Gara superiori
Math camp 2016

1. Trovare il più grande intero n minore di 10000 tale che $2n + 73$ è un quadrato perfetto.

2. Si hanno 10 bicchieri e 9 bicchieri blu. In quanti modi possono essere sistemati su due scaffali in modo che non ci siano due bicchieri blu vicini e che in ogni scaffale ci sia almeno un bicchiere?

3. In un trapezio $ABCD$ con $BC \parallel AD$ si ha che $BC = 1000$ e $AD = 1206$. Si ha, inoltre, che $\angle A = 37$ e $\angle D = 53$. Siano M e N i punti medi di BC e AD, rispettivamente. Trovare la lunghezza di MN.

4. Sia $n = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + \ldots - 2^2 - 1^2$ dove le addizioni e le sottrazioni si alternano a coppie. Calcolare il resto di n quando è diviso per 1000.

5. Siano A e B due vertici opposti di una scacchiera 5×5. Sebastiano parte dal vertice A e si dirige verso il vertice B seguendo un cammino minimo con passi di lunghezza 1 paralleli ai lati della scacchiera, mentre Matteo si muove allo stesso modo da B verso A. Qual è la probabilità che si incontrino? *Dopo aver trovato la frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità, si fornisca come risposta la somma delle cifre del numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore di tale frazione.*

6. Quali sono le prime quattro cifre dopo la virgola della scrittura in base 7 di $\frac{9}{13}$?

7. Si determini $0 \leq k < 257$ tale che

$$\binom{256}{0}^3 + \binom{256}{1}^3 + \ldots + \binom{256}{100}^3 \equiv k \pmod{257}. \tag{1}$$

8. Calcolare quanto vale la somma dei prodotti abc al variare di $1 \leq a < b < c \leq 9$.

9. Sia F_n l'n-esimo numero di Fibonacci, dove $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Quanto vale il resto della divisione di F_{973} per 89?

10. Sia ABC un triangolo equilatero di lato 24. Sia S la figura formata dai punti interni ad ABC che distano almeno $12\sqrt{2}$ sia da A che da B. L'area di S vale $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\pi$, dove a, b, c, d sono numeri razionali. Quanto vale $|a| + |b| + |c| + |d|$?

11. Ci sono 108 scatole inizialmente vuote. Una mossa consiste nello scegliere due scatole e mettere in ognuna delle due un numero uguale (a scelta) di sassi. Dopo quante mosse, come minimo, tutte le scatole conterranno un numero diverso di sassi?

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e sia P un punto al suo interno, sapendo che $AB = \sqrt{3}, BC = \sqrt{2}$, $CD = 2, AP = BP = 1, CP = DP = 2$, determinare l'angolo acuto tra le rette AD e PM dove M è il punto medio di BC.

13. Determinare le ultime quattro cifre in base 10 di $\lfloor (50 + \sqrt{2499})^{10} \rfloor$.

14. Dato un rettangolo 20×15 determinare la probabilità che disegnando a caso una circonferenza di raggio 1 al suo interno questa non intersechi le diagonali del rettangolo. *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità.*

15. Consideriamo le parole di lunghezza 5 scritte usando un alfabeto di 5 lettere. Ogni parola viene venduta ad un prezzo di $\frac{1}{n+1}$, dove n è il numero di lettere dell'alfabeto che mancano nella parola. Quanto si ricava in totale?

16. Sia data una circonferenza di raggio $\sqrt{13}$ e sia A un punto a distanza $4 + \sqrt{13}$ dal centro della circonferenza. Sia B il punto sulla circonferenza più vicino al punto A. Una retta passante per A interseca la circonferenza nei punti K e L. La massima area possibile di BKL può essere scritta nella forma $\frac{a - b\sqrt{c}}{d}$, dove a, b, c, d sono interi positivi, a e d sono coprimi e c non è diviso da alcun quadrato. Trovare $a + b + c + d$

17. Per ogni intero positivo k, sia S_k la progressione aritmetica crescente che ha come primo termine 1 e ragione k. Per quanti valori di k, S_k contiene 2015?

18. Una serie geometrica infinita ha somma 2015. Una nuova serie è ottenuta elevando al quadrato ogni termine della serie originale e la sua somma è 20150. Si dia come risposta la somma tra numeratore e denominatore della ragione della serie originale.