Disuguaglianze e problemi di massimo e minimo

Gioacchino Antonelli

August 5, 2016

1 Traccia della lezione:1.5h

1. *I quadrati sono sempre positivi.* E' la disuguaglianza più semplice che ha moltissime conseguenze: $x^2 \geq 0$. Deduciamo la famosa disuguaglianza aritmetico-geometria: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. L'uguaglianza vale se e solo se $a = b$. Generalizzazione a n-variabili con dimostrazione smoothing. Notare che queste disuguaglianze valgono per i numeri *reali positivi.* Dimostrazione geometrica di $QM \geq AM \geq GM \geq HM$ in 2 variabili $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$. Enunciato e dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: il prodotto delle somme dei quadrati è maggiore o uguale del quadrato delle somme dei prodotti.

2. *Prime interpretazioni geometriche.* Fra i rettangoli di perimetro assegnato, il quadrato ha area massima. Analogamente fra i rettangoli di area assegnata, il quadrato ha area minima (*Si usa $AM \geq GM$ in due variabili*). Ragionare un attimo sul fatto che queste due formulazioni sono duali.

   Fra i rettangoli di data diagonale, quello con area maggiore è il quadrato (*Si usa $QM \geq AM$ in due variabili*). Chiedere qual è la formulazione duale. *Fra i rettangoli di data area, quello con diagonale minore è il quadrato.*

   Classico problema di Erone: dati due punti A e B in uno dei due semipiani generati da una retta r, cercare il punto C su r tale che $AC + CB$ è minima (*Il problema del bambino che, partendo da un dato punto sulla spiaggia, deve andare al mare a riempire il secchiello per poi svuotarlo in una dighetta costruita in un altro punto*). Soluzione geometrica che usa la disuguaglianza triangolare.

3. *Altre disuguaglianze.* La disuguaglianza di Nesbitt: dati tre numeri reali positivi a, b, c vale

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

   Dimostrarla usando la sostituzione $b + c = x, c + a = y, a + b = z$.

   La disuguaglianza di riarrangiamento: ho due n-uple di numeri reali positivi, ossia $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$. Indicando con $c_1, \ldots, c_n$ una generica permutazione di $b_1, \ldots, b_n$, per quale scelta della permutazione $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ è massimo o minimo? Ad esempio ho 3 macchine da 5000, 10000 e

15000 euro. Devo comprarne 2 di un tipo, 3 di un altro e 4 del rimanente. Come faccio per spendere di meno? E per spendere di più? La risposta è ovvia. Generalizziamo come segue: dati $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ e $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ reali positivi, allora $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ risponde alla questione di massimo precedente e $a_1 b_n + \ldots + a_n b_1$ alla questione di minimo. Svolgere la dimostrazione.

2 Esercizi assegnati

1. Risolvi i seguenti esercizi di riscaldamento:

   - Sia x un numero reale positivo. Usando la disuguaglianza $AM \geq GM$ mostrare che $x + \frac{1}{x} \geq 2$;
   - Usando la disuguaglianza $AM \geq GM$ mostra che dati a, b, c tre numeri reali positivi, allora $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$;
   - Consideriamo tutte le coppie (x, y) di numeri reali positivi tali che $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10$. Ne esiste una tale che $xy = \frac{1}{100}$? Quanto può valere al minimo xy? E al massimo? (*Per il minimo applica direttamente $AM \geq HM$ e per quanto riguarda il massimo cerca di dimostrare che puoi ottenere qualsiasi numero grande a piacere*);

2. ($\star$) Dimostra $QM \geq AM$ (la media quadratica è maggiore o uguale della media aritmetica) in n variabili *reali positive*, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e notando che l'ugaglianza è verificata se e solo se $x_1 = \ldots = x_n$.
$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{2}$$

3. ($\star$) Dimostra $GM \geq HM$ (la media geometrica è maggiore o uguale della media armonica) in n variabili *reali positive*, usando la disuguaglianza $AM \geq GM$ e usando qualche artificio algebrico. Mostrare infine che il caso di uguaglianza vale se e solo se $x_1 = \ldots = x_n$.
$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}. \tag{3}$$

   Con questo esercizio e il precedente, uniti al risultato mostrato a lezione, si è mostrato che $QM \geq AM \geq GM \geq HM$ anche in n variabili *reali positive* e in più, per ogni disuguaglianza, l'uguale vale se e solo se tutte le variabili sono uguali.

4. Dimostra, usando una delle disugualianze viste a lezione, che se x e y sono reali positivi, allora $(x + 2y)^3 \geq 27xy^2$. Quando vale l'uguaglianza?

5. Dati n numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$ tali che $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, determinare quanto vale al minimo la somma $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$ e in tal caso quanto vale ciascuno degli addendi.

6. ($\star$) L'obiettivo di questo esercizio è mostrare che fra i triangoli isosceli iscritti in una medesima circonferenza, *quello* (ovviamente a meno di rotazione) equilatero ha area massima. Per farlo mostra i seguenti punti:

   - Qualsiasi triangolo isoscele ottusangolo non può realizzare l'area massima;
   - In virtù dell'osservazione precedente, possiamo restringerci a considerare solo i triangoli isosceli acutangoli. Dunque, detta x l'altezza del triangolo isoscele relativa alla base, e detto r il raggio della circonferenza, nota che $0 < x < 2r$ e scrivi l'area in funzione di x e r;

- Usando una versione *pesata* di $AM \geq GM$, concludi che l'area è massima quando $x = \frac{3}{2}r$ e concludi che questo è il caso del triangolo equilatero.

7. Dati due punti A e B nello stesso semipiano generato da una retta r, cerca il punto C su r tale che $|AC - BC|$ sia massimo.

8. Mostra che se a, b, c sono numeri reali positivi, allora $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

9. $(\star, \star)$ [Disuguaglianza di Chebyshev] Se $a_1 \geq \ldots a_n \geq 0$ e $b_1 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ allora
$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}. \tag{4}$$