$ per $\min\{v_5(x), v_5(y), v_5(z)\}$, ottengo ancora una soluzione monocromatica (per l'osservazione precedente) dell'equazione. In questo caso, però, alcuni fra x, y e z sono divisibili per 5 (non tutti) e i rimanenti appartengono alla stessa classe modulo 5 (diversa da 0). Un rapido controllo per esaustione mostra che nessuna di queste possibilità è contemplabile. $\square$

La colorazione utilizzata precedentemente, può essere generalizzata e sarà molto utile nella dimostrazione del Teorema di Rado.

Definizione 3. *Si definisce* c_p*-colorazione su* $\mathbb{N}$*, la* $(p-1)$*-colorazione che generalizza la 4-colorazione appena mostrata. Definita* $v_p(x)$ *come la più grande potenza di* p *che divide* x*, allora per ogni* $1 \leq i \leq p-1$*,* $x \in C_i \Leftrightarrow \frac{x}{p^{v_p(x)}} \equiv i \pmod p$*.*

A questo punto ci possiamo porre il problema vero e proprio: la regolarità per partizioni di equazioni lineari in generale, il quale può essere velocemente ricondotto al problema della regolarità per partizioni di equazioni lineari omogenee, fatto salvo per un piccolo caso che rende neessario l'uso di un risultato non del tutto elementare. ([1], Lemma 1 pagina 3, Theorem 3 pagina 4)

Teorema 4. *Si consideri l'equazione in n incognite, lineare, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, con gli a_i e b interi e $b \neq 0$. Sia $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$*

- *Se $s = 0$ l'equazione non è regolare per partizioni.*
- *Se $s \neq 0$ e b non è multiplo di s, l'equazione non è regolare per partizioni.*
- *Se $s \neq 0$ e $\frac{b}{s} \in \mathbb{N}$, allora l'equazione è regolare per partizioni.*
- *Se $s \neq 0$ e $-\frac{b}{s} \in \mathbb{N}$, allora l'equazione è regolare per partizioni se e solo se lo è $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.*

Proof.

- Per la dimostrazione si veda [1] a pagina 4.
- Idem come in (1). (Notare che la tesi come espressa nella *refrence*, mostra che, nel primo caso, l'equazione ha ordine di regolarità strettamente minore di $(2n-2)^{n-1}$ e nel secondo caso strettamente minore di $(3n-3)^{n-1}$).
- basta scegliere tutti gli x_i uguali a $\frac{b}{s}$.
- Fisso r un numero di colori. Considero una r-colorazione ($C : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$) di $\mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ non ha soluzioni monocromatiche. Sia C' una r-colorazione così definita: $C'(n) = C\left(n - \frac{b}{s}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (notare che è una definizione ben posta, poiché $-\frac{b}{s} \in \mathbb{N}$). Se per assurdo nella colorazione C', $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ avesse una soluzione monocromatica, allora essendo $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_i - \frac{b}{s}\right) = 0$, ed essendo $C'(x_i) = C\left(x_i - \frac{b}{s}\right)$, avrei trovato una soluzione monocromatica a $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ secondo la colorazione C, che è assurdo.

  D'altra parte, se ho una r-colorazione C di $\mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ non ha soluzioni monocramtiche, considero la colorazione C' così definita: $C'(n) = C\left(\left(1 - \frac{b}{s}\right) n + \frac{b}{s}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (notare che, ancora una volta, la definizione è ben posta). Se per assurdo in C' l'equazione $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, avesse soluzione, allora $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\left(1 - \frac{b}{s}\right) x_i + \frac{b}{s}\right) = b$ e dunque avrei prodotto una soluzione monocromatica per la colorazione C all'equazione $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$. Dunque, assurdo.

$\square$

Osservazione 1. *Notare che, in particolare, negli ultimi due punti dell'osservazione precedente abbiamo mostrato che le due equazioni hanno lo stesso grado di regolarità.*

Usando l'idea delle c_p-colorazioni, possiamo, infine, riuscire a mostrare il seguente teorema, dovuto a Rado

Teorema 5 (Teorema di Rado per equazioni lineari omogenee)**.** *Sia data $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ un'equazione lineare omogenea. Le seguenti sono equivalenti*

- *L'equazione è regolare per partizioni.*
- *L'equazione ha una soluzione monocromatica per ogni c_p-colorazione.*
- *Esistono alcuni coefficienti fra gli a_i la cui somma è nulla.*

Proof.

- $(1) \Rightarrow (2)$ ovvio.

- $(2) \Rightarrow (3)$. D'ora in poi considererò A un generico sottinsieme di $N := \{1, \ldots, n\}$. Per ogni numero primo p, considero la c_p-colorazione di $\mathbb{N}$. Per ipotesi ho una soluzione monocromatica $x_1, \ldots, x_n$ e dico che $x_i = p^{\alpha_i}(pt_i + k)$, con $1 \leq k \leq p-1$ fisso visto come è definita un c_p-colorazione. Dunque $\sum_{i=1}^{n} a_i p^{\alpha_i}(pt_i + k) = 0$. Dividendo l'equazione per $\min_i\{p^{\alpha_i}\}$, e guardando tutto modulo p, ho che esiste un sottoinsieme A di N tale che $k\sum_{i \in S} a_i \equiv 0 \pmod{p}$. D'altra parte i possibili sottoinsiemi di N sono in numero di 2^n, e i primi sono infiniti. Ne consegue che esiste almeno un sottoinsieme di N, diciamo A', tale che $k\sum_{i \in A'} a_i \equiv 0 \pmod{p}$ per infiniti primi p (dal momento che il discorso fatto prima vale per ogni primo). Ma allora $k\sum_{i \in A'} a_i = 0$ e dunque, visto che $1 \leq k \leq p-1$, si ha che $\sum_{i \in A'} a_i = 0$.

- Suppongo che alcuni coefficienti fra gli a_i hanno somma zero e senza perdita di generalità posso dire che sono i primi $k \leq n$. Dunque $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$. Chiaramente se $k = n$ l'equazione è banalmente regolare per partizioni (basta scegliere $x_i = 1$ sempre). Se $k \neq n$ sia $A = \sum_{i=k+1}^{n} a_i$. Se $A = 0$ la soluzione $x_i = 1$ sempre testimonia ancora la regolarità per partizioni dell'equazione. Allora suppongo $B \neq 0$. Sia $A = GCD(a_1, \ldots, a_k)$ e $s = \frac{A}{GCD(A,B)}$. Per come è stato scelto A, per Bezout, esistono dei λ_i tali che $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i = -A \cdot \frac{B}{GCD(A,B)}$. E' semplice, per verifica diretta, mostrare che se scelgo $x_i = a + \lambda_i d$ per $i = 1, \ldots, k$ e $x_i = sd$ per $i = k+1, \ldots, n$, allora ho una soluzione della lineare omogenea: infatti

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} a_i(a + \lambda_i d) + \sum_{i=k+1}^{n} a_i sd =$$

$$= -dA\frac{B}{GCD(A,B)} + dA\frac{B}{GCD(A,B)} = 0$$

  Sia $k_0 > \max\{|\lambda_i| : i = 1, \ldots, k\}$. Allora per il **Corollario 1.**, scegliendo l come k_0 e $s = \frac{A}{GCD(A,B)}$, ho che per ogni r-colorazione esistono degli interi positivi a e d tali che i numeri $\{a + \lambda d : -k_0 \leq \lambda \leq k_0\}$ e sd sono monocromatici. Ma d'altra parte, per come è stato scelto k_0, ho ottenuto dei numeri monocromatici che ho mostrato essere soluzione dell'equazione, dunque ho concluso.

$\square$

Stato dell'arte 2. *Un problema interessante da porsi, molto legato al Teorema di Rado, è il seguente: Data un'equazione E lineare omogena in n incognite, esiste una costante $B(n)$ tale che se E è r-regolare per ogni $r \leq B(n)$ allora E è regolare per partizioni? Il problema è conosciuto in letteratura come Rado Boundness Conjecture perché è stato, appunto, proposto da Rado. Egli stesso, come notato in **Stato dell'arte 1.**, ha mostrato che $B(2) = 1$. Recentemente, nel 2006, ([1] Theorem 2, pag. 3) è stato mostrato che $B(3) = 24$ e la questione sembra ad oggi aperta per le equazioni lineari di grado superiore.*

Riferimenti Bibliografici

[1]. J. Fox, D. Kleitman, *Abstract on Rados Boundness Conjecture*

[2]. I. Protasov, *Combinatorics of Numbers*

[3]. D. Glasscock, *Partition Regularity for Linear equations over* $\mathbb{N}$

[4]. B. Alexeev, J. Tsimerman, *Equations resolving a conjecture of rado on partition regularity*

[5]. N. Golowich *Resolving a Conjecture on Degree of Regularity of Linear Homogeneous Equations*