Numeri Complessi

Gioacchino Antonelli

August 5, 2016

1 Traccia della lezione:1.5h

1. *Presentazione dei numeri complessi.* Perché i numeri complessi? L'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzione reale, quindi inventiamoci un simbolo, i, tale che $i^2=-1$. Allora i numeri complessi sono sonostanzialmente una coppia di numeri reali, parte reale e parte immaginaria, e li possiamo scrivere come $a+bi$. *Accenno: sono così importanti perché vale il teorema fondamentale dell'algebra.* Come si sommano, sottraggono, moltiplicano e dividono. Cos'è il coniugio? Commuta con la somma e la moltiplicazione. Il modulo di un numero complesso, l'argomento di un numero complesso.

2. *Interpretazioni geometriche.* Vediamo chi sono questi moduli e argomenti. Introduzione al piano di Gauss: il modulo è la lunghezza del vettore, l'argomento è l'angolo formato con il semiasse positivo delle x (in senso antiorario). $a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. *Accenno all'esponenziale complesso:* $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ *e cosa significa.* Cerchiamo ora di dare un senso alle operazioni: la somma è una traslazione, il prodotto è una rotomotetia con centro l'origine, di angolo θ e ragione ρ (moltiplicando si fa il prodotto dei moduli e la somma degli argomenti). Come si eleva praticamente alla potenza n-esima? *Se c'è tempo parlare delle soluzioni dell'equazione* $z^n=z_0$ *con* z_0 *fissato, altrimenti parlarne tramite un esercizio.* Per capire quest'ultima affermazione c'è bisogno dell'esponenziale complesso.

   - *Domanda 1.* Cos'è il coniungo, geometricamente?
   - *Domanda 2.* A cosa corrisponde moltiplicare per i un numero complesso, geometricamente?

3. *Prendiamo confidenza con le trasformazioni geometriche e argomenti complementari.* In generale dato un numero complesso z e un numero complesso w, come si scrive il numero complesso w' che si ottiene ruotando w attorno a z di un angolo θ? Svolgere l'**Esercizio 2**. Formule di De-Moivre, ovvero n-plicazione del coseno e del seno.

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=e^{in\theta}=(e^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n= \tag{1}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(i\sin\theta)^j(\cos\theta)^{n-j}= \tag{2}$$

$$=\left(\cos^n\theta-\binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+\dots\right)+ \tag{3}$$

$$+i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^{3}\theta+\dots\right) \tag{4}$$

2 Esercizi assegnati

1. Svolgere i seguenti esercizi:

   - Calcolare i^{37} e $\frac{1}{i^{15}}$;
   - Determinare il modulo e l'argomento di $(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)$;
   - Verificare che $-1+2i$ è soluzione dell'equazione $z^3+z^2+3z-5=0$. Sapreste indicare un'altra soluzione di quest'equazione (senza fare sforzi)?
   - Calcolare $\left(\frac{1+i}{2-2i}\right)^{22}$;
   - Scrivere modulo e argomento delle cinque soluzioni complesse dell'equazione $z^5=-i$;
   - Cercare i numeri complessi tali che $z\bar{z}-z+\frac{i}{4}=0$;
   - ($\star$) Dimostra che la somma delle n soluzioni dell'equazione $z^n=z_0$, fissato z_0, è zero.

2. Dato un triangolo ABC si costruiscano, su ciascuno dei suoi tre lati, tre triangoli equilateri esterni. Mostrare che i centri di tali triangoli sono i vertici di un nuovo triangolo equilatero.

3. ($\star$) Un tizio trovò in soffitta un vecchio documento di un pirata in cui era spiegato come trovare un tesoro. C'erano scritte le istruzioni seguenti.

   - Vai sull'isola che non c'è, parti dalla quercia e vai verso l'olmo, contando i passi;
   - Poi gira a sinistra e fai lo stesso numero di passi fino a trovare il punto P_1;
   - Torna alla quercia e vai verso il fico, contando i passi;
   - Poi gira a destra e fai lo stesso numero di passi fino a trovare il punto P_2;
   - Il tesoro è nel punto medio fra P_1 e P_2.

   Il tizio arriva sull'isola che non c'è, vede il fico e l'olmo, ma la quercia era stata abbattuta. Però riuscì ugualmente a trovare il tesoro. Come fece?

4. Dati due numeri complessi nel piano di Gauss, diciamo a e b, come si scrive il loro punto medio?

   ($\star$) E in generale un punto sul segmento che li congiunge che divide il lato in due segmenti di rapporto dato λ? Scrivere, a questo punto, le coordinate del baricentro di un triangolo di vertici a, b e c.

5. Dato un numero complesso z, come si scrive il suo simmetrico rispetto alla retta che, nel piano di Gauss, passa per l'origine e forma un angolo di 30 gradi col semiasse positivo dell'asse x (in senso antiorario)? *Suggerimento: usare il coniugio e la rotazione.*

6. Data una circonferenza γ di centro O e raggio r, definiamo la trasformazione geometrica detta *inversione circolare* rispetto a γ, come segue: dato un punto A, il suo trasformato A' è sulla retta OA, dalla stessa parte di A rispetto ad O, in modo che $OA \cdot OA' = r^2$.

   Se z è un numero complesso nel piano di Gauss, chi è l'inverso circolare rispetto alla circonferenza unitaria (di centro l'origine e raggio 1) di z?

7. Calcolare $i^{2016} + (1+i)^{2016}$.

8. *Ragionando sui moduli e sugli argomenti*, cerca di capire se esiste un numero naturale n per cui:

   - $(1-i)^n = i$?
   - $(\star)$ $(\sqrt{3}-i)^n$ è un numero reale?
   - $(\star)$ $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = i$?
   - $(\star, \star)$ $\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)^n = 1$? *Nota: la soluzione che ho in mente è sicuramente al di fuori della portata dei ragazzi per cui la lezione è pensata. Tuttavia, è possibile che esistano soluzioni elementari che mi sfuggono.*

   Nel caso esista almeno un tale n, determina il minimo n per cui tale affermazione è vera.

9. $(\star)$ Trovare, usando le formule di De-Moivre, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

10. $(\star, \star)$ Cercando di generalizzare quanto fatto nell'esercizio precedente, mostrare che $\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, per qualsiasi m naturale, sono sempre soluzioni di un'equazione polinomiale a coefficienti interi.