Carmine Frascella

Appunti di
Istituzioni di Analisi Matematica

Se ritieni che questo file di errori e osservazioni sia utile, aiutami a migliorarlo! Mandami una e-mail per segnalarmi eventuali errori o punti oscuri, anche semplici errori ortografici o errori evidenti: l'indirizzo lo trovi nella sezione *Contattami* sul sito. Grazie!

Errori e osservazioni

Pagina 26. Nell'enunciato, a lezione è stata lasciata una disuguaglianza stretta nella parte di enunciato con A aperto, mentre a mio avviso si può solo ottenere la disuguaglianza non stretta (il punto in cui la richiesta cade è verso la fine, quando si calcola $\alpha = \inf_{y \in B} f(y)$: dall'ipotesi $f(x) < f(y)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$ non si può avere $f(x) < \alpha$ per ogni $x \in A$).

Pagina 27. Più avanti, alla fine della dimostrazione, il discorso è un po' approssimativo: una dimostrazione più pulita si trova sul testo di riferimento del corso, *Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations* di H.Brezis.

Pagina 30. Nell'enunciato del teorema di Banach-Steinhaus, a lezione è stato detto che $\mathbb{F}$ è un semplice spazio vettoriale normato. In realtà esso è completo, se si vuole se $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ sia uno spazio di Banach (la dimostrazione è simile a quella a pagina 19, dove in effetti a un certo punto si usa a completezza di $\mathbb{R}$). La completezza di $\mathbb{E}$, invece, si usa quando si applica il lemma di Baire.

Pagina 49. Non è chiaro, all'inizio della dimostrazione, perchè sia sufficiente dimostrare che:

$$T(B_{\mathbb{E}}(\mathbf{0}, 1)) \supseteq B_{\mathbb{F}}(\mathbf{0}, r)$$

per qualche $r > 0$. Sia $U \in \mathbb{E}$ un aperto, e sia $\mathbf{y}_0 \in T(U)$. Allora $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ per qualche $\mathbf{x}_0 \in U$. Visto che U è aperto, esiste $c > 0$ tale che:

$$B_{\mathbb{E}}(\mathbf{x}_0, c) = \mathbf{x}_0 + B_{\mathbb{E}}(\mathbf{0}, c) \subseteq U \ ,$$

da cui:

$$\mathbf{y}_0 + T(B_{\mathbb{E}}(\mathbf{0}, c)) \subseteq T(U)$$

Supponendo allora che valga il contenimento scritto all'inizio, si ha:

$$\mathbf{y}_0 + B_{\mathbb{F}}(\mathbf{0}, rc) \subseteq T(U) \ ,$$

da cui $T(U)$ risulta aperto in $\mathbb{F}$, e la dimostrazione è completa.

Pagina 60. Nella seconda osservazione, vediamo per bene perchè se $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ammette inversa destra (lineare e continua) $TD \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$, allora $\mathrm{Im}(TD) \subseteq \mathbb{E}$ è chiuso in $\mathbb{E}$. Sia $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \to \mathbf{x}$, con $\mathbf{x}_n \in \mathrm{Im}(TD)$, e in particolare $\mathbf{x}_n = TD(\mathbf{y}_n)$ con $\mathbf{y}_n \in \mathbb{F}$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Per continuità di T:

$$T(\mathbf{x}_n) \to T(\mathbf{x}) \ ,$$

e applicando TD si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

$$TD(T(\mathbf{x}_n)) = TD(T(TD(\mathbf{y}_n))) = TD(\mathbf{y}_n) = \mathbf{x}_n$$

Dunque, per continuità di TD:

$$TD(T(\mathbf{x}_n))_{n \in \mathbb{N}^+} \to TD(T(\mathbf{x})) \ ,$$

ma vale anche:

$$TD(T(\mathbf{x}_n))_{n\in\mathbb{N}^+} \to \mathbf{x}$$

per l'uguaglianza vista sopra. Dunque, per unicità del limite:

$$\mathbf{x} = TD(T(\mathbf{x})) \in \operatorname{Im}(TD) \ ,$$

ossia la tesi.

Pagina 83. Non è chiaro perchè sia sufficiente mostrare che ogni $f \in \mathbb{E}'$ nullo su M è nullo su $\mathbb{E}$, per dire che $\overline{M} = \mathbb{E}$: a priori, ciò andrebbe dimostrato per ogni funzione continua da $\mathbb{E}$ in $\mathbb{R}$ nulla in M. In effetti, però, è sufficiente restringersi alle funzioni lineari, vediamo perchè. Se $\overline{M} \neq \mathbb{E}$, allora esiste $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{E} \setminus \overline{M}$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $f \in \mathbb{E}'$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \overline{M}$:

$$f(\mathbf{x}) < \alpha < f(\mathbf{x}_0)$$

Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x} \in \overline{M}$ vale $f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x}) < \alpha$, da cui necessariamente $f(\mathbf{x}) = 0$. In particolare, $\alpha > 0$, dunque $f(\mathbf{x}_0) > 0$. Abbiamo allora dimostrato l'esistenza di un funzionale lineare e continuo nullo su $\overline{M}$ ma non ovunque in $\mathbb{E}$.

Pagina 85. La dimostrazione del teorema è palesemente incompleta nella prima parte. A dire il vero, la dimostrazione dell'equivalenza tra la topologia $\sigma(\mathbb{E}', \mathbb{E})$ e quella indotta da d è tediosa e non presenta particolari spunti di riflessione, ed è quindi stata omessa. Essa si può comunque trovare a pagina 74 (e nelle pagine seguenti) del libro *Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations* di H.Brezis.

Pagina 91. L'esercizio 4 è in realtà l'enunciato, con la relativa dimostrazione, di quello che in leteratura è noto come **lemma di Riesz**. Una formulazione equivalente (forse la più nota) afferma che se $M \in \mathbb{E}$ è tale che esiste $r \in \,]0,1[$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ vale:

$$d(\mathbf{x}, M) \;=\; \inf_{\mathbf{y}\in M} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_{\mathbb{E}} \;\leq\; r \ ,$$

allora M è denso in $\mathbb{E}$.

Pagina 108. Si noti che alla fine della pagina (e all'inizio di quella seguente) dovrebbe essere:

$$\overline{T(B_{\mathbb{E}}(\mathbf{0},1))} \simeq \overline{T^{**}(B_{J(\mathbb{E})}(\mathbf{0},1))} \ ,$$

ma per non appesantire la notazione è stata volutamente trascurata l'isometria lineare e iniettiva $J : \mathbb{E} \to \mathbb{E}''$.

Pagina 109. Sembra che la dimostrazione del fatto che l'operatore compatto mostrato nell'esempio sia effettivamente compatto non ha una conclusione. Effettivamente ciò è vero, perciò rimedio brevemente qui. In effetti, le verifiche a fine pagina mostrano che $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}^+}$ è una famiglia di funzioni equilimitate ed equicontinue: a questo punto si conclude usando il teorema di Ascoli-Arzelà.

Pagina 123. Alla fine della pagina si dimostra che (usando la stessa notazione degli appunti) se $n > m$:

$$\left|\left|\frac{T(u_n)}{\lambda_n} - \frac{T(u_m)}{\lambda_m}\right|\right| \geq \frac{1}{2}$$

Da qui si ottiene (a pagina 124), per $n, m \geq N$ (con N opportunamente scelto):

$$||T(u_n) - T(u_m)|| \geq \frac{|\lambda|}{4}$$

In effetti:

$$\left|\left|\frac{T(u_n)}{\lambda_n} - \frac{T(u_m)}{\lambda_m}\right|\right| \;=\; \frac{1}{|\lambda|}\left|\left|\frac{\lambda}{\lambda_n}T(u_n) - \frac{\lambda}{\lambda_m}T(u_m)\right|\right| \;\leq\; \frac{2}{|\lambda|}||T(u_n) - T(u_m)|| \ ,$$

visto che il termine:

$$\left|\left|\frac{\lambda}{\lambda_n}T(u_n) - \frac{\lambda}{\lambda_m}T(u_m)\right|\right|$$

converge a $||T(u_n) - T(u_m)||$, dato che $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \to \lambda$.

Pagina 134. Innanzitutto, un occhio più attento (diciamo di una persona che ha seguito un corso di Calcolo delle Variazioni) noterà immediatamente che la dimostrazione del teorema, nell'ipotesi in cui a è simmetrica, non è altro che l'applicazione del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. In effetti, nel conto finale (abbastanza contorto, a mio parere) si sta solamente dimostrando che il punto di minimo è soluzione dell'equazione differenziale di Eulero del funzionale F, che è proprio:

$$a(u,v) - \langle f, v\rangle_H = 0$$

Una cosa che forse non è del tutto evidente è la stretta convessità di a. Il punto cruciale è dimostrare la disuguaglianza stretta seguente:

$$2a(u_1,u_2) < a(u_1,u_1) + a(u_2,u_2)$$

Ma in effetti, nell'ipotesi in cui a è coerciva:

$$a(u_1,u_1) + a(u_2,u_2) - 2a(u_1,u_2) = a(u_1-u_2, u_1-u_2) \geq C||u_1-u_2||_H^2 > 0\ ,$$

visto che $u_1 \neq u_2$. Da qui si ha immediatamente la disuguaglianza cercata.

Per chi è interessato, sui miei appunti del corso di *Equazioni alle Derivate Parziali* è riportata una dimostrazione più completa di questo teorema, che non usa l'ipotesi di simmetria di a. Il teorema è comunque famosissimo, quindi di sicuro in giro si trovano molti libri contenenti una dimostrazione completa (forse lo stesso libro di H.Brezis? Credo proprio di si...).

Pagina 138. Se vi siete chiesti perchè l'inizio del rigo, dall'inizio alla fine della pagina, si sposta verso destra di più di 1 cm, beh... non lo so.

Pagina 147. Nella proposizione, per $p = +\infty$ la norma è chiaramente:

$$||u||_{W^{1,\infty}} \stackrel{\mathbf{def}}{=} ||u||_{L^\infty} + ||u'||_{L^\infty}$$

Alla fine della dimostrazione, il passaggio al limite per ciascuno dei due membri è garantito dal fatto che ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$ (e ogni sua derivata) appartiene a ogni $L^p(A)$, per $p \in [1,+\infty]$. Per $1 < p < +\infty$, ad esempio:

$$\left|\int_A (u_n - u)\varphi'\ dx\right| \ \leq\ ||u_n - u||_{L^p}||\varphi'||_{L^{p'}}\ ,$$

per la disuguaglianza di Hölder. I casi limite si discutono in modo analogo.

Pagina 150. Il lemma non riportato è il cosiddetto **Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni** in forma integrale, meglio noto come **Lemma di Du Bois-Reymond**. Si può trovare qualcosa a riguardo nei miei appunti del corso di *Elementi di Calcolo delle Variazioni.*

Pagina 151. Nella prima implicazione, la catena di disuguaglianze completa è la seguente:

$$\int_I u\varphi'\ dx \leq \left|\int_I u\varphi'\ dx\right| = \left|\int_I u'\varphi\ dx\right| \leq ||u'||_{L^p(I)}\ ||\varphi||_{L^{p'}(I)}$$

Pagina 158. Verso la fine della pagina, c'è una catena di disuguaglianze che merita un'analisi più dettagliata, per essere compresa (a priori, infatti, non è così facile accertarne l'esattezza). Innanzitutto, se $p, q \in [1,+\infty]$ sono tali che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ ,$$

con le dovute convenzioni nei casi limite, allora vale la seguente uguaglianza:

$$(p-1)q = p$$

Dunque si ha, usando la disuguaglianza di Hölder:

$$|G(v(x))| \;=\; |v(x)|^p \;=\; \left| \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)\; dt \right| \;\leq\; p\; ||v'||_{L^p}\; ||\; |v(t)|^{p-1}\; ||_{L^q}$$

Ora:

$$||\; |v(t)|^{p-1}\; ||_{L^q} \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{(p-1)q}\; dt \right)^{\frac{1}{q}} \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{p}\; dt \right)^{\frac{1}{q}} \;=\; ||v||_{L^p}^{\frac{p}{q}} \;=\; ||v||_{L^p}^{p-1} \;,$$

e la prima disuguaglianza è dimostrata, dato che quindi vale:

$$|v(x)|^p \;\leq\; p\; ||v'||_{L^p}\; ||v||_{L^p}^{p-1}$$

Ora, per la disuguaglianza di Young, che afferma che dati $a, b \in \mathbb{R}$ allora:

$$|ab| \;\leq\; \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \;,$$

si ha:

$$p\; ||v'||_{L^p}\; ||v||_{L^p}^{p-1} \;\leq\; p \left[\frac{||v'||_{L^p}^{p}}{p} + \frac{||v||_{L^p}^{(p-1)q}}{q} \right] \;=\; p \left[\frac{||v'||_{L^p}^{p}}{p} + \frac{||v||_{L^p}^{p}}{\frac{p}{p-1}} \right] \;,$$

e la seconda disuguaglianza è dimostrata. Infine $p \geq 1$ e $\frac{p-1}{p} \leq 1$, da cui:

$$p \left[\frac{||v'||_{L^p}^{p}}{p} + \frac{||v||_{L^p}^{p}}{\frac{p}{p-1}} \right] \;\leq\; p \left[||v'||_{L^p}^{p} + ||v||_{L^p}^{p} \right] \;\leq p\; ||v||_{W^{1,p}}^{p} \;,$$

da cui si ha quanto voluto.

Pagina 182. Sicuramente è evidente il fatto che, essendo Ω limitato, e quindi essendo $\Gamma = \partial\Omega$ compatto, la partizione dell'unità può essere fatta con una famiglia finita di funzioni: non è quindi assolutamente necessario considerare una partizione localmente finita. In realtà a lezione il teorema è stato enunciato senza l'ipotesi di limitatezza (che invece è presente nell'enunciato sul testo di riferimento del corso, ossia *Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations* di H.Brezis): in queste ipotesi, però, avere un ricoprimento localmente finito di Ω non sembra, perlomeno a me, così ovvio. Ho pensato allora di aggiungere l'ipotesi di limitatezza, e di lasciare la dimostrazione invariata, sebbene essa possa essere ottimizzata passando subito ad un ricoprimento finito.