Notazioni e Formule essenziali per il colloquio del IV anno Una dimostrazione probabilistica del teorema di Hörmander mediante il calcolo di Malliavin

Gioacchino Antonelli

19 aprile 2017

Notazione 1 (Notazioni su SDE)**.** Sia fissato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(B_t^1, \dots, B_t^d)_{t\in[0,1]}$ moti Browniani indipendenti. Sarà trattata la seguente equazione differenziale stocastica autonoma

$$\begin{cases} dX_t^i = \sigma_{ij}(X_t)dB_t^j + b_i(X_t)dt \\ X_0^i = x_0^i \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

dove $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, d$ e si sottintende la somma su j. In particolare $(X_t^i)_{i=1,\dots,N}$, con t fissato, è un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^N$ e

$$\forall j = 1, \dots, d \qquad \sigma_j := (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{Nj}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \tag{2}$$

$$b := (b_1, \dots, b_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Quando scriverò semplicemente σ intenderò la matrice $N \times d$ che ha come colonne i σ_j. La matrice $N \times N$ $\sigma\sigma^T$ verrà chiamata anche matrice di diffusione.

Condizione 1 (Condizione **(R)**)**.** Assumerò in tutto il colloquio che le funzioni σ_j e b sopra definite siano C_b^∞, ovvero differenziabili infinite volte, componente per componente, con derivate parziali di ogni ordine limitate su $\mathbb{R}^N$.

Condizione 2 (Condizione **(H)**)**.** Sia

$$\sigma_0 := b - \frac{1}{2}\nabla_{\sigma_j}\sigma_j. \tag{4}$$

Definisco

$$V_0 := \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\} \tag{5}$$

$$V_{k+1} := V_k \cup \{[\sigma_l, V] \mid l = 0, \dots, d; \quad V \in V_k\} \quad \forall k \geq 0. \tag{6}$$

Sia

$$\mathcal{H}(x) := \mathrm{Span}\{V(x) \mid V \in \cup V_k\}. \tag{7}$$

Si dice che per la (1) vale la *condizione parabolica di Hörmander* se $\mathcal{H}(x_0) = \mathbb{R}^N$.

Teorema 1 (Teorema di Hörmander)**.** Le condizioni **(R)** e **(H)** implicano che (1) ha soluzione unica $(X_t)_{t\in[0,1]}$ nello spazio $L^p(\Omega; C([0,1]; \mathbb{R}^N))$ per ogni $p \geq 2$, e in più, per ogni $t \in [0,1]$, il vettore aleatorio (X_t) ha densità rispetto a $\mathcal{L}^n$ ed in più tale densità è C^∞ (in realtà addirittura nello spazio $\mathcal{S}$ di Schwartz).

Esempio 1. Considero la SDE

$$\begin{cases} dX_t^1 = dB_t^1 \\ dX_t^2 = X_t^1 dB_t^2 \\ (X_0^1, X_0^2) = (0,0) \end{cases} \tag{8}$$

Si osserva che $\sigma\sigma^T((0,0))$ è degenere, mentre $\mathcal{H}((0,0)) = \mathbb{R}^2$. La soluzione $(X_t^1, X_t^2) = \left(B_t^1, \int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)$, a t fissato, ha dunque densità in $\mathcal{S}$ rispetto a $\mathcal{L}^2$.

Esempio 2. Considero la SDE

$$\begin{cases} dX_t^1 = X_t^1 dB_t^1 \\ dX_t^2 = X_t^1 dB_t^2 \\ (X_0^1, X_0^2) = (0,1) \end{cases} \tag{9}$$

Si osserva che $\mathcal{H}((0,1)) = \{\underline{0}\}$ e la soluzione è $(X_t^1, X_t^2) = (0,1)$. Questo, in un certo senso, recupera l'idea che $\mathcal{H}(x_0)$ è legata alle *direzioni in cui può espandersi la soluzione grazie al noise.*

Esempio 3. Considero la SDE

$$\begin{cases} dX_t^1 = X_t^1 dB_t^1 \\ dX_t^2 = (X_t^1 + X_t^2) dB_t^2 \\ (X_0^1, X_0^2) = (0,1) \end{cases} \tag{10}$$

Si osserva, con qualche calcolo, che $\mathcal{H}((0,1)) = \mathrm{Span}((0,1))$ e la soluzione è $(X_t^1, X_t^2) = (0, e^{B_t^2 - \frac{1}{2}t})$. Questo rende ancora più evidente quanto osservato nell'esempio precedente.

Definizione 1 (Derivata di Malliavin)**.** Sia fissato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(B_t^1, \ldots, B_t^d)_{t\in[0,1]}$ moti Browniani indipendenti. Sia $H = L^2([0,1]; \mathbb{R}^d)$ e, per $h \in H$

$$W(h) := \sum_{i=1}^d \int_0^1 h_s^i dB_s^i. \tag{11}$$

Considero la seguente classe di varabili aleatorie *smooth*:

$$\mathbb{S}_{\text{exp}} := \{F = f(W(h^1), \ldots, W(h^n)) \mid f \in C_{\text{exp}}^\infty; \quad h^1, \ldots, h^n \in H\} \subseteq L^p(\Omega) \tag{12}$$

per ogni $p \geq 1$ (Con C_{exp}^∞ si intendono le funzioni f tali che per ogni multi-indice α esistono c_α e C_α per cui vale $|\partial_\alpha f(x)| \leq c_\alpha e^{C_\alpha |x|}$). Su questa classe definisco la *derivata di Malliavin DF*

$$D_t^\alpha F := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(W(h^1), \ldots, W(h^n)) h_t^{k,\alpha}. \tag{13}$$

Si nota che, sulla classe $\mathbb{S}_{\text{exp}}$, $DF \in L^p(\Omega \times [0,1]; \mathbb{R}^d)$ per ogni $p \geq 1$. Iterativamente definisco la k-esima derivata $D^k F$

$$D^k{}_{t_1,\ldots,t_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} F := \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \partial_{i_1,\ldots,i_k} f(W(h^1), \ldots, W(h^n)) h_{t_1}^{i_1,\alpha_1} \cdot \cdots \cdot h_{t_k}^{i_k,\alpha_k}. \tag{14}$$

Si nota, anche qui, che su $\mathbb{S}_{\text{exp}}$ vale $D^k F \in L^p(\Omega \times [0,1]^k; \mathbb{R}^{d^k})$ per ogni $p \geq 1$. Si mostra che l'operatore D^k è chiudibile da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega \times [0,1]^k; \mathbb{R}^{d^k})$ per ogni $p \geq 1$ e si definiscono gli spazi

$$\mathbb{D}^{k,p} := \mathrm{dom}\overline{(D, \ldots, D^k)} \qquad \mathbb{D}^\infty := \cap_{k\geq 1} \cap_{p\geq 1} \mathbb{D}^{k,p} \tag{15}$$

Fatto 1 (Parte I della dimostrazione del Teorema di Hörmander)**.** La condizione **(R)** garantisce che, per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $i = 1, \dots, N$, $X_t^i \in \mathbb{D}^\infty$. La dimostrazione è alquanto tecnica e usa le regole di calcolo della derivata di Malliavin. In queste note non accennerò alla dimostrazione di questo fatto.

Notazione 2. Introduco le seguenti notazioni che mi saranno utili in seguito. Con $D_r X_t$ indico la matrice $N \times d$ delle derivate di Malliavin, al tempo r, delle componenti del vettore aleatorio X_t. In particolare

$$(D_r X_t)_{il} := D_r^l X_t^i. \tag{16}$$

Con $\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(\bar{x})$ e $\frac{\partial b}{\partial x}(\bar{x})$ indico le matrici $N \times N$ Jacobiane delle funzioni σ_j e b. In particolare

$$\left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(\bar{x})\right)_{ik} := \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k}(\bar{x}) \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}(\bar{x})\right)_{ik} := \frac{\partial b_i}{\partial x^k}(\bar{x}) \tag{18}$$

Formula 1 (SDE risolte dal differenziale del flusso stocastico (Y_t) e dalla sua inversa (Z_t))**.** Sotto l'ipotesi di regolarità **(R)** la mappa $x \in \mathbb{R}^N \to X_t^x$, dove X_t^x è la soluzione della SDE (1) con dato iniziale x, è differenziabile. In più tale differenziale in x_0, che chiamo Y_t, è un processo di matrici $N \times N$ e soddisfa la SDE che si ottiene differenziando formalmente la (1)

$$Y_t = \mathbb{I} + \int_0^t \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(X_s) \cdot Y_s dB_s^j + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x}(X_s) \cdot Y_s ds. \tag{19}$$

Si nota che la SDE

$$Z_t = \mathbb{I} - \int_0^t Z_s \cdot \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(X_s) dB_s^j - \int_0^t Z_s \cdot \left[\frac{\partial b}{\partial x}(X_s) - \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(X_s) \cdot \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(X_s)\right] ds \tag{20}$$

nelle nostre ipotesi ammette un'unica soluzione con momenti finiti di ogni ordine, e in più $Y_t Z_t = Z_t Y_t = \mathbb{I}$ per ogni $t \in [0,1]$.

Formula 2 (SDE risolta dalla derivata di Malliavin di X_t)**.** Sviluppando le regole di calcolo relative alla derivata di Malliavin, si nota che, fissato r, il processo di matrici $D_r X_t$ soddisfa la SDE

$$\begin{cases} D_r X_t = \sigma(X_r) + \displaystyle\int_r^t \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(X_s) \cdot D_r X_s dB_s^j + \int_r^t \frac{\partial b}{\partial x}(X_s) \cdot D_r X_s ds & \text{se} \quad t > r \\ D_r X_t = 0 \quad \text{se} \quad t < r \end{cases} \tag{21}$$

Formula 3 (Scrittura della derivata di Malliavin di X_t come coniugata)**.** Per unicità della soluzione della SDE in (21) e per (19) e (20) segue che

$$D_r X_t = Y_t \cdot Z_r \cdot \sigma(X_r) \qquad \text{se} \qquad t > r \tag{22}$$

Definizione 2 (Matrice delle covarianze di Malliavin)**.** Definisco la matrice $N \times N$ delle covarianze di Malliavin relativa al vettore aleatorio (X_t):

$$\gamma_{X_t}^{ij} := \sum_{l=1}^d \int_0^t (D_r^l X_t^i)(D_r^l X_t^j) dr. \tag{23}$$

In maniera più contratta

$$\gamma_{X_t} = \int_0^t (D_r X_t) \cdot (D_r X_t)^T dr \tag{24}$$

e usando la **Formula 3**

$$\gamma_{X_t} = Y_t \cdot C_t \cdot Y_t^T \tag{25}$$

dove

$$C_t := \int_0^t (Z_r \cdot \sigma(X_r)) \cdot (Z_r \cdot \sigma(X_r))^T dr \tag{26}$$

Fatto 2 (Passo II della dimostrazione del teorema di Hörmander)**.** La condizione **(H)** serve ad ottenere una ipotesi di non degenerazione della matrice γ_{X_t} per ogni $t \in [0,1]$. In particolare **(H)** implica che, fissato t, γ_{X_t} è q.c. invertibile e $(\det\gamma_{X_t})^{-1} \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \geq 2$.

Fatto 3 (Conclusione della dimostrazione del teorema di Hörmander)**.** Il **Fatto 1** e il **Fatto 2** concludono la dimostrazione del **Teorema 1**. Infatti in generale dato un vettore aleatorio $(F^i)_{i=1,\dots,N}$ tale che

$$F^i \in \mathbb{D}^\infty, \qquad \det\gamma_F > 0 \quad \text{q.c.}, \qquad (\det\gamma_F)^{-1} \in \cap_{p\geq 2} L^p(\Omega) \tag{27}$$

è possibile stabilire una famiglia di formule di integrazione per parti: ovvero per ogni $k = 1, \dots, N$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^k}(F)G\right] = \mathbb{E}\left[\phi(F)H_k(F,G)\right] \qquad \forall\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \forall G \in \mathbb{D}^\infty \tag{28}$$

dove

$$H_k(F,G) := \delta\left(\sum_{i=1}^d G \cdot DF^i \cdot (\gamma_F^{-1})^{ik}\right) \tag{29}$$

essendo δ l'aggiunto della derivata di Malliavin, ovvero il cosiddetto *integrale di Skorokhod.* Iterativamente si ricava una formula di integrazione per parti per le derivate di ogni ordine e si ottiene, da tali formule, che il vettore aleatorio F ha densità C^∞ rispetto a $\mathcal{L}^n$. Siccome le $H_\alpha(F,G)$ e F hanno buone proprietà di sommabilità nelle ipotesi date, si conclude che tale densità è anche nello spazio di Schwartz.

Formula 4 (Formula dei commutatori)**.** Dato $V \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, vale che

$$Z_t \cdot V(X_t) = V(x_0) + \int_0^t Z_s \cdot [\sigma_j, V](X_s) dB_s^j + \int_0^t Z_s \cdot \left\{[\sigma_0, V] + \frac{1}{2}[\sigma_j, [\sigma_j, V]]\right\}(X_s) ds \tag{30}$$

Fatto 4 (Lemma di Norris, Versione di Hairer)**.** Siano β_t^j e α_t in $L^p(\Omega; C^{\frac{1}{3}}([0,1];\mathbb{R}))$ per ogni $p \geq 2$. Sia

$$Y_t := Y_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s^j dB_s^j \tag{31}$$

Allora

$$\forall p \geq 2 \quad \exists C_p > 0 \quad \text{t.c.} \quad \mathbb{P}\{||Y_s||_\infty < \epsilon, ||\alpha_s||_\infty > \epsilon^{\frac{1}{80}}, ||\beta_s||_\infty > \epsilon^{\frac{1}{80}}\} \leq C_p \epsilon^p \quad \forall\epsilon \in [0,1]. \tag{32}$$

Conclusione. Finisco queste note dando un'idea di come gli ultimi due risultati servano a mostrare il **Fatto 2**. Usando la (25) e le osservazioni sulla sommabilità di Z_t di cui alla **Formula 1**, si ottiene che rimane da mostrare che C_t è invertibile e s

$$(\det C_t)^{-1} \in L^p(\Omega) \quad \forall p \geq 2. \tag{33}$$

Si mostra che tale condizione è verificata se, ad esempio, ho una stima di questo tipo

$$\forall p \geq 2 \quad \exists C_p > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sup_{|v|=1} \mathbb{P}\{v^T C_t v < \epsilon\} \leq C_p \epsilon^p \quad \forall \epsilon \in [0,1]. \tag{34}$$

D'altra parte usando che

$$v^T C_t v = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t |v^T Z_s \sigma_j(X_s)|^2 ds \tag{35}$$

che discende dalla (26), si nota che un uso induttivo della **Formula 4** e del **Lemma di Norris**, unito a stime Hölder, produce un controllo sulle norme infinito di $v^T Z_s V(X_s)$ per ogni $V \in V_k$ definito nella **Condizione 2**. Più precisamente, fissando $t = 1$, si riesce ad ottenere che, per ogni $k \geq 1$, esiste un certo q_k tale che

$$\forall V \in V_k \quad \text{vale che} \quad \forall p \geq 2 \quad \exists C_p > 0 \quad \text{t.c.} \tag{36}$$

$$\sup_{|v|=1} \mathbb{P}\{v^T C_1 v < \epsilon, ||v^T Z_s V(X_s)||_\infty > \epsilon^{q_k}\} \leq C_p \epsilon^p \quad \forall \epsilon \in [0,1]. \tag{37}$$

D'altra parte esiste un k_0 per cui $\text{Span}_{V \in V_{k_0}}\{V(x_0)\} = \mathbb{R}^N$ e dunque

$$\sum_{V \in V_{k_0}} ||v^T Z_s V(X_s)||_\infty \geq \sum_{V \in V_{k_0}} |v^T V(x_0)| > c > 0 \tag{38}$$

per un certo c e per ogni v con $|v| = 1$. Passando alle somme nella (36)/(37) si deduce che

$$\forall p \geq 2 \quad \exists \overline{C_p} > 0 \quad \text{t.c.} \tag{39}$$

$$\sup_{|v|=1} \mathbb{P}\{v^T C_1 v < \epsilon, \sum_{V \in V_{k_0}} ||v^T Z_s V(X_s)||_\infty > \sharp V_{k_0} \cdot \epsilon^{q_{k_0}}\} \leq \overline{C_p} \epsilon^p \quad \forall \epsilon \in [0,1]. \tag{40}$$

Per la (38) ottengo che, se ϵ è sufficientemente piccolo, la seconda condizione dell'evento di cui si calcola la probabilità in (40) è sempre vera, e dunque esiste $\bar{\epsilon}$ tale che

$$\forall p \geq 2 \quad \exists \overline{C_p} > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sup_{|v|=1} \mathbb{P}\{v^T C_1 v < \epsilon\} \leq \overline{C_p} \epsilon^p \quad \forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}] \tag{41}$$

e infine, a patto di aumentare la costante $\overline{C_p}$, vale la (34) e dunque ciò che volevo.

Riferimenti bibliografici

[1] David Nualart: *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2006

[2] Vlad Bally: *An elementary introduction to Malliavin Calculus*, 2003

[3] Maurizio Pratelli: *Un corso introduttivo sul Calcolo di Malliavin*, `http://www.dm.unipi.it/~pratelli/Didattica/Appunti-Malliavin.pdf`

[4] Martin Hairer: *On Malliavin proof's of Hörmander theorem*, 2011

[5] Eulalia Nualart: *Lectures on Malliavin calculus and its applications to finance*, `http://www.math.wisc.edu/~kurtz/NualartLectureNotes.pdf`

[6] Giuseppe Da Prato: *Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus*, 2007