Teoria ed esercizi proposti per gli stages di La Spezia e Salerno

Gioacchino Antonelli

April 30, 2017

Geometria

1 Prima Parte: Teoria

- Risoluzione guidata di un esercizio. [**Febbraio 2015 - 16**]

  Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo $\angle BAD$ interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che

  1. il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza;
  2. i triangoli ANB e ABM sono simili.

  Cosa vuol dire essere inscritto? Scrivo le ipotesi, *angle chashing*.

- Generalità sui quadrilateri inscrittibili e sulle circonferenze.

  Angoli al centro, angoli alla circonferenza. Angoli che sottendono un diametro. Angoli congruenti vedono corde congruenti. L'asse di una corda passa per il centro.

  Un quadrilatero è inscrittibile se e solo se la somma dei suoi angoli opposti è di 180 gradi. In un quadrilatero inscrittibile gli angoli che vedono la stessa corda sono congruenti. In realtà questa proprietà caratterizza l'essere ciclici. Proponi a questo proposito l'esercizio (1).

  Riepilogo sulle similitudini. Altre proprietà caratterizzanti i quadrilateri inscrittibili: Teorema della corda, teorema della tangente, teorema della secante. Definizione di potenza di un punto e sua espressione come $OP^2 - r^2$.

- Geometria un po' più metrica: ripassiamo i teoremi di Euclide. Proponi l'esercizio (3). Formula di Erone per l'area del triangolo con dimostrazione (o cenno?). Le bisettrici si incontrano: esistenza della circonferenza inscritta. Gli assi si incontrano: esistenza della circonferenza circoscritta. Proponi l'esercizio (8). Formule per il raggio della circonferenza inscritta e circoscritta, senza dimostrazione. Proponi l'esercizio (4). Calcolo dei segmenti di tangenza alla circonferenza inscritta: faccio notare che adesso conosco le potenze dei vertici di un triangolo rispetto alla circonferenza inscritta. Proponi l'esercizio (5). Enuncia il teorema di Stewart e ricava la formula della mediana.

- Definizione di baricentro e proprietà fondamentali senza dimostrazione: $AG = 2GM$, la congiungente dei due punti medi è parallela al lato opposto e ne è la metà.

2 Seconda Parte: Esercizi

Gli esercizi con la ($\star$) li reputo più impegnativi.

1. ($\star$) Sia ABC un triangolo. Sia H il suo ortocentro, ovvero l'intersezione delle tre altezze AH_A, BH_B e CH_C dove si intende che H_A, H_B e H_C sono i piedi delle altezze. Dimostrare che la retta AH è la bisettrice dell'angolo $H_BH_AH_C$. Dedurre che H è l'incentro (ovvero l'intersezione delle bisettrici) di $H_AH_BH_C$.

2. Un poligono si dice convesso se tutti i suoi angoli interni hanno ampiezza strettamente minore di 180 gradi. Quanti angoli di ampiezza minore di 150 gradi può avere al massimo un poligono convesso di 2016 lati?

3. Dato il triangolo ABC rettangolo in A costruiamo sull'ipotenusa il quadrato $BCDE$ (con D, E dalla parte opposta di A rispetto a BC). Sapendo che le aree dei triangoli ABE e ACD valgono rispettivamente 6 e 27, quanto vale l'area del triangolo ABC?

4. Sia S l'area di un triangolo ABC di lati a, b, c. Dimostra che il raggio della circonferenza inscritta è $\frac{2S}{a+b+c}$. (Considera l'incentro I e i triangoli AIB, BIC e CIA. La somma delle loro aree è ... e l'area di ognuno è ...)

   Dimostra che il raggio della circonferenza circoscritta è $\frac{abc}{4S}$ (Se si conosce il teorema dei seni è più agevole... altrimenti si può procedere come segue: considero ABC e H_A il piede della perpendicolare da A a BC. Sia A' il punto diametralmente opposto ad A: l'osservazione chiave è che ABH_A e $AA'C$ sono simili).

5. Sia ABC un triangolo di lati $AB = 10$, $BC = 12$ e $CA = 14$. Il segmento AI interseca la circonferenza inscritta in X. Quanto vale AX?

6. Alice, Berto e Carlo stanno cercando un tesoro. Sapendo che i tre amici si trovano sui vertici di un triangolo equilatero e che il tesoro si trova in un punto al di fuori del triangolo, a 1 metro di distanza da Alice e da Berto e 2 metri di distanza da Carlo, quanti metri misura il lato del triangolo?

7. ($\star$) Tre persone A, B, C si trovano in prossimità di un incrocio stradale tra due strade perpendicolari. A si trova esattamente sull'incrocio, mentre B e C si trovano su due strade distinte. Nel campo nei pressi dell'incrocio (all'interno dell'angolo retto $\angle CAB$) c'è un cartellone pubblicitario, sostenuto da due pali piantati nel terreno nei punti D ed E, che distano tra loro esattamente un metro. A, B e C vedono tutti il lato frontale del cartellone. Sapendo che gli angoli $\angle DAE$, $\angle DBE$ e $\angle DCE$ misurano tutti 30 gradi, qual è la distanza (in linea d'aria) tra B e C?

8. Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.

   - Si dimostri che gli angoli $\angle BAP$ e $\angle QAC$ sono congruenti;
   - Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;
   - Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

9. ($\star$) Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB che non contiene C. Si dimostri che $AP + BP = CP$.