I numeri complessi nella geometria euclidea

Damiano Zeffiro damiano.zeffiro@sns.it
Gioacchino Antonelli gioacchino.antonelli@sns.it

November 7, 2014

Abstract

All'interno di questo pdf ci siamo proposti di trattare l'utilizzo dei numeri complessi per la risoluzione di problemi di geometria nelle gare di matematica.
La trattazione è completamente elementare: un'introduzione ai numeri complessi più che sufficiente per comprendere i concetti esposti si può trovare ad esempio qui.

Indice

1 Introduzione

Ecco alcuni fatti che useremo più volte:

- *Angoli orientati*: Si definisce angolo orientato fra due rette r_1 e r_2 l'angolo di cui la retta r_1 deve *ruotare in senso antiorario* (d'ora in poi quando si dirà *ruotare* si assumerà questa convenzione di senso) per coincidere con la retta r_2. In maniera del tutto analoga l'angolo $\angle ABC$ è l'angolo di cui la retta passante per AB deve ruotare per coincidere con la retta passante per AC. E' immediato notare che si può parlare di angoli orientati a meno di angoli piatti e che in generale $\angle ABC$ potrebbe non essere uguale all'angolo ABC inteso in senso classico ma al suo supplementare.
  In questo articolo indicheremo inoltre con $\arg(z)$ l'angolo (appartenente a $[0, 2\pi)$) formato dal numero complesso z con il semiasse positivo.

- *La coniugazione commuta con le operazioni di somma e prodotto*:
  $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(a + bi) = a - bi \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ soddisfa

  $$f(y)f(z) = f(yz), f(y + z) = f(y) + f(z) \quad \forall \quad y, z \in \mathbb{C}$$

  Inoltre siccome $f(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, f è una funzione $\mathbb{R}$-lineare (ovvero $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in \mathbb{C}$) e iniettiva.[1]

- $z \in \mathbb{R}$ sse $z = \bar{z}$, $z \in \mathbb{I}m$ sse $z = -\bar{z}$

- In qualche esempio (ma non è necessario per capire i concetti esposti) per brevità useremo il formalismo del prodotto matrice vettore, e indicheremo con ${}^tM$ la matrice trasposta di M. In particolare se a e b sono due vettori riga di dimensione n,

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a \cdot^t b$$

Esercizi
Abbiamo indicato con * gli esercizi particolarmente interessanti come idee o come risultato; con ** gli esercizi che illustrano tecniche o fatti fondamentali da ricordare o da saper ricavare per usare i numeri complessi nei problemi di geometria.
Non serve e non è consigliato svolgere effettivamente tutti i conti - nel formulario e nella sezione tracce e soluzioni sono riportati comunque hint e risultati. Tuttavia aver capito le tecniche qui esposte implica saper individuare molto rapidamente una soluzione ragionevolmente corta a tutti gli esercizi. E' anche consigliato guardare in ogni caso le soluzioni proposte e in generale più soluzioni per uno stesso esercizio. A priori qualsiasi problema di geometria si può risolvere algebricamente, ma spesso esistono soluzioni particolarmente brevi o eleganti.

[1] Usando termini più matematici, f è un isomorfismo di $\mathbb{C}$ come campo, che ne fissa il sottocampo $\mathbb{R}$

Queste soluzioni, oltre ad essere preferibili in gara per ovvi motivi di tempo, possono anche suggerire nuovi metodi o generalizzazioni del risultato geometrico che si deve dimostrare.
Infine, per riuscire a usare con efficacia quanto qui esposto è indispensabile risolvere svolgendo anche tutti i conti qualche esercizio.

1.1 ** Mostrare che $e^{i2\arg(x)} = \frac{x}{\bar{x}}$. Sia g l'applicazione $g(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.

1.2 ** Usando l'esercizio precedente mostrare che $\angle ABC = \angle XYZ$ come angoli orientati sse $g\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = g\left(\frac{x-y}{x-z}\right)$.

1.3 ** Si mostri che i triangoli ABC e DEF sono simili e con la stessa orientazione ($\angle ABC = \angle DEF$ come angoli orientati) se e solo se

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{d-e}{f-e}$$

1.4 * Si dimostri che i triangoli $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ sono simili se e solo se esiste un vettore $h = (h_1, h_2, h_3)$ di numeri complessi tale che, posto $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$,

$$(1, 1, 1) \cdot^t h = a \cdot^t h = b \cdot^t h = 0$$

Posto

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per la definizione di prodotto matrice-vettore, la condizione precedente è equivalente all'esistenza di un vettore $h \neq 0$ tale che $Mh = 0$, e dalle proprietà del determinante discende facilmente che questo è vero sse $\det(M) = 0$.

1.5 * Sia ABC un triangolo, e siano A', B', C' tali che i triangoli ABC', $CA'B$, $B'CA$ siano simili (con i vertici ordinati in questo senso). Siano H_1, H_2, H_3 punti corrispondenti in questi triangoli simili. Allora $H_1H_2H_3$ è simile ad ABC'.

1.6 * Definiamo prodotto complesso e prodotto scalare tra due numeri complessi come $a \times b = a\bar{b} - b\bar{a}$ e $a \cdot b = a\bar{b} + b\bar{a}$ rispettivamente. Indichiamo ora con $|x|$ il modulo del numero complesso x (pensato come vettore).

- Si dimostri che, se θ è l'angolo tra b ed a (calcolato in senso antiorario e a partire da a),

$$a \times b = |a||b| sen\theta \qquad a \cdot b = |a||b| cos\theta$$

- Ne si deduca che il prodotto complesso e il prodotto scalare tra numeri complessi godono allora di tutte le proprietà del prodotto vettoriale e del prodotto scalare tra vettori. In particolare, prodotto scalare e prodotto vettoriale possono essere usati per dimostrare perpendicolarità e allineamenti.

Triangoli Equilateri [2]

1.7 Dati tre numeri complessi a, b, c mostrare che vale $ab+bc+ca = a^2+b^2+c^2$ se e solo se abc è equilatero.

1.8 Consideriamo due triangoli equilateri ABC e $A'B'C'$ (lettere in senso antiorario). Prendiamo i punti medi L, M, N dei segmenti AA', BB' e CC'. Dimostrare che il triangolo LMN è equilatero.
Supponiamo adesso che A e A' siano coincidenti.
Dimostrare che i punti medi di AC, AB' e BC' sono vertici di un triangolo equilatero.

1.9 In un triangolo equilatero ABC, si traccia una retta parallela ad AC che interseca AB in M e BC in P. Chiamiamo D il baricentro di PMB ed E il punto medio di AP. Determinare le ampiezze degli angoli del triangolo DEC.

1.10 Consideriamo due triangoli equilateri OAB e $OA'B'$ (lettere in senso antiorario). Indichiamo con S il baricentro del triangolo OAB e con M e N i punti medi dei segmenti $A'B$ e AB'. Mostrare che il triangolo SMB' è simile al triangolo SNA'.

[2] I problemi seguenti sono tratti da una lezione tenuta dal prof. Michele Barsanti in occasione degli "Incontri Olimpici 2014", stage di matematica di aggiornamento per i docenti tenuto con cadenza annuale. Si veda `http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Incontri_Olimpici_2014/`

2 Trasformazioni geometriche sul piano complesso

Come vedremo, esiste una facile corrispondenza tra trasformazioni geometriche e operazioni in complessi (in particolare somma, prodotto, inverso e coniugio).

2.1 Traslazione

Pensando alla corrispondenza tra complessi e vettori, è facile vedere che una traslazione è una trasformazione della forma $z' = z + c$ con c un qualunque complesso fissato.

2.2 Rotazione

Ogni numero complesso può essere scritto in forma polare, ovvero $z = \rho e^{i\theta}$ dove ρ è il modulo, ovvero, pensando all'interpretazione geometrica nel piano complesso, è la distanza fra l'origine e il punto identificato da z; θ è l'argomento, ovvero l'angolo formato in *senso antiorario* dal semiasse reale positivo e la retta oz dove o è l'origine.

Data una rotazione in senso antiorario di un angolo ϕ attorno all'origine, essendo $z = \rho e^{i\theta}$, allora il trasformato $z' = \rho e^{i(\theta+\phi)}$ e dunque $z' = \alpha z$ ove $\alpha = e^{i\phi}$. Segue facilmente che ogni rotazione rispetto all'origine si può scrivere come $z' = \alpha z$ con $|\alpha| = 1$.

Chiaramente componendo con una traslazione, la rotazione attorno a c ha equazione in generale $z' = \alpha(z - c) + c$ dove $|\alpha| = 1$.

Equazione dell'angolo Siano dati tre punti nel piano complesso a, b, c. L'obiettivo è cercare una relazione che leghi i seguenti tre numeri complessi con l'angolo orientato $\angle abc$. Per semplicità ragioniamo ponendo l'origine in b e dunque traslando tutto di un vettore $-b$.

$$a \to a - b \qquad b \to o \qquad c \to c - b$$

dove o è l'origine. Abbiamo notato che la moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1 è una rotazione in verso antiorario attorno all'origine. Inoltre ci interessa trovare una relazione con l'angolo con cui ruotare la retta ab in senso antiorario per farla coincidere con cb e dato che la traslazione lascia gli angoli invariati ciò equivale a trovare una relazione con l'angolo con cui ruotare la retta $(a - b)o$ in senso antiorario per farla coincidere con $(c - b)o$.

Per quanto notato precedentemente $(a-b)e^{i\phi}$ dove $\phi = \angle abc$ giace sulla retta $(c-b)o$ (proprio perché la moltiplicazione per $e^{i\phi}$ codifica una rotazione in senso antiorario dell'angolo necessario per portare la retta $(a-b)o$ su $(c-b)o$).Dunque a meno di un fattore reale, che risulta banalmente essere $\dfrac{|c-b|}{|a-b|}$ si ottiene $c-b$.

Dunque
$$c - b = \frac{|c-b|}{|a-b|}(a-b)e^{i\phi}$$
ove $\phi = \angle abc$.

2.3 Omotetia

L'omotetia di centro l'origine e ragione $\lambda \in \mathbb{R}$ ha ovviamente equazione $z' = \lambda z$, poiché la moltiplicazione per un reale agisce esclusivamente sul modulo. In maniera analoga l'omotetia di centro c e ragione λ ha equazione $z' = \lambda(z-c)+c$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.4 Rotomotetia

Si definisce rotomotetia di ragione r, centro O e angolo θ la trasformazione che si ottiene componendo una rotazione attorno ad O di angolo θ e un'omotetia di centro O e ragione r.

Esercizio 2.1*

a Mostrare che qualsiasi rotomotetia rispetto con centro l'origine si può scrivere come $z' = \alpha z$ dove α è un opportuno numero complesso.

b Trovare l'equazione per la rotomotetia di centro z_0 e di angolo α.

c Dati 4 punti a, b, c, d nel piano complesso, mostrare che se essi non formano un parallelogrammo, allora esiste una e una sola rotomotetia che manda a in b e c in d. Trovarne il centro e l'α.

d Mostrare che il centro di tale rotomotetia coincide con il centro della rotomotetia che manda a in c e b in d.

e (Caratterizzazione del centro) Siano AC e BD due segmenti nel piano non paralleli e sia X l'intersezione delle rette su cui essi giacciono. Sia W l'ulteriore intersezione delle circonferenze circoscritte a ABX e CXD. Mostrare che W è il centro dell'unica rotomotetia che manda A in C e B in D e dunque è anche il centro dell'unica rotomotetia che manda A in B e C in D.

Osservazione
In questo modo i complessi consentono di scrivere bene l'intersezione di due circonferenze di cui si conoscano due corde "particolari", i cui vertici sono a due a due allineati con la seconda intersezione delle circonferenze.

2.5 Inversione e trasformazioni di Moebius

Si definisce inversione di centro M e raggio r la trasformazione che associa ad ogni punto P del piano, meno l'origine, un punto P' tale che $MP \cdot MP' = r^2$ e M, P, P' sono allineati con P e P' dalla stessa parte rispetto a M.

Esercizio 2.2

- Mostrare che, adottando le coordinate complesse, detto p' l'inverso di p rispetto a m allora $(p' - m)(\bar{p} - \bar{m}) = r^2$.
- Dedurre che l'inverso di z rispetto alla circonferenza unitaria centrata nell'origine è $\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Si definisce invece trasformazione di Moebius quella trasformazione che manda z in $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con a, b, c, d complessi $ad - bc \neq 0$. In realtà questa trasformazione non è esattamente una trasformazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, ma da $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ in $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. ∞ si può definire come un punto per cui passano tutte le rette di $\mathbb{C}$, tale che $M(-\frac{d}{c}) = \infty$ (con la convenzione che $\frac{d}{0} = \infty$), e che $M(\infty) = \frac{a}{c}$.[3]
Definiamo ora il birapporto trai numeri z_1, z_2, z_3, z_4 come

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = [z_1, z_2; z_3, z_4]$$

Come vedremo, $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ sse i 4 punti stanno sulla stessa circonferenza o sulla stessa retta. [4]

Esercizio 2.3

1 Dimostrare che la composizione di due trasformazione di Moebius è ancora una trasformazione di Moebius, così come l'inversa di una tale trasformazione.

2 Dimostrare che date due terne di punti a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3, esiste un'unica trasformazione di Moebius che manda a_i in b_i.

3 Dimostrare che una trasformazione di Moebius conserva il birapporto. Dedurne che manda una retta in una retta o una circonferenza, e una circonferenza in una retta o una circonferenza. Dedurne anche che dati $a_i, 1 \leq i \leq 4$ e $b_i, 1 \leq i \leq 4$ esiste una trasformazione di Moebius che manda a_i in $b_i, 1 \leq i \leq 4$ sse $[a_1, a_2; a_3, a_4] = [b_1, b_2; b_3, b_4]$.

[3] Anche se non serve ai fini di questa trattazione, il lettore interessato può vedere ad esempio qui la definizione standard di trasformazione di Moebius come proiettività di $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$.

[4] Il birapporto viene usato anche come metodo sintetico; nell'articolo http://www.mit.edu/ alexrem/ProjectiveGeometry.pdf ne è esposta qualche proprietà; si dimostri ad esempio che la definizione data coincide con quella dell'articolo

4 Si noti che, grazie al punto ∞, anche le rette si possono intersecare in due punti. Si dimostri allora che due circonferenze che si intersecano in due punti possono essere mandate in due rette passanti per l'origine.

Si noti ora che un'inversione non è altro che una particolare trasformazione di Moebius composta con il coniugio, e che componendo un'inversione con un'opportuna isometria si può ottenere una qualsiasi trasformazione della forma

$$M'(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

Esercizio 2.4
Dedurne dunque che anche per l'inversione è valido il punto 1, e che l'inversione in generale non conserva il birapporto, ma che se il birapporto di 4 punti è h il birapporto della loro immagine è $\bar{h}$.

3 Rette e circonferenze

Dati due punti a e b, la retta parametrica passante per essi ha equazione $z = a+t(b-a)$ ove $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo innanzitutto che tre punti a, b, c sono allineati se e solo se $c = a + t(b - a)$ (1) con $t \in \mathbb{R}$. D'altra parte la (1) vale se e solo se $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$,e usando che $z \in \mathbb{R}$ se e solo se $z = \bar{z}$, otteniamo la forma implicita per una retta in complessi: $mz + \bar{m}\bar{z} + n = 0$, con $n \in \mathbb{R}$ (2).

Esempio 1
Dati due punti a e b vogliamo cercare il punto c su ab che lo divide in due segmenti che stanno fra loro in rapporto λ. Ciò è molto semplice ponendo l'origine in a (effettuando una traslazione di $-a$) e notando che il traslato tale punto diventa l'omotetico con ragione $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ del traslato di b. Dunque il punto c, ritornando nel sistema originario (effettuando una traslazione di $+a$), è

$$c = \frac{\lambda}{1+\lambda}(b-a) + a = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

Esempio 2
Ci si propone di cercare l'equazione della parallela ad ab passante per c. Supponiamo di voler trovare la parallela ad ob' passante per c', dove o è l'origine del sistema di riferimento. Pensando ai complessi come vettori, chiaramente risulta che $z = c' + tb'$ con $t \in \mathbb{R}$ è la forma parametrica di tale parallela. Allora traslando in modo che l'origine diventi a e ritraslando alla fine l'equazione parametrica della parallela è

$$z = (c-a) + t(b-a) + a = c + t(b-a)$$

ove $t \in \mathbb{R}$.

Per ottenere la formula implicita basta notare che $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = \bar{t} \Leftrightarrow \frac{z-c}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Inoltre ciò fornisce anche una condizione per il parallelismo fra ab e cd, ovvero deve valere che esiste un certo $t \in \mathbb{R}$ tale che $d = c + t(b - a)$ ovvero $\frac{d-c}{b-a} = \frac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Esempio 3
Ci si propone di cercare l'equazione della perpendicolare ad ab passante per c. Supponiamo, come prima, di voler trovare la perpendicolare ad ob' passante per c', dove o è l'origine del sistema di riferimento. Ciò, però, è equivalente a trovare la parallela a o (ib') passante per c, poiché ib' è perpendicolare a b'. Dunque l'equazione è $z = c' + itb'$ con $t \in \mathbb{R}$ è la parametrica cercata. Ritornando al problema originale e traslando risulta dunque che

$$z = (c-a) + it(b-a) + a = c + it(b-a)$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è l'equazione parametrica.

Il passaggio alla forma implicita è simile a quello dell'**Esempio 1**, così come è semplice ricavare la condizione di perpendicolarità fra ab e cd.

Esercizi

3.1 * Si verifichi che vale in effetti (2). Inoltre si mostri che $-\frac{n}{2m}$ appartiene alla retta, la quale è perpendicolare al vettore rappresentato da $\bar{m}$.

3.2 Si scrivano in maniera estesa le equazioni implicite dell'**Esempio 2** e dell'**Esempio 3**.

3.3 Si supponga ora di avere le rette in forma implicita $a_i z + \bar{a}_i \bar{z}_i + b_i = 0$ con $i = 1, 2$. Trovarne l'intersezione o la condizione per cui le rette sono parallele.

3.4 Determinare quando le rette $a_i z + \bar{a}_i \bar{z}_i + b_i = 0$ con $i = 1, 2$ sono perpendicolari. Determinare l'equazione implicita per la perpendicolare alla prima retta passante per z_0.

3.5 * Trovare una formula per il punto d'intersezione delle rette per a, b e c, d dove a, b e c, d sono numeri complessi.

3.6 * Dati a, b e c scrivere i numeri complessi dei seguenti punti:

- Proiezione di a sulla retta passante per b e c.
- Simmetrico di a rispetto alla retta passante per b e c.

Esempio 4

Si vuole dare una caratterizzazione, attraverso determinante, della condizione di allineamento e di concorrenza in complessi. Siano z_1, z_2 e z_3. Se essi fossero allineati, allora per la (2) esisterebbero a complesso e b reale tali che $az + \bar{a}\bar{z} + b = 0 \Leftrightarrow z + \frac{\bar{a}}{a}\bar{z} + \frac{b}{a} = 0$ è soddisfatta per $z = z_1, z_2, z_3$. Ciò vuol dire che il sistema

$$\begin{cases} z_1 + v\bar{z_1} + w = 0 \\ z_2 + v\bar{z_2} + w = 0 \\ z_3 + v\bar{z_3} + w = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ha soluzioni nelle incognite v, w. La matrice dei coefficienti essendo una 3 x 2 ha rango massimo 2, e la matrice completa, siccome il sistema ha soluzione, ha lo stesso rango. Ma essendo la matrice completa una 3 x 3 e avendo rango al massimo 2, sicuramente il suo determinante deve essere 0, ovvero

$$\begin{vmatrix} \bar{z_1} & 1 & -z_1 \\ \bar{z_2} & 1 & -z_2 \\ \bar{z_3} & 1 & -z_3 \end{vmatrix} = 0$$

e a meno di scambiare righe e cambiare segni il determinante rimane 0, ovvero

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z_3 & \bar{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si mostra facilmente (come?) anche che questa condizione è sufficiente all'allineamento. Dunque per mostrare che tre punti sono allineati basta verificare che $z_1\bar{z_2}+z_3\bar{z_1}+z_2\bar{z_3}-z_3\bar{z_2}-z_1\bar{z_3}-z_2\bar{z_1}=0$.

Osservazione

Abbiamo fondamentalmente ritrovato che z_1, z_2, z_3 sono allineati sse $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} \in \mathbb{R}$. Vedi ora un altro modo di dimostrare la condizione per l'allineamento con il determinante?

Esercizi

3.7 * Visti i ragionamenti fatti nell'**Esempio 4** e la (2) mostrare che

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

è l'equazione della retta passante per z_1 e z_2 e che

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

è la retta passante per z_1 parallela al vettore rappresentato dal complesso c (infatti questa contiene $z_1 + c$...)

3.8 * Mostrare che date tre rette $a_i z + \bar{a_i}\bar{z} + b_i = 0$ con $i = 1, 2, 3$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \bar{a_1} & b_1 \\ a_2 & \bar{a_2} & b_2 \\ a_3 & \bar{a_3} & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

è condizione necessaria e sufficiente per la concorrenza (eventualemente all'infinito, ossia parallelismo) delle tre rette. Date invece in forma implicita $z = a_i + b_i t$ per $i = 1, 2, 3$, condizione necessaria e sufficiente è

$$\begin{vmatrix} b_1 & \bar{b_1} & a_1\bar{b_1} - \bar{a_1}b_1 \\ b_2 & \bar{b_2} & a_2\bar{b_2} - \bar{a_2}b_2 \\ b_3 & \bar{b_3} & a_3\bar{b_3} - \bar{a_3}b_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.9 * Dati 3 numeri complessi a_1, a_2, a_3 non allineati, dimostrare che per ogni punto p sul piano esiste un'unica una terna di numeri reali $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2\lambda_3)$

tale che $\sum_{i=1}^{3} a_i\lambda_i = p$, e $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$. λ è la terna di coordinate baricentriche [5] del punto p.

3.10 * Consideriamo un triangolo ABC e tre punti A', B', C' sui lati BC, CA, AB tali che
$$\frac{a-c'}{b-c'} = \frac{m}{n} \quad \frac{b-a'}{c-a'} = \frac{n}{o} \quad \frac{c-b'}{a-b'} = \frac{o}{m}$$
Dimostrare che AA', BB', CC' concorrono, e trovare le coordinate del punto di concorrenza.

3.11 * Determinare l'equazione di una circonferenza di centro z_0 e raggio r.

3.12 * Mostrare che una circonferenza ha equazione $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$ ove b è un numero reale.

[5] Un pdf che illustra l'uso delle coordinate baricentriche nelle olimpiadi si può trovare qui: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/...

4 Circonferenza unitaria e punti notevoli

Nei problemi di geometria euclidea le proprietà che ci interessano sono sempre invarianti per traslazione e omotetia, essendo essenzialmente uguaglianze tra angoli ed equazioni omogenee riguardanti la lunghezza di alcuni segmenti.
Si noti che se a appartiene alla circonferenza unitaria vale $\bar{a} = \frac{1}{a}$, relazione che permette di semplificare notevolmente tutte le formule viste in precedenza nel caso particolare in cui i punti considerati stiano sulla circonferenza unitaria. Un'altra semplificazione è data ovviamente dal fatto che la coordinata del circocentro è 0.

Esempio 4

Diamo per noto che dato un triangolo ABC con baricentro, circocentro, e ortocentro g, o, h esiste un'omotetia di centro g e fattore $-\frac{1}{2}$ che manda h in o. Allora $-\frac{1}{2}(h-g) = o-g$, da cui $h+2o = 3g$. Se $o = 0$, $h = 3g = a+b+c$.

Esempio 5

Vogliamo cercare una condizione per la ciclicità di quattro punti a, b, c, d. Grazie all'**Equazione dell'angolo** detti $\phi = \angle abc$ e $\theta = \angle adc$ si ha

$$\frac{c-b}{a-b} = e^{i\phi}\frac{|c-b|}{|a-b|} \qquad \frac{c-d}{a-d} = e^{i\theta}\frac{|c-d|}{|a-d|}$$

da cui

$$\frac{c-b}{a-b}\frac{a-d}{c-d} = e^{i(\phi-\theta)}\frac{|c-b|}{|a-b|}\frac{|a-d|}{|c-d|}$$

D'altra parte è semplice notare che $abcd$ è ciclico se e solo se $\angle abc = \angle adc$ intensi come angoli orientati. Dunque se $abcd$ è ciclico $\dfrac{c-b}{a-b}\dfrac{a-d}{c-d}$ è reale, vista l'uguaglianza precedente. Ma viceversa se fosse reale tale quantità allora $e^{i(\phi-\theta)}$ sarebbe reale, ovvero $\phi - \theta = k\pi$ da cui quindi gli angoli orientati ϕ e θ sono uguali perché differiscono per angoli piatti. Allora il quadrilatero è ciclico.

Risulta, dunque, che $abcd$ è ciclico se e solo se $\dfrac{c-b}{a-b}\dfrac{a-d}{c-d} = [a, c; b, d] \in \mathbb{R}$

Esercizi

4.1 * Utilizzando l'**Esempio 1** e ricordando che la bisettrice divide il lato opposto in segmenti che stanno fra loro come i lati che li guardano, mostrare che dati tre punti a, b, c nel piano complesso, l'incentro i è dato da

$$i = \frac{a|b-c| + b|c-a| + c|a-b|}{|b-c| + |c-a| + |a-b|}$$

4.2 ** Mostrare che se ab è una corda nella circonferenza unitaria, allora vale $\dfrac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$.

4.3 ** Se c appartiene a una corda ab della circonferenza unitaria, allora $\bar{c} = \dfrac{a+b-c}{ab}$

4.4 * Si dimostri che dato un quadrilatero $ABCD$,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot DB$$

con uguaglianza sse $ABCD$ è ciclico.

4.5 * In un sistema di riferimento centrato in o siano dati a, b, c, d tali che $ab = cd$. Ragionando sul significato geometrico del prodotto di numeri complessi mostrare che gli angoli aob e cod hanno la stessa bisettrice. Cosa vale se $ab = c^2$?

4.6 * Come si semplifica la formula dell'esercizio 3.4 se a, b, c, d sono sulla circonferenza unitaria?

4.7 * Siano a, b, c complessi, con b, c sulla circonferenza unitaria.

- Come si semplifica l'espressione dell'esercizio 3.5 se bc è una corda?
- Supponendo che a sia sulla circonferenza unitaria, scrivere l'intersezione i fra la retta passante per b e c e la tangente in a alla circonferenza.

4.8 ** Considero un triangolo abc inscritto in una circonferenza unitaria. Scegliendo l'ovvio sistema di riferimento si rifletta sulle seguenti:

- Esistono tre numeri complessi u, v, w tali che $a = u^2$, $b = v^2$ e $c = w^2$.
- $-uv$, $-vw$, $-wu$ sono i punti medi degli archi ab, bc e ca che non contengono c, a e b.
- Sia i l'incentro. Allora $i = -(uv + vw + wu)$.
- Ricavare le formule degli excentri.

Esempio 6

Sia ABC un triangolo inscritto nella circonferenza unitaria Γ , P un punto. Determinare il coniugato isogonale Q di P.

Soluzione

Poiché $\angle BAP = \angle QAC$, usando l'esercizio (1.2) si ha

$$g\left(\frac{p-a}{b-a}\right) = g\left(\frac{q-a}{c-a}\right)$$

e otteniamo l'equazione di una retta in forma implicita nella variabile q. Per l'equazione derivante da $\angle ACP = \angle QCB$ basta permutare le variabili. Intersecando,

$$q = \frac{-p + a + b + c - \overline{p}(ab + bc + ca) + \overline{p}^2 abc}{(1 - p\overline{p})}$$

Osservazione 1
Sia P_a=$\Gamma \cap AP$. Si noti che P_a si può calcolare scrivendo la condizione $P \in AP_a$ (che è l'equazione di una corda). Dunque procedendo come sopra possiamo calcolare $Q_a = AQ \cap \Gamma$, ovvero il simmetrico di P_a rispetto alla bisettrice. Invece, non è banale scrivere l'equazione della bisettrice in complessi.
Osservazione 2
Ponendo invece come al solito $a, b, c = u^2, v^2, w^2$, i punti medi degli archi e le bisettrici sono facili da calcolare. Vedi ora altri modi di calcolare Q?

Esercizi

4.9 (Un problema di geometria!) Mostrare, utilizzando i numeri complessi, che dato P un punto sulla circonferenza circoscritta a un triangolo ABC allora le proiezioni di P sui tre lati del triangolo sono allineate. Tale retta si chiama retta di Simson di P.

4.10 * Si dimostri che i triangoli pedali di due coniugati isogonali hanno la stessa circonferenza circoscritta.

4.11 Sia ABC un triangolo e Γ la circonferenza circoscritta, che supponiamo coincidere con la circonferenza unitaria del piano complesso. Siano $a, b, c = u^2, v^2, w^2$ con $m_a = -vw$ e cicliche, dove m_a è il punto medio dell'arco BC opposto ad A. Si determini il circocentro del triangolo formato dagli excentri in funzione di u, v, w.

4.12 Si osservi che come anticipato nella trattazione della trasformazione di Moebius, dalla condizione per la ciclicità di quattro punti a, b, c, d segue che a, b, c, d sono allineati o conciclici sse $[a, b; c, d] \in \mathbb{R}$.
Definiamo ora come angolo tra due circonferenze C_1 e C_2 che si intersecano in P l'angolo orientato tra la retta P_1 tangente a C_1 in P e la retta P_2 tangente a C_2 in P. Si noti che in questo modo si vengono a definire due angoli, ed è una semplice verifica geometrica il fatto che sono supplementari.

- Date le equazioni in forma implicita di due circonferenze C_1 e C_2, detto θ l'angolo tra queste due circonferenze determinare $|\cos \theta|$ in funzione dei coefficienti delle equazioni delle due circonferenze. Vedere come si semplifica la formula nel caso in cui una o entrambe le circonferenze siano rette.
- Dimostrare che una trasformazione di Moebius conserva gli angoli tra due rette (o circonferenze).

5 Soluzioni multiple

In alcune situazioni i metodi precedentemente descritti portano a equazioni con più soluzioni. Ad esempio quando si cerca la bisettrice di un angolo, le intersezioni tra due circonferenze, le intersezioni tra una retta e una circonferenza, o anche il modulo di un numero complesso. A priori non sempre serve calcolare esplicitamente la soluzione, ovvero per risolvere il problema si può usare solamente che il punto cercato soddisfa una certa equazione. Quest'assunzione però non è sufficiente quando si sta cercando in particolare una delle due soluzioni. Vediamo un esempio.

Esempio 7
Come al solito, sia ABC inscritto nella circonferenza unitaria Γ. L'intersezione m_a della bisettrice di $\angle BAC$ con Γ, essendo il punto medio dell'arco BC, soddisfa $m_a^2 = bc$, dunque $m_a = \sqrt{bc}$. Ma svolgendo i conti è facile verificare che allora am_a e cicliche non concorrono.
Perché? L'equazione $m_a^2 = bc$ ha sempre due soluzioni complesse, e dunque $\sqrt{bc}$ non è un'espressione ben definita. In generale inoltre non esiste un modo semplice di distinguere le due soluzioni (che consenta di portare avanti i conti). Cerchiamo allora un'ulteriore equazione che caratterizzi i 3 punti medi degli archi definiti. Geometricamente è in effetti facile vedere che $m_a m_b m_c = -abc$; ma usando questa equazione e le tre precedenti è facile verificare che am_a e cicliche concorrono.

Una tecnica per risolvere il problema è dunque trovare tramite osservazioni geometriche un'equazione che caratterizzi le soluzioni particolari che si stanno cercando. A volte invece può essere utile usare le formule di Viete. Trattiamo il caso dei polinomi di grado 2, che è sicuramente il più interessante nei problemi di geometria euclidea e che si presta anche a ovvie generalizzazioni. In questo caso conosciamo somma e prodotto delle due soluzioni di un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Quindi:

- se conosciamo una soluzione possiamo ricavare l'altra; dunque, ad esempio, se cerchiamo una certa intersezione di una retta con una circonferenza possiamo mettere tra le variabili l'altra
- possiamo ricavare comunque l'equazione di oggetti definiti in maniera "simmetrica" rispetto ai due punti

Esercizio

5.1 Scrivere l'equazione della retta passante per le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

Più in generale, l'idea è scegliere i punti iniziali in modo che non compaiano poi le radici. Una scelta molto frequente (giustificata dalle osservazioni fatte nell'esempio 1) è la sostituzione $(a, b, c) = (u^2, v^2, w^2)$.

Esempio 8 (lemma sulla polare)

Data una circonferenza Γ e un punto P, siano r ed s la polare di P rispetto a Γ e una retta passante per P rispettivamente. Supponiamo che s intersechi Γ in A_1, A_2, ed r in Q. Allora $(P, Q; A1, A2) = -1$ (dove $(P, Q; A_1, A_2)$ è il birapporto $\frac{PA1}{A1Q}\frac{QA_2}{PA_2}$).

Soluzione

Innanzitutto notiamo che $(P, Q; A1, A2) = -1$ sse (in complessi) $\frac{a_1-p}{q-a_1} = \frac{a_2-p}{a_2-q}$ sse (1)

$$2(a_1a_2 + pq) - (p + q)(a_1 + a_2) = 0$$

Inoltre se Γ è la circonferenza unitaria, facilmente (perché?) la polare passa per $\frac{1}{\bar{p}}$ ed è perpendicolare a OP, dunque ha equazione

$$\frac{x - \frac{1}{\bar{p}}}{\bar{x} - \frac{1}{p}} = -\frac{p}{\bar{p}}$$

ovvero $x\bar{p} - 2 + \bar{x}p = 0$. Supponiamo che s abbia equazione $a\bar{x} + b + \bar{a}x = 0$. Allora, dopo aver imposto $p \in s$, intersecando s con Γ è facile ricavare l'equazione di secondo grado di cui a_1, a_2 sono soluzioni, dunque la loro somma e il loro prodotto, e dopo aver ricavato q intersecando r con s è sufficiente sostituire tutto nella (1).
Osservazione
In alternativa, più semplicemente si poteva definire la s come retta passante per a_1 e p, con $a_1 \in \Gamma$, e dunque si poteva calcolare esplicitamente a_2 come seconda intersezione (anche usando semplicemente la formula per l'appartenenza ad una corda).

6 Formulario

Relazione fra angoli e moduli:

$$c - b = \frac{|c-b|}{|a-b|}(a-b)e^{i\phi}$$

con $\phi = \angle abc$.
Uguaglianza di angoli:

$$\angle ABC = \angle XYZ \Leftrightarrow \frac{c-b}{a-b}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}} = \frac{z-y}{x-y}\frac{\bar{z}-\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}$$

Punto che divide ab in due segmenti in rapporto λ:

$$\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

Trasformazioni:

- *Traslazione* di vettore c: $z' = z + c$
- *Rotazione* antioraria di θ di centro c: $z' = e^{i\theta}(z-c)+c$
- *Omotetia* di ragione λ e centro c: $z' = \lambda(z-c)+c$
- *Rotomotetia* di ragione r centro c e angolo θ: $z' = re^{i\theta}(z-c)+c$
- *Centro* della rotomotetia che manda a in b e c in d (è lo stesso di quella che manda a in c e b in d): $\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$
- α della rotomotetia che manda a in b e c in d: $\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$
- *Inverso* di z rispetto alla circonferenza unitaria: $\dfrac{1}{\bar{z}}$
- *Inverso* di z rispetto alla circonferenza di raggio r centrata in c: $r^2\bar{z} - \bar{c} + c$

Equazione parametrica della retta per a e b:

$$z = a + t(b-a)$$

con $t \in \mathbb{R}$
Equazione implicita della retta per a e b:

$$(\bar{b}-\bar{a})z + (a-b)\bar{z} + b\bar{a} - a\bar{b} = 0$$

Condizione per l'allineamento di a, b, c:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Equazione parametrica della parallela per c a ab:

$$z = c + t(b - a)$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Equazione implicita della parallela per c a ab:

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (a - b)\bar{z} + (c\bar{a} - a\bar{c}) + (\bar{c}b - c\bar{b}) = 0$$

Condizione per il parallelismo fra ab e cd:

$$\frac{d - c}{b - a} = \frac{\bar{d} - \bar{c}}{\bar{b} - \bar{a}}$$

Equazione parametrica della perpendicolare per c a ab:

$$z = c + it(b - a)$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Equazione implicita della perpendicolare per c a ab:

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (b - a)\bar{z} + c\bar{a} + a\bar{c} - c\bar{b} - \bar{c}b = 0$$

Condizione per la perpendicolare fra ab e cd:

$$\frac{d - c}{b - a} = -\frac{\bar{d} - \bar{c}}{\bar{b} - \bar{a}}$$

Intersezione di $a_1 z + \bar{a_1}\bar{z} + b_1 = 0$ e $a_2 z + \bar{a_2}\bar{z} + b_2 = 0$:

$$\frac{\bar{a_1}b_2 - \bar{a_2}b_1}{a_1\bar{a_2} - a_2\bar{a_1}}$$

se il denominatore è diverso da 0, altrimenti sono parallele.
Condizione di perpendicolarità fra $a_1 z + \bar{a_1}\bar{z} + b_1 = 0$ e $a_2 z + \bar{a_2}\bar{z} + b_2 = 0$:

$$a_1\bar{a_2} + a_2\bar{a_1} = 0$$

Perpendicolare per z_0 a $a_1 z + \bar{a_1}\bar{z} + b_1 = 0$:

$$a_1(z - z_0) - \bar{a_1}(\bar{z} - \bar{z_0}) = 0$$

Intersezione fra ab e cd:

$$\frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a} - \bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c} - \bar{d})}$$

Se siamo sulla circonferenza unitaria:

$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$$

Proiezione di a sulla retta passante per b e c:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{(b-c)\bar{a}+\bar{b}c-b\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}\right)$$

Se siamo sulla circonferenza unitaria:

$$\frac{1}{2}(a+b+c-bc\bar{a})$$

Simmetrico di a rispetto alla retta passante per b e c:

$$\frac{(b-c)\bar{a}+\bar{b}c-b\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$$

Se siamo sulla circonferenza unitaria:

$$b+c-bc\bar{a}$$

Condizione per la ciclicità di a, b, c, d:

$$\frac{c-b}{a-b}\frac{a-d}{c-d}\in\mathbb{R}$$

Coniugato isogonale di p in abc inscritto nella circonferenza unitaria:

$$\frac{-p+a+b+c-\overline{p}(ab+bc+ca)+\overline{p}^2abc}{(1-p\overline{p})}$$

Relazione fra ortocentro e circocentro in abc:

$$h+2o=a+b+c$$

In un triangolo abc inscritto nella circonferenza unitaria esistono u, v, w tali che $a=u^2$, $b=v^2$ e $c=w^2$. In questo caso vale:

- *Incentro*: $-(uv+vw+wu)$
- *Punti medi degli archi che non contengono i vertici*: $-uv$, $-vw$, $-wu$
- *Excentro relativo ad a*: $-vw+uv+wu$

- *Circocentro del triangolo excentrico*: $uv + vw + wu$

Polare di p rispetto alla circonferenza unitaria:

$$x\bar{p} - 2 + \bar{x}p = 0$$

Circocentro del triangolo $z_1 z_2 z_3$:

$$\frac{z_1\bar{z_1}(z_2 - z_3) + z_2\bar{z_2}(z_3 - z_1) + z_3\bar{z_3}(z_1 - z_2)}{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z_3 & \bar{z_3} & 1 \end{vmatrix}}$$

7 Problemi

Abbiamo indicato con A, B, C i problemi facili, medi e difficili rispettivamente. Per i problemi facili è sufficiente applicare le formule qui enunciate, mentre per i problemi difficili serve sempre qualche osservazione non banale per trovare una soluzione ragionevolmente breve.

1. (BMO 2009 2, A) Testo
2. (RMM 2012 2, B) Testo
3. (IMO 2010 2, B) Testo
4. (USAMO 2012 5, B)Testo
5. (IMO 2013 3, C)Testo
6. (IMO 2012 5, A)Testo
7. (IMO 2008 6, C) Testo

8 Tracce e soluzioni

Esercizi

1.5
- Siano (a, b, c'), (c, a', b), (b', a, c) i tre vettori contenenti i numeri complessi corrispondenti ai vertici dei triangoli ABC', $CA'B$, $B'AC$, e sia A la matrice avente per righe tali vettori. Procedendo in maniera analoga all'esercizio precedente è facile notare che la similitudine di questi triangoli è equivalente all'esistenza di un vettore colonna $l = (l_1, l_2, l_3)$ tale che $Al = 0$ (1), e $l_1 + l_2 + l_3 = 0$.
- Per un fatto noto esiste un vettore di numeri reali con somma 1 g tale che $h_i = A_i \cdot g$. Dunque ai vertici del triangolo $H_1H_2H_3$ corrispondono i vertici del vettore Ag. Resta allora solo da dimostrare (perché?) che ${}^t lAg = 0$, che è ovvio perché per la simmetria di A ${}^t lA = Al$ e per la (1) $Al = 0$.
  Si noti come non sono nemmeno state usate le condizioni su l e su g.

1.7 Si usi che dati $x, y, z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{cyc} x = \sum\limits_{cyc} x^2 = 0$ e $xyz = 1$ se e solo se x, y, z sono le tre soluzioni di $x^3 - 1 = 0$

1.9 Osservando i casi limite si nota che, se la risposta non dipendesse dalla retta allora gli angoli sarebbero 30, 60 e 90. Impostando i calcoli scrivendo tutto nel modo più furbo, torna.

2.1
- b L'equazione è $z' = z_0 + \alpha(z - z_0)$
- c Il centro è $\dfrac{ad - bc}{a + d - b - c}$ e l'α è $\dfrac{a - d}{b - c}$, come si ricava facilmente imponendo che b sia l'immagine di a, ovvero $b = z_0 + \alpha(a - z_0)$, d sia l'immagine di c e risolvendo il sistema

3.3 $z = \dfrac{\bar{a_1} b_2 - \bar{a_2} b_1}{a_1 \bar{a_2} - a_2 \bar{a_1}}$ è il punto di intersezione se il denominatore della precedente frazione è diverso da 0. Altrimenti le due rette sono parallele.

3.4 Si noti che l'esercizio 3.1 fornisce la direzione di una retta implicita. La condizione è $a_1 \bar{a_2} + a_2 \bar{a_1} = 0$. L'equazione della perpendicolare è $a_1(z - z_0) - \bar{a_1}(\bar{z} - \bar{z_0}) = 0$

3.5
- Scrivere la forma parametrica delle rette passanti per a, b e c, d ($z = a + (b - a)t$,...) Uguagliando, qual è la prima condizione che deve soddisfare t?
- Coniugando questa condizione cosa si ottiene? Risolvere, dunque il sistema di queste due condizioni, trovare t e sostituire per trovare il punto di intersezione.
- Risultato:
$$\frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a} - \bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c} - \bar{d})}.$$

3.6 Sia k la proiezione di a sulla retta passante per b e c. Allora $ak \perp bc$ e $k \in bc$: scrivere le due condizioni.
Risultato:
$$k = \frac{1}{2}\left(a + \frac{(b-c)\bar{a} + \bar{b}c - b\bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}}\right)$$

3.9 I numeri complessi $b-a$ e $c-a$ pensati come vettori sono linearmente indipendenti, dunque esistono h_1 e h_2 tali che $h_1(b-a)+h_2(c-a) = p-a$. Basta dunque porre $\lambda = (1-h_1-h_2, h_1, h_2)$.
In effetti questo è un caso particolare di riferimento affine nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ pensato come spazio affine (in questo caso però la definizione astratta non serve affatto per capire e usare le baricentriche).

3.10 Usare la formula dell'**Esempio 1** per calcolare a' e cicliche, ed usare ad esempio la formula dell'**Esempio 4** per dimostrare che AA' e cicliche concorrono in $x = \frac{ma+nb+oc}{m+n+o}$.

3.11 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z_0}) = r^2$

4.3 Usare la formula dell'allineamento di tre punti e ricordare che si è sulla circonferenza.

4.4 Applicare la disuguaglianza triangolare all'identità $(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a) = (c-a)(d-b)$. Quando vale l'uguaglianza?

4.6 $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$

4.7
- $\frac{1}{2}(a+b+c-bc\bar{a})$
- Mettere a sistema ai perpendicolare ad a e $i \in bc$. Il risultato trovato è formalmente, come prevedibile, l'intersezione tra la corda aa e la corda bc (vedi esercizio 4.4)

4.8 Per i primi due punti, si ragioni sul significato geometrico del prodotto tra numeri complessi. Per il terzo punto, notare con considerazioni geometriche che i è l'ortocentro del triangolo formato dai punti medi degli archi considerati nel secondo punto. Per l'ultimo punto, procedendo esattamente come nel terzo si dimostri che I_a è l'ortocentro del triangolo formato da certi punti medi degli archi ab, bc, ca. In alternativa, notare che I_a è il simmetrico rispetto a $-vw$ di i. Risultato: $i_a = -vw + uv + wu$ e cicliche.

4.10 Calcolare il circocentro O_p del triangolo pedale di $P_aP_bP_c$ (P_a è il piede della perpendicolare da P a BC e cicliche). Senza intersecare gli assi, si può notare che $\frac{1}{2}\angle P_aO_pP_b = \angle P_cPP_a = \angle APC$, e usare quindi un'opportuna similitudine. Per concludere, notare che O_p è il punto medio di PQ.

4.11 Usare la relazione tra circocentro, ortocentro e baricentro nel triangolo degli excentri. Chi è l'ortocentro di questo triangolo?
Risultato: $uv + vw + wu$

4.12 L'angolo θ tra due circonferenze di raggi r_1, r_2 e di equazioni

$$z\bar{z} + \alpha_1 z + \bar{\alpha_2}\bar{z} + \beta_1 = 0$$

e

$$z\bar{z} + \alpha_2 z + \bar{\alpha_2}\bar{z} + \beta_2 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

soddisfa

$$|\cos\theta| = |\frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1\bar{\alpha_2} + \bar{\alpha_1}\alpha_2)}{2r_1 r_2}|$$

Problemi

1.
   - Conviene porre la circoscritta ad ABC come circonferenza unitaria, $m = a + k(b - a)$, $n = a + k(c - a)$, con k reale; Q invece è per definizione il centro della similitudine a spirale che manda BN in MC
   - Basta ora verificare che $\frac{q-a}{b-a}\frac{p-a}{c-a} \in \mathbb{R}$

2.
   - La scelta migliore per l'origine non è il circocentro
   - Avendo scelto un'opportuna origine, è facile calcolare Q e P: è particolarmente rapido notando ad esempio $GDE \sim GEQ$; in alternativa Q è la seconda intersezione di AG con la circonferenza di centro F e raggio AF
   - Soluzione

3.
   - Sia Γ la circonferenza unitaria $a, b, c = u^2, v^2, w^2$ (perché compare l'incentro). Il problema è completamente simmetrico in v e w, dunque è una buona idea porre $x = v + w$, $y = -vw$.
   - Sia $E' = AF \cap \Gamma$. Come si può calcolare E'? Ricavare F e G a partire da E'
   - Calcolare $P' = EI \cap \Gamma$, in modo da ricondursi a provare un allineamento.
   - Soluzione

4.
   - Prendiamo come circonferenza unitaria la circoscritta a ABC, Q un punto distinto da P su γ. Il punto A' è completamente determinato dal fatto che appartiene alla corda BC e che $\angle A'PQ = \angle QPA$
   - Dopo aver calcolato A', , per Menelao basta dimostrare che $\prod BA'/CA' = \prod (a' - b)/(a' - c) = 1$
   - Alternativamente si può porre γ l'asse reale. Allora la riflessione di ap è semplicemente $r_a = \bar{a}p$, e a'=$BC \cap r_a$
   - Calcolati a' e cicliche, è particolarmente semplice dimostrare che a', b', c' sono allineati vedendo che l'area di $a'b'c'$ è 0 (ovvero, che un certo determinante è 0; può tornare utile sfruttare che il determinante è lineare nelle righe, e lo sviluppo di Laplace)

- Soluzione1
- Soluzione2

5.
- Siano I_a, I_b, I_c gli excentri. Dimostrare per via sintetica che $I_aA_1 \cap I_bB_1$ è il circocentro P di $I_aI_bI_c$
- Il circocentro M cercato è il punto medio di PQ, dove Q è il coniugato isogonale di P (perché?)
- Dopo aver calcolato M, è facile vedere che le condizioni ABC è rettangolo e $M \in \Gamma$ (dove Γ è la circonferenza circoscritta ad ABC) hanno lo stesso grado scritte in complessi, dunque basta vedere che ogni fattore della prima divide la seconda senza calcolarla esplicitamente. Notare come dopo aver osservato l'uguaglianza trai gradi delle condizioni si potrebbe chiudere in sintetica dimostrando la freccia inversa a quella richiesta
- Ovviamente una soluzione più standard ma anche più lunga si può avere usando la formula per il circocentro
- Soluzione

6.
- Siano $\Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b$ le circonferenze circoscritta ad ABC, con centro A e raggio AD, con centro B e raggio BD rispettivamente. Il problema è difficile in complessi perché K ed L sono intersezioni di rette con Γ_b e Γ_a, dunque non si possono determinare esplicitamente ed è difficile ottenere un'equazione decente
- Invece, $MK = ML$ sse $\angle BKL = \angle KLA$ (1)
- Per ottenere equazioni gestibili per le circonferenze e le rette in questione, si può porre $a = -1, b = 1, \Gamma$ la circonferenza unitaria
- Un tentativo può essere tenere k (tutto è analogo per l) come variabile che soddisfa una certa equazione. $\bar{k}$ si calcola con l'equazione di Γ_b. Dunque si può scrivere l'equazione (1), che risulta una funzione di k, l, c
- Per imporre $AK \cap BL \in CD$ (come nelle ipotesi), conviene calcolare prima $F' = AK \cap CD$, e poi imporre l'allineamento di B, L, F', in modo da raggiungere la massima bruttezza solo alla fine
- In alternativa, si possono ottenere le equazioni di secondo grado per $p(k) = 0$ e $q(l) = 0$ (intersecando opportune rette e circonferenze), e sperare di riuscire a scrivere l'equazione al punto (1) come
  $p(k)g_1(c, k, l) + q(l)g_2(c, k, l) = 0$
- Soluzione

7.
- Si usa il fatto che l'intersezione delle tangenti esterne a due circonferenze k_1 e k_2 è il centro dell'unica omotetia positiva che manda k_1 in k_2. Inoltre, un'omotetia sul piano complesso è una trasformazione

che manda x in $ax + b$, con a reale e b complesso, e che dunque composizione di omotetie è un'omotetia. Dati a e b, qual è il centro dell'omotetia?

- La composizione dell'omotetia di centro B che manda k_1 in k, dell'omotetia negativa che manda k in sé, e dell'omotetia di centro d che manda k in k_2 è l'omotetia cercata
- Il tutto si scrive decentemente ponendo k come circonferenza unitaria, e i punti di tangenza come variabili. Per trovare ad esempio il fattore di dilatazione della prima omotetia basta considerare la parallela r ad AC tangente a k dalla parte opposta di D: se $P = r \cap BA$, tale fattore è $\frac{CA}{PA}$
- Soluzione

9 Appendice

9.1 Combinazioni lineari e determinante

Tratteremo ora il caso di vettori appartenenti a $\mathbb{C}^n$ (ovvero con n entrate, ciascuna contenente un numero complesso), ma tutto ciò che segue si può facilmente generalizzare per un campo qualsiasi (ad esempio $\mathbb{R}$).
La somma $a+b$ di due vettori $a=(a_1,...,a_n)$ e $b=(b_1,...,b_n)$ è definita come il vettore $c=a+b=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$. Il prodotto del vettore a per un numero complesso λ è definito in modo altrettanto naturale come il vettore $\lambda a=(\lambda a_1,...,\lambda a_n)$.
Dati k vettori $v_1,...,v_k$, si dice che il vettore v è combinazione lineare di $v_1,...,v_k$ se esistono $a_1,...,a_k$ complessi tali che $v=\sum_{i=1}^k a_i v_i$. I vettori $v_1,...,v_k$ si dicono linearmente indipendenti se $\sum_{i=1}^k a_i v_i = \sum_{i=1}^k b_i v_i$ implica $b_i = a_i \quad \forall i$, o equivalentemente (come si può ricavare sottraendo il membro destro al membro sinistro) se $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$ implica $c_i = 0 \quad \forall i$.
Può essere dimostrato che se $k>n$ i $v_1,...,v_k$ sono linearmente dipendenti. Invece, se n vettori sono linearmente indipendenti ogni vettore appartenente a $\mathbb{C}^n$ è combinazione lineare di essi.
Consideriamo ora una matrice M di dimensione $n \times k$ avente come k colonne i vettori $v_1,...,v_k$. Il rango r per colonne della matrice è definito come il massimo numero naturale tale che esistano r vettori $v_{i_1},...,v_{i_r}$ presi da $v_1,...,v_k$ e linearmente indipendenti. In maniera analoga si può definire il rango per righe (presa una matrice M avente per righe i vettori $v_1,...,v_n$), e si può dimostrare che rango per righe e rango per colonne coincidono, cosicché si parla semplicemente di rango.
Ad esempio, la matrice M di dimensione $n \times k$ ha rango per colonne k se i vettori $v_1,...,v_k$ sono linearmente indipendenti. Nel caso in cui $k=n$ (ovvero la matrice è "quadrata") se il rango è minore di n, la matrice viene detta singolare.
Dalla definizione del prodotto matrice per vettore segue una matrice quadrata M è singolare sse le sue colonne sono linearmente dipendenti sse esiste un vettore h diverso da 0 tale che $Mh=0$.
Il determinante è una funzione che associa ad ogni matrice quadrata un numero complesso, indicato con $\det M$ o $|M|$ (come per i vettori, anche se trattiamo solo il caso di matrici a valori in $\mathbb{C}$ il discorso si può generalizzare facilmente per un campo qualsiasi). Una delle più importanti proprietà del determinante è la seguente: $\det M = 0$ sse M è singolare. Per questa trattazione possono anche servire:

- Un elenco delle principali proprietà del determinante, che usiamo nell'articolo per semplificarne il calcolo.
- La formula esplicita (ricorsiva) più usata per il calcolo del determinante.

- La formula per il determinante nel caso 3×3 e l'identità

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 \end{vmatrix}$$

9.2 Lemma sulla divisibilità dei polinomi

Per verificare uguaglianze tra polinomi in più variabili, può essere utile il seguente lemma.
Supponiamo che $p(x_1, ..., x_n)$ e $q(x_1, ..., x_n)$ siano polinomi dello stesso grado a coefficienti complessi, e che $p(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{k} h_i(x_1, ..., x_n)$, con gli h_i tali che il massimo comune divisore tra h_i e h_j sia uno per $i \neq j$.
Se per ogni i $h_i(x_1, ..., x_n)$ divide $q(x_1, ..., x_n)$, allora $q(x_1, ..., x_n) = \lambda p(x_1, ..., x_n)$ (come polinomi) con λ complesso diverso da 0. In particolare, $q(x_1, ..., x_n) = 0$ se e solo se $p(x_1, ..., x_n) = 0$.
La dimostrazione è una facile induzione sul grado e sul numero di termini del polinomio.
Si noti infine che la divisibilità di $p(x_1, ..., x_n)$ per un fattore del tipo $x_1 - k(x_2, ..., x_n)$ si può verificare semplicemente vedendo se $p(k(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n) = 0$. Quest'ultima regola è fondamentalmente il teorema di Ruffini.

Fonti

[1] Marko Radovanovic, complex numbers in geometry

[2] Mathlinks, in particolare diversi post di v_ Enhance

[3] Titu Andreescu Dorin Andrica, Complex numbers from A to...Z

[4] Liang-shin Hahn, Complex numbers and geometry