Regolarità dei minimi del problema di Lagrange

Gioacchino Antonelli
Relatore: Prof. Luigi Ambrosio
Correlatore: Prof. Massimo Gobbino

April 27, 2016

1 Abstract

Il problema classico di calcolo delle variazioni, che mi sono proposto di studiare in questa tesi, è il seguente: data una lagrangiana $F : [a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con una certa regolarità, trovare

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \right\} \tag{1}$$

al variare delle funzioni $u : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ assolutamente continue ad estremi fissati, ovvero nella classe

$$\mathcal{C} := \{u \in AC([a,b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}. \tag{2}$$

In una prima parte studio le proprietà di compattezza di questo spazio utilizzando il noto criterio di *Dunford-Pettis*. Ciò si rende necessario dal momento che le proprietà di compattezza di cui godono più in generale gli spazi $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto regolare, con $p > 1$, non sono adattabili a questo caso. Questi discorsi sulla compattezza, sviluppati nel primo capitolo, saranno di fondamentale importanza nel terzo capitolo, dove sviluppo discorsi sulla semicontinuità del funzionale, per far funzionare il cosiddetto *metodo diretto del calcolo delle variazioni* che garantisce l'esistenza di un minimo del problema (1). I teoremi di semicontinuità ed esistenza per lagrangiane a crescita superlinare nella derivata sono dimostrati nella versione *smooth* essenzialmente per come erano noti a Tonelli: nonostante ciò enuncio anche una versione considerevolmente indebolita del teorema di semicontinuità. Oltre a ciò mostro alcuni esempi per chiarire perché superlinearità e convessita sono condizioni importanti per l'esistenza.

La seconda parte del terzo capitolo è dedicata alla regolarità delle soluzioni: mostro come, sotto certe ipotesi di crescita sulla lagrangiana $F(x,z,p)$ e sulle sue derivate $F_z(x,z,p)$ e $F_p(x,z,p)$, il minimo del problema (1), se esiste, soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. In più mostro che, non appena si aggiunga alle ipotesi di crescita un'ipotesi di convessità in p sulla lagrangiana, il minimo è addirittura lipschitziano e se $F_{pp} > 0$, il minimo è anche di classe C^1. Dopo aver notato, infine, che se ho un minimo di classe C^1 automaticamente la regolarità della lagrangiana si trasferisce al minimo, mostro

anche esempi di lagrangiane in cui il minimo è in una certa classe funzionale, ma non in una classe di funzioni più regolari.

Il discorso sulla regolarità si conclude sostanzialmente nel quarto capitolo, in cui dimostro il famoso teorema di regolarità parziale di Tonelli solo nel caso $N = 1$. Per la dimostrazione uso tecniche riguardanti i campi di estremali, che sono sviluppate e discusse più approfonditamente, anche in $\mathbb{R}^N$, nel secondo capitolo. La tesi si conclude con un risultato dovuto a Davie, del 1988, secondo cui la conclusione del teorema di regolarità parziale di Tonelli è ottimale: dato un chiuso E di misura nulla, ricalcando l'articolo di Davie, mostro che esistono lagrangiane C^∞ e strettamente convesse in p per cui i minimi relativi al problema (1) hanno singolarità esattamente sui punti di E. Faccio vedere come, in realtà, posso scegliere queste lagrangiane in modo da avere anche il cosiddetto fenomento di Lavrentiev, ovvero

$$\inf_{u \in \mathcal{C} \cap C^1} \mathcal{F}(u) > \inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u). \tag{3}$$

In una breve appendice ripercorro uno dei primi esempi di lagrangiana e relativa classe funzione che presenta il *fenomeno di Lavrentiev*, ovvero quello di Manià.