Teoria ed esercizi proposti per gli stages di La Spezia e Salerno

Gioacchino Antonelli

April 30, 2017

Combinatoria

1 Prima Parte: Teoria

- Generalità sul principio di Induzione. Mostra la formula della somma dei primi n numeri naturali.
- Un po' di *pigeonhole*. Ho 10 oggetti e li dispongo in 3 scatole: cosa posso concludere? (*c'è almeno una scatola con almeno 4 oggetti... in generale ho m oggetti e n scatole e concludo che c'è almeno una scatola con almeno* $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ *oggetti*). Risolvi il problema (1) e proponi il (2) e il (3).
- Proviamo a contare un po' di cose... Cos'è il fattoriale? Permutazioni della parola *COSA* e della parola *MAMMA*. In un cinema con n posti a sedere entrano una alla volta $k < n$ persone. In quanti modi si sono potute sedere? Quante cinquine posso fare al lotto? Introduzione al *coefficiente binomiale*. Perché si chiama così? Dimostra la formula del *binomio di Newton* e costruisci il triangolo di Tartaglia, dimostrando che $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Numero di sottinsiemi e numero di sottinsiemi di cardinalità fissata. Proponi l'esercizio (4) e (5). In quanti modi posso scegliere $k < s$ numeri interi in modo che la loro somma sia s? E' da intendere che due k-uple vanno considerate distinte anche per l'ordine. La risposta è $\binom{s+k-1}{k-1}$. Proporre l'esercizio (6).
- Un po' di combinatoria geometrica: in quante parti n rette date dividono al massimo il piano? Quante diagonali ha un poligono?

2 Seconda Parte: Esercizi

1. Dimostrare che ad una festa con n persone ci sono sempre almeno due persone che conoscono lo stesso numero di invitati.
2. ($\star$) Preno α un numero reale positivo. Sia n un numero naturale qualsiasi. Mostra che almeno uno fra $\alpha, 2\alpha, \ldots, (n+1)\alpha$ dista da un numero intero meno di $\frac{1}{n}$.
3. ($\star$) Considero $n^2 + 1$ numeri scritti uno dietro l'altro, da sinistra verso destra. Dimostrare che esiste sempre una sottosequenza di $n + 1$ numeri ordinati in maniera crescente, se letti da sinistra verso destra, oppure una sottosquenza di $n + 1$ numeri ordinati in maniera decrescente, se letti da sinistra verso destra.

4. Sviluppando $(1-1)^n$ con il binomio di Newton mostra che un insieme ha tanti sottoinsiemi di cardinalità pari quanti di cardinalità dispari.

5. ($\star$) Considero un insieme A di $2n$ elementi. Voglio contare i suoi sottinsiemi di cardinalità n. Lo faccio in due modi diversi:

   - Direttamente usando il coefficiente binomiale,
   - Divido l'insieme A in due parti B e C di cardinalità n. Un sottoinsieme di cardinalità n di A avrà k elementi in B e $n-k$ elementi in C, con $0 \leq k \leq n$. Quindi...

   Seguendo la traccia precedente, uguagliando i risultati ottenuti (che sono uguali perché ho solo contato la stessa cosa in due modi diversi), dedurre che:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{1}$$

6. Giovanni disegna a matita un 9-agono regolare e collega ciascuno dei suoi vertici al centro, tracciando un totale di 18 segmenti e ottenendo in questo modo nove triangoli. Ripassa quindi a penna alcuni dei segmenti tracciati, facendo in modo che alla fine ognuno dei nove triangoli abbia esattamente un lato ripassato a penna. In quanti modi Giovanni può scegliere l'insieme dei segmenti da ripassare? (Nota: due insiemi di segmenti che si ottengano l'uno dall'altro per rotazione o per simmetria sono da considerarsi distinti)

   ($\star$) Provare a scrivere una formula se al posto di 9 ci fosse stato un n generico.

7. Cecilia ha un dado a sei facce (numerate da 1 a 6) e 4 colori a disposizione. In quanti modi può colorare le sei facce del dado usando in totale almeno tre colori diversi e facendo in modo che facce opposte siano di colori diversi?

8. Una pedina si trova inizialmente sulla casella centrale di una scacchiera $5x5$. Un passo della pedina consiste nello spostarsi in una casella scelta a caso fra quelle che hanno esattamente un vertice in comune con la casella su cui si trova. Qual è la probabilità che dopo 12 passi la pedina si trovi in uno qualunque degli angoli della scacchiera?

9. Siano m, n due interi maggiori o uguali a 2. Di una tabella a m righe e n colonne si sa che ogni casella contiene o il numero 1 o il numero -1 e che la somma totale di tutte le caselle è maggiore o uguale a zero. Genoveffa considera i percorsi che uniscono una casella della prima colonna (a sua scelta) ad una casella dell'ultima colonna (nuovamente a sua scelta) e che si muovono sempre da una casella ad una adiacente in orizzontale o verticale, senza ripassare due volte sulla stessa casella. Il valore di un percorso è la somma dei numeri presenti nelle caselle che esso attraversa.

   - Dimostrare che per ogni $m, n \geq 2$ esistono tabelle a m righe e n colonne senza percorsi di valore 2 o più.
   - Dimostrare che è sempre possibile trovare un percorso di valore maggiore o uguale a 1.