Geometria – Esercizi

[I problemi con ($\star$) sono da intendersi come facoltativi: di fatto ciò vuol dire che verranno corretti come ultimi, se avanza tempo. Inoltre si consiglia di approcciarli solo dopo aver provato tutto il resto.]

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e sia P il punto di intersezione delle sue diagonali. Siano ω_1 e ω_2 le circonferenze circoscritte ai triangoli APD e BPC rispettivamente. Sia $Q \neq P$ la seconda intersezione di ω_1 e ω_2.

   Dimostrare che $\triangle AQD \sim \triangle CQB$.

2. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano H_A, H_B e H_C i piedi delle altezze sui lati BC, AC e AB rispettivamente.

   Dimostrare che $H_AH_B = H_AH_C$ se e solo se $AB = AC$.

3. Sia ω una circonferenza di centro O. Sia AB un diametro di ω e sia CD una corda perpendicolare ad AB. Sia E un punto di ω compreso tra B e C. Sia $M = AE \cap CO$ e $N = DE \cap BC$.

   Dimostrare che $MN \parallel AB$.

4. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia ω la circonferenza di diametro AB. Sia $M \neq A$ la seconda intersezione di ω con il lato AC. Sia $N \neq B$ la seconda intersezione di ω con il lato BC. Sia X il punto di intersezione tra le due rette tangenti in M e N a ω. Sia infine $H = AN \cap BM$.

   - Dimostrare che il quadrilatero $MHNC$ e' ciclico, e che il centro della circonferenza ad esso circoscritta e' X.
   - Dimostrare che C, X e H sono allineati.

5. Sia ABC un triangolo, sia I il suo incentro e sia P un generico punto all'interno di ABC. Sia s_A la retta simmetrica alla retta AP rispetto alla bisettrice AI. Definiamo le rette s_B e s_C in modo analogo.

   Dimostrare che le rette s_A, s_B e s_C concorrono in un certo punto Q.

   (Nota: Q prende il nome di "coniugato isogonale del punto P rispetto al triangolo ABC".)

6. Sia ABC un triangolo, sia P un generico punto al suo interno, e sia Q il coniugato isogonale di P rispetto ad ABC. Definiamo P_A come la proiezione ortogonale di P sul lato BC. Definiamo in modo analogo P_B, P_C, Q_A, Q_B e Q_C.

   Dimostrare che tali sei punti giacciono su una unica circonferenza.

7. Sia $ABCD$ un quadrilatero generico (con i vertici indicati in senso antiorario).

- Mostrare che i punti medi M, N, O, P dei lati AB, BC, CD, DA rispettivamente, formano un parallelogrammo detto parallelogrammo di Varignon di $ABCD$.
- Mostrare che $MO = NP$ se e solo se $AC \perp BD$.
- ($\star$) Mostrare che $AC \perp BD$ se e solo se $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

8. Sia ABC un triangolo acutangolo. Si costruiscano i triangoli equilateri AFB, BDC e CEA.

   - Mostrare che AD, BE e CF concorrono in un punto T tale che T appartiene a tutte e tre le circonferenze circoscritte dei triangoli equilateri su costruiti.
   - ($\star$) Mostrare, successivamente, che tale punto T, detto punto di Torricelli del triangolo, è tale che $AT + BT + CT$ sia la minima possibile al variare di T nel piano del triangolo.

9. Sia Γ una circonferenza, e sia A un punto fissato all'esterno di essa. BC è un diametro di Γ. Determinare, al variare di BC, il luogo degli ortocentri dei triangoli ABC.

10. Date due rette r e s, sia O la loro intersezione in modo tale che il piano resti diviso in 2 angoli acuti e due ottusi. Consideriamo un punto P nella porzione di piano delimitata da uno dei due angoli ottusi. Sia w una retta passante per P che interseca r e s in A e B (da sinistra verso destra). Analogamente una seconda retta w' passante per P interseca r e s in A' e B' dimodoché il quadrilatero $ABB'A'$ sia interamente contenuto in uno degli angoli acuti. Sia $C = AB' \cap A'B$. Si mostri che al variare di w e w' il punto C appartiene sempre ad una retta *fissa*, passante per O, detta polare di P rispetto alla coppia di rette (r, s).

    ($\star$) Cosa accade se al posto delle due rette si prende una circonferenza Γ? Ovvero vale ancora che prese due rette a caso w e w' passanti per P punto esterno e intersecanti Γ in A, B e C, D, allora $AD \cap BC$ sta sempre su una retta *fissa*? E per una conica in generale?

11. - Sia Γ una circonferenza e AB una sua corda. Sia Ω tangente ad AB in T e tangente internamente a Γ nel punto X. Sia $Y = XT \cap \Gamma$. Mostrare che Y è punto medio dell'arco maggiore AB.
    - ($\star$) (Teorema di Pascal) Data Γ una circonferenza, siano A, B, C, D, E, F sei punti presi su di essa. Siano $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ e $Z = CD \cap FA$. Mostrare che X, Y, Z sono allineati
    - Sia ABC un triangolo inscritto a Γ e Ω una circonferenza tangente internamente a Γ in X e tangente anche ai lati AB e AC in C' e B'. Usando i due risultati precedenti mostrare che l'incentro di ABC è il punto medio di $B'C'$.