Appunti di

Geometria Analitica e Algebra Lineare

Carmine Frascella

29 Giugno 2014

Indice

NOZIONI DI BASE

$a \in A$ (a appartiene ad A)

In questo caso a è un elemento dell'insieme A.

Dati due insiemi A, B, con $A, B \neq \emptyset$, esiste l'operazione del prodotto tra i due insiemi:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$$B \times A = \{(b, a) \mid b \in B,\ a \in A\}$$

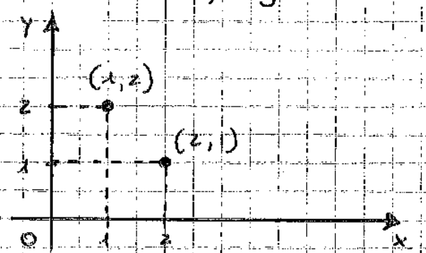
$$A \times B \neq B \times A$$

A LIVELLO GRAFICO

$$A = \{1\} \qquad B = \{2\}$$

$$A \times B = \{1; 2\}$$

$$B \times A = \{2; 1\}$$



Se $A = B \Rightarrow A \times A = A^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$

Le coppie generate sono <u>ordinate</u>.

$$a_1 \neq a_2$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$$

RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A

Sia dato un insieme $A \neq \emptyset$.

Una relazione R su A è un sottoinsieme $R \subseteq A \times A$.

Dati $a, b \in A$, $a \sim_R b \overset{def}{\iff} (a,b) \in R$

R è una relazione di equivalenza se verifica certe proprietà:

1) RIFLESSIVA: $\forall a \in A : a \sim_R a$ (in altre parole, nel piano cartesiano la diagonale è sempre contenuta:

$$\Delta_A = \{(a,a) \in A^2\} \subseteq R \text{)}$$

2) SIMMETRICA: $\forall a, b \in A : a \sim_R b \iff b \sim_R a$

3) TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in A : a \sim_R b,\ b \sim_R c \Rightarrow a \sim_R c$

Una relazione d'equivalenza banale è l'identità:

$R =$ identità $\quad a \sim_R b \iff a = b$

Dim.

1) RIFLESSIVA: $\forall a \in A,\ a = a$

2) SIMMETRICA: $\forall a, b \in A,\ a = b \iff b = a$

3) TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in A,\ a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$

Dato un insieme $A \neq \emptyset$ e una relazione di equivalenza R:

$\forall a \in A$, si definisce la classe di equivalenza di a in A:

$$[a]_R \overset{def}{=} \{ b \in A \mid a \sim_R b \}$$

Le classi di equivalenza dell'insieme A formano una partizione di A.

Una partizione di un insieme è tale quando:

1) Ogni classe è non vuota;

2) L'unione delle classi ricopre A:

$\forall a \in A \ \exists [\alpha]_b \ \ni' \ a \in \alpha$;

3) $\alpha \cap \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Es. $A = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R} : a \sim_R b \Leftrightarrow a - b = k \in \mathbb{Z}$

1) $a \sim_R a$

Dim.

$a - a = 0 \in \mathbb{Z}$

2) $a \sim_R b \Leftrightarrow b \sim_R a$

Dim.

$a - b = k \in \mathbb{Z}$

$b - a = -k \in \mathbb{Z}$

3) $a \sim_R b, \ b \sim_R c \Rightarrow a \sim_R c$

Dim.

$a - b = k \in \mathbb{Z} \quad , \quad b - c = h \in \mathbb{Z}$

$$(a - b) + (b - c) = k + h \in \mathbb{Z}$$

$$a - c = k + h \in \mathbb{Z}$$

In questo caso, dato un elemento $a \in \mathbb{R}$:

$$[a] = \{ b \in \mathbb{R} \mid a \sim_R b \Leftrightarrow a - b = k \in \mathbb{Z} \}$$

In questo caso viene generata una partizione. Infatti:

1) ogni classe $\alpha = [a]$, dato che contiene almeno a, è non vuota;

2) $\forall a \in A : a \in \alpha = [a]$, dunque le classi ricoprono A;

3) $\underset{[a]}{\alpha} \cap \underset{[b]}{\beta} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Dim. supposto che $\alpha \equiv \beta$

$\forall b \in \alpha \Rightarrow b \in \beta$

$c \in [a] \Rightarrow c \in [b]$

$[a] \cap [b] \neq \emptyset$ (per ipotesi)

$\Downarrow$

$\exists d \in [a] \cap [b]$

$\begin{cases} a \sim d \\ b \sim d \end{cases}$

$a \sim c \Leftrightarrow c \sim a$ (propr. simmetrica)

$\Downarrow$

$c \sim d \Rightarrow c \sim b$

Dato un insieme $A \neq \emptyset$ e una relazione di equivalenza R

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ è l'insieme quoziente.

$\pi : A \to A/R$ (proiezione naturale nel quoziente)

$\pi(a) = [a]_R$

Es. La relazione di equivalenza associata ad una funzione:

$f : A \to B \quad a, b \in A \quad a \sim_f b \overset{def}{\Leftrightarrow} f(a) = f(b)$

È effettivamente di equivalenza?

Sì infatti:

1) $\forall a \in A : a \sim_f a$ ($f(a) = f(a)$ è banalmente vero);

2) $\forall a, b \in A : a \sim_f b \Leftrightarrow b \sim_f a$ ($f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a)$ è banalmente vero);

3) $\forall a, b, c \in A : a \sim_f b, \ b \sim_f c \Rightarrow a \sim_f c$

Dim.

Per ipotesi $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$

$\Downarrow$

$f(a) = f(c)$.

Una funzione che, dato un insieme $A \neq \emptyset$, è tale che:

$$a, b \in A : a \sim_f b \iff a - b = k \in \mathbb{Z},$$

e al tempo stesso,

$$a, b \in A : a \sim_f b \iff f(a) = f(b)$$

è la seguente.

$$f : A \to A^2$$

$$f(a) = (\cos(2\pi a), \operatorname{sen}(2\pi a))$$

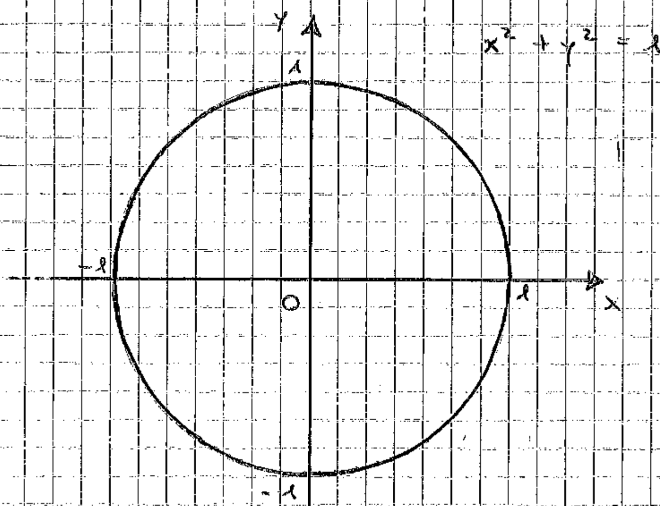
Per ogni a, questa funzione associa il punto appartenente alla circonferenza goniometrica di coordinate $(\cos(2\pi a), \operatorname{sen}(2\pi a))$.

Il periodo della funzione è 1; dunque la circonferenza goniometrica viene "percorsa" infinite volte. I numeri aventi la stessa parte decimale, dunque, hanno come immagine tutti lo stesso punto.

L'insieme quoziente, in questo caso, è:

$$S = \{ x, y \in A \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

A LIVELLO GRAFICO



INSIEMI MUNITI DI OPERAZIONI

$A \neq \phi$ $\quad *$ = operazione su A

$$* : A \times A \to A$$
$$(a, b) \mapsto a * b = c$$

$(A *)$ è un gruppo
se $*$ verifica le seguenti proprietà:

1) associativa: $\forall\, a, b, c \in A : (a * b) * c = a * (b * c)$

2) Esiste uno e un solo elemento neutro $u \in A$
$\forall\, a \in A : a * u = u * a = a$

3) è inverso: $\forall\, a \in A\ \exists\, b \in A \ni\ a * b = b * a = u$

Se inoltre vale la proprietà commutativa
$\forall\, a, b \in A : a * b = b * a$,
allora il gruppo è commutativo o Abeliano.

$(A * \square)$ è un anello se:

$*$) è un gruppo Abeliano rispetto alla prima operazione;

$\square$) è associativo
esiste l'elemento neutro v

$*\square$) $\forall\, a, b, c \in A$

$$(a * b) \square c = (a \square c) * (b \square c)$$
$$c \square (a * b) = (c \square a) * (c \square b)$$

Se l'operazione $\square$ è commutativa, l'anello è anch'esso commutativo.

Es. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo
$u = 0$
$\qquad u \neq v$
$v = 1$

Un anello è un campo se:

1) è commutativo,
2) $\forall a \in A, a \neq u \ \exists!\ b \in A \ni' a \square b = b \square a = v$

Es. Il campo dei numeri razionali:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$$\frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = cb$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \end{array} \right\} \Big/ R$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd}$$

RIEPILOGO

Dato un insieme $A \neq \emptyset$, una relazione R è di equivalenza se soddisfa tre proprietà:

1) riflessiva;
2) simmetrica;
3) transitiva.

L'insieme viene quindi diviso in classi di equivalenza del tipo $[x]$: l'operazione che si compie si definisce partizione, in quanto presenta certe proprietà:

1) ogni classe $\alpha = [x]$ contiene almeno x, dunque è non vuota;
2) $\forall x \in A \ \exists \ [x] = \{y \in A \mid x \sim_R y\}$

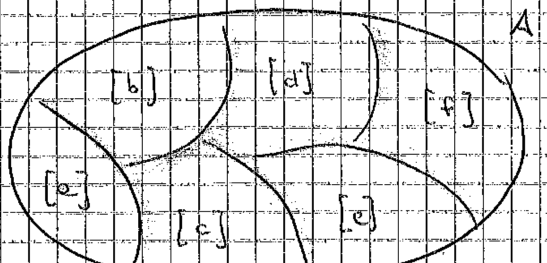
$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{x \in A} [x] = A$$

3) Date due classi di equivalenza α e β:

$$\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha = \beta$$

A LIVELLO GRAFICO



Le classi, se vengono assunte come elementi, formano un nuovo insieme, l'insieme quoziente:

$$A/_R = \{[x] \mid x \in A\}$$

L'INSIEME $\mathbb{Q}$ IN RELAZIONE A $\mathbb{Z}$

Si prendono in esame gli insiemi:

- $\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{Z}^* = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0 \} = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Sappiamo che $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo.
Dunque:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \}$$

Istituiamo una relazione R, tale che:

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b) \sim_R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

È una relazione di equivalenza?

1) PROPRIETÀ RIFLESSIVA

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b) \sim_R (a,b) \Leftrightarrow ab = ba$, vero per le proprietà di $\mathbb{Z}$ rispetto al prodotto.

2) PROPRIETÀ SIMMETRICA

$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b) \sim_R (c,d) \Leftrightarrow (c,d) \sim_R (a,b)$

Per ipotesi: $ad = bc$; ma ciò equivale a dire che $cb = da$, ovvero la tesi.

3) PROPRIETÀ TRANSITIVA

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b) \sim_R (c,d),\ (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim_R (e,f)$

Per ipotesi: $a, c, e \in \mathbb{Z}$; $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$

$$ad = bc \quad ; \quad cf = de$$
$$adf = bcf \quad ; \quad bcf = bde$$
$$adf = bde$$
$$af = be,$$

da cui: $(a,b) \sim_R (e,f)$.

R è una relazione di equivalenza. Dunque divide l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ in classi di equivalenza.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ \exists \ [(a,b)] \ni (a,b) \in [(a,b)]$$

Ex. $[(2,3)] = \{(2,3),(4,6),(6,9)\dots\}$ infiniti elementi

$[(a,b)]$ è a sua volta un elemento dell'insieme quoziente.

L'insieme quoziente, in questo caso si denota con:

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R} \quad \text{(si legge } \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*} \text{ "modulo" } R\text{)}$$

È in effetti, è proprio $\mathbb{Q}$

N.B: Ogni elemento di una classe di equivalenza è un suo rappresentante.

In relazione a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R}$ ora, istituiamo le operazioni:

- SOMMA $(+)$;
- PRODOTTO $(\cdot)$.

Dunque:

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R} \times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R} \xrightarrow{+} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R}$$

$$([(a,b)],[(c,d)]) \xrightarrow{+} [(a,b)]+[(c,d)] \overset{def.}{=}$$

$$\overset{def.}{=} [(ad+bc,\ bd)]$$

$a, c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{Z}^{*}$

$\Downarrow$

$ad+bc \in \mathbb{Z}$; $bd \in \mathbb{Z}^{*}$

questa classe di equivalenza può esistere.

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R} \times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}/_{R}$$

$$([(a,b)],[(c,d)]) \xrightarrow{\cdot} [(a,b)]\cdot[(c,d)] \overset{def.}{=}$$

$$\overset{def.}{=} [(ac,\ bd)]$$

$a, c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{Z}^{*}$

$\Downarrow$

$ac \in \mathbb{Z}$; $bd \in \mathbb{Z}^{*}$

Questa classe di equivalenza può esistere.

- SOMMA: PROBLEMA DELLA BUONA DEFINIZIONE

Ip: $(a',b') \in [(a,b)]$, $a' \neq a$, $b' \neq b$

$(c',d') \in [(c,d)]$, $c' \neq c$, $d' \neq d$

$$[(a,b)]+[(c,d)] \overset{def.}{=} [(ad+bc,\ bd)]$$

$$[(a',b')]+[(c',d')] \overset{def.}{=} [(a'd'+b'c',\ b'd')]$$

$(a',b') \sim_R (a,b) \iff a'b = ab'$
$(c',d') \sim_R (c,d) \iff c'd = cd'$

Tesi: $[(a'd'+b'c', b'd')] = [(ad+bc, bd)]$

$$\Updownarrow$$

$$(a'd'+b'c', b'd') \sim_R (ad+bc, bd)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a'd'+b'c')bd = b'd'(ad+bc)$$

Dim.

$$(a'd'+b'c')bd = a'd'bd + b'c'bd$$

Per ipotesi: $a'b = ab'$, $c'd = cd'$

$$\Downarrow$$

$$(a'd'+b'c')bd = ab'd'd + b'cbd' =$$
$$= b'd'(ad+bc)$$

$$(a'd'+b'c')bd = b'd'(ad+bc), \text{ c.v.d.}$$

• PRODOTTO: PROBLEMA DELLA BUONA DEFINIZIONE

Ip: $(a',b') \in [(a,b)]$, $a' \neq a$, $b' \neq b$
$(c',d') \in [(c,d)]$, $c' \neq c$, $d' \neq d$

$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \overset{def}{=} [(ac, bd)]$
$[(a',b')] \cdot [(c',d')] \overset{def}{=} [(a'c', b'd')]$

$(a',b') \sim_R (a,b) \iff a'b = ab'$
$(c',d') \sim_R (c,d) \iff c'd = cd'$

Tesi: $[(a'c', b'd')] = [(ac, bd)]$

$$\Updownarrow$$

$$(a'c', b'd') \sim_R (ac, bd)$$

$$\Updownarrow$$

$$a'c'bd = b'd'ac$$

Dim. $a'c'bd = (a'b)(c'd)$

Per ipotesi: $a'b = ab'$; $c'd = cd'$

$$\Downarrow$$

$a'c'bd = (a'b)(c'd) = (ab')(cd') = ab'cd'$, c.v.d.

• SOMMA (+)

$\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_R \, , + \right)$ è un gruppo Abeliano?

1) ASSOCIATIVA

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : [(a,b)+(c,d)]+(e,f) =$

$= (a,b) + [(c,d)+(e,f)]$

Dim

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) \overset{def.}{=} (ad+bc, bd)+(e,f) \overset{def.}{=}$$
$$\overset{def}{=} ((ad+bc)f+bde, bdf) = (adf+bcf+bde, bdf)$$

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] \overset{def}{=} (a,b)+(cf+de, df) \overset{def}{=}$$
$$\overset{def}{=} (adf+b(cf+de), bdf) = (adf+bcf+bde, bdf)$$

$$\Downarrow$$

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)], \text{ c.v.d.}$$

(Si ricordi che $a,c,e \in \mathbb{Z}$; $b,d,f \in \mathbb{Z}^*$)

2) ELEMENTO NEUTRO

$\exists! [(c,d)] \ni' \forall [(a,b)] : [(a,b)]+[(c,d)] = [(a,b)]$

A livello "mentale":

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \frac{c}{d} = \frac{0}{n}, \; n \in \mathbb{Z}^*$$

Tesi: $[(a,b)]+[(0,1)] = [a,b]$

Dim $[(a,b)]+[(0,1)] \overset{def.}{=} [(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)] = [(a,b)]$, c.v.d.

$[(0,1)]$ è l'elemento neutro

$$0_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_R} = [(0,1)]$$

(si legge nel gruppo additivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_R$, l'elemento neutro è la classe di equivalenza $[(0,1)]$)

3) $\forall [(a,b)] \; \exists \; [(c,d)]$ t.c. $[(a,b)] + [(c,d)] = [(0,1)]$ (INVERSO)

A livello "mentale":

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0 \qquad \frac{c}{d} = -\frac{a}{b}$$

Tesi: $[(a,b)] + [(-a,b)] = [(0,1)]$

Dim. $[(a,b)] + [(-a,b)] \overset{def}{=} (ab - ab, b^2) = (0, b^2)$

$$0 \cdot b^2 = 0 \cdot 1$$
$$\Downarrow$$
$$(0,1) \sim_R (0, b^2)$$
$$\Downarrow$$
$$[(0,1)] = [(0,b^2)], \text{ c.v.d.}$$

4) PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$

Dim. $(a,b) + (c,d) \overset{def.}{=} (ad + bc, bd)$

$(c,d) + (a,b) \overset{def.}{=} (cb + da, db)$

$$\Downarrow$$

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$$

$\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R \, , + \right)$ è un gruppo abeliano.

• SOMMA E PRODOTTO

$\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R \, , + , \cdot \right)$ è un anello?

+) è un gruppo abeliano (già dimostrato);

•) è associativo:

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : [(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f) =$
$= (a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)]$

Dim. $[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) \overset{def}{=} (ac,bd)\cdot(e,f) \overset{def}{=} (ace,bdf)$

$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] \overset{def}{=} (a,b)\cdot(ce,df) \overset{def}{=} (ace,bdf)$

$$\Downarrow$$

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) = (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$$

esiste l'elemento neutro:

$\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R \ \exists [(c,d)] \ni' \ [(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(a,b)]$

A livello "mentale":

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \frac{c}{d} = 1$$

Dim. $[(a,b)]\cdot[(1,1)] \overset{def.}{=} [(a\cdot 1, b\cdot 1)] = [(a,b)]$, c.v.d.

$$1_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R} = [(1,1)]$$

$+\ \cdot)\ \forall\ (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$:

1) $[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) = [(a,b)\cdot(e,f)] + [(c,d)\cdot(e,f)]$

$(ad+bc,bd)\cdot(e,f) = (ae,bf)+(ce,df)$

$(aed+bce,bdf) = (aedf+becf,bdf^2)$

$(ade+bce,bdf) = (ade+bce,bdf)\cdot(f,f)$, $f\in\mathbb{Z}^*$

$$(f,f) = 1_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R}$$

$$\Downarrow$$

$(ade+bce,bdf) = (ade+bce,bdf)$, c.v.d.

2) $(e,f)\cdot[(a,b)+(c,d)] = (e,f)\cdot(a,b)+(e,f)\cdot(c,d)$

$(e,f)\cdot[ad+bc,bd] = (ae,bf)+(ec,df)$

$(ead+ebc,bfd) = (aedf+bfec,bdff)$

$(ead+ebc,bfd) = (ead+ebc,bfd)\cdot(f,f)$

$$(f,f) = 1_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R}$$

$$\Downarrow$$

$(ead+ebc,bfd) = (ead+ebc,bfd)$, c.v.d.

È in più:

- PROPRIETÀ COMMUTATIVA DEL PRODOTTO

$\forall (a,b)(c,d) \in \mathbb{Z},\mathbb{Z}^* : (a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$

Dim. $(a,b)\cdot(c,d) \overset{\text{def.}}{=} (ac, bd) \overset{\text{def.}}{=} (c,d)\cdot(a,b)$, c.v.d.

$\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_R, +, \cdot\right)$ è un anello commutativo.

È un campo?

$\forall [(a,b)] \neq [(0,1)] \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_R \ \exists! [(c,d)]$ t.c. $[(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(1,1)]$

A livello "mentale":

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = 1 \quad , \quad \frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Dim. $[(a,b)]\cdot[(b,a)] \overset{\text{def.}}{=} [(ab, ba)] = [(1,1)]$ c.v.d.

$\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_R, +, \cdot\right)$ è un campo.

Per comodità, dunque, si è introdotto il simbolo $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_R = \mathbb{Q}$$, il campo dei razionali

Sempre per comodità:

$$[(a,b)] = \frac{a}{b}$$

Notare che:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto [(n,1)] = \frac{n}{1} \end{aligned}$$

CONGRUENZE MODULO N
NOZIONI DI BASE

Dato un $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, si prendono in esame:

- l'insieme degli interi $\mathbb{Z}$;
- la relazione R "congruenza modulo n", che afferma che:

$R: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} : x \sim_R y \overset{def}{\iff} n \mid x - y \iff \exists K \in \mathbb{Z} \ni' x - y = nK$

In simboli: $x \sim_R y \iff x \equiv y \pmod{n}$

È una relazione di equivalenza? Sì. Infatti:

1) RIFLESSIVA:

$\forall a \in \mathbb{Z} : a \sim_R a$

Dim. $a - a = 0 = n \cdot 0 \implies n \mid a - a$, c.v.d.

2) SIMMETRICA:

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim_R b \iff b \sim_R a$

Dim. $a \sim_R b$ per ipotesi $\iff n \mid a - b$

$$\Downarrow$$

$$n \mid b - a = -(a - b), \text{ c.v.d.}$$

3) TRANSITIVA:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \sim_R b \wedge b \sim_R c \implies a \sim_R c$

Dim. Per ipotesi $n \mid a - b \quad n \mid b - c$

$$\Downarrow$$

$$(a - b) = nK \quad (b - c) = nh, \quad h, K \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$a - b + b - c = a - c = n(K + h)$$

$$\Downarrow$$

$$n \mid a - c$$

$$\Downarrow$$

$$a \sim_R c, \text{ c.v.d.}$$

L'insieme quoziente, delle classi di resto, si può denotare:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$$

Per ogni m, l'insieme quoziente presenta m elementi: i rappresentanti delle classi di resto associate sono della forma

$$mk + r, \quad 0 \leq r < m,$$

e sono esattamente m.

Es. $m = 3$ $\quad [2] = \{2, 5, 8, -1, -4 \dots\}$

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\} \quad (3 \text{ elementi})$$

Ex. Presi in esame l'insieme quoziente $\mathbb{Z}_m$, e le operazioni $+$ e $\cdot$ così definite:

$$\forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_m : \quad [a], [b] \xrightarrow{+} [a] + [b] \overset{def.}{=} [a + b]$$
$$[a], [b] \xrightarrow{\cdot} [a] \cdot [b] \overset{def.}{=} [a b]$$

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ è un anello commutativo?

Commensitività:

$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b, ab \in \mathbb{Z}$

Le classi di resto $[a+b]$ e $[ab]$ possono esistere.

° SOMMA: BUONA DEFINIZIONE

Ip. $\quad a' \in [a], \; a' \neq a \Rightarrow a' \sim_R a \Rightarrow m \mid a' - a$
$\quad\;\; b' \in [b], \; b' \neq b \Rightarrow b' \sim_R b \Rightarrow m \mid b' - b$

$$[a] + [b] \overset{def.}{=} [a + b]$$
$$[a'] + [b'] \overset{def}{=} [a' + b']$$

Tesi: $\quad [a + b] = [a' + b']$

$$\Updownarrow$$

$$a + b \sim_R a' + b'$$

$$\Updownarrow$$

$$m \mid a + b - (a' + b')$$

Dim. $\quad m \mid a' - a \Rightarrow m \mid a - a'$
$\quad\;\; m \mid b' - b \Rightarrow m \mid b - b'$ $\quad \Rightarrow m \mid a - a' + b - b'$, c.v.d.

• PRODOTTO: BUONA DEFINIZIONE

Ip. $a' \in [a]$, $a' \neq a \Rightarrow a' \sim_R a \Rightarrow m \mid a - a'$

$b' \in [b]$, $b' \neq b \Rightarrow b' \sim_R b \Rightarrow m \mid b - b'$

$$[a] \cdot [b] \overset{def}{=} [ab]$$
$$[a'] \cdot [b'] \overset{def}{=} [a'b']$$

Tesi: $[ab] = [a'b']$

$$\Updownarrow$$

$$ab \sim_R a'b'$$

$$\Updownarrow$$

$$m \mid ab - a'b'$$

Dim. $m \mid a - a' \Rightarrow a' = km + r$, $a = hm + r$

$m \mid b - b' \Rightarrow b' = lm + q$, $b = mm + q$

$(k, h, l, m \in \mathbb{Z}$; $r, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < m$, $0 \leq q < m)$

$[hm + r] = [r]$ $\qquad [lm + q] = [q]$

$[km + r] = [r]$ $\qquad [mm + q] = [q]$

$$\Downarrow$$

$$[a] \cdot [b] = [r] \cdot [q] \overset{def}{=} [rq] =$$
$$[a'] \cdot [b'] = [r] \cdot [q] \overset{def}{=} [rq]$$

$$\Downarrow$$

$$[ab] = [a'b']$$, c.v.d.

• SOMMA

$(\mathbb{Z}_m, +)$ è un gruppo Abeliano?

1) ASSOCIATIVA

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$: $(a+b) + c = a + (b+c)$, banalmente vero per le proprietà di $\mathbb{Z}$

2) ELEMENTO NEUTRO

$\exists! [b] \in \mathbb{Z}_m \ni' \forall [a] \in \mathbb{Z}_m : [a] + [b] = [a]$

A livello mentale:

$a = mk + r$

$b = mh + q$, $k, h \in \mathbb{Z}$; $r, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < m$, $0 \leq q < m$

$[a] = [r]$ $\qquad [r] + [q] = [r]$ $\qquad [q] = [0]$

$[b] = [q]$

Dim. $[a] + [0] \stackrel{def}{=} [a+0] = [a]$ c.v.d.

$$0_{\mathbb{Z}_m} = [0]$$

3) INVERSO

$\forall [a] \in \mathbb{Z}_m \ \exists \ [b] \in \mathbb{Z}_m \ \ni' : [a] + [b] = [0]$

A livello mentale:

$a = km + r$
$b = hm + q$, $k, h \in \mathbb{Z}$, $r, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < m$, $0 \leq q < m$

$[a] = [r]$
$[b] = [q]$
$[m] = [0]$

$$[r] + [q] \stackrel{def}{=} [r+q] = [0] = [m]$$

$$[q] = [m - r]$$
$$[b] = [m - a]$$

Dim.

$$[a] + [m-a] \stackrel{def}{=} [a + m - a] = [m] = [0] , \text{ c.v.d.}$$

4) PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a] + [b] = [b] + [a]$, banalmente vero per le proprietà di $\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}_m, +)$ è un gruppo Abeliano

• SOMMA E PRODOTTO

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ è un anello commutativo?

+) è un gruppo Abeliano (già dimostrato);

•) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \ ([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

Dim. $([a] \cdot [b]) \cdot [c] \stackrel{def}{=} [ab] \cdot [c] \stackrel{def}{=} [abc]$

$$[a] \cdot ([b] \cdot [c]) \stackrel{def}{=} [a] \cdot [bc] \stackrel{def}{=} [abc] , \text{ c.v.d.}$$

Esiste l'elemento neutro?

$\exists [b] \in \mathbb{Z}_m \ni \forall [a] \in \mathbb{Z}_m : [a] \cdot [b] = [a]$

A livello mentale:

$$[a] \cdot [b] \stackrel{def}{=} [ab] = [a] \qquad [b] = [1]$$

Dim. $[a] \cdot [1] \overset{def}{=} [a \cdot 1] = [a]$, c.v.d.

$$1_{\mathbb{Z}_m} = [1]$$

+ ·) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1) $([a] + [b]) \cdot [c] = [a] \cdot [c] + [b] \cdot [c]$

Dim. $([a] + [b]) \cdot [c] \overset{def}{=} [a + b] \cdot [c] \overset{def}{=} [ac + bc]$

$[a] \cdot [c] + [b] \cdot [c] \overset{def}{=} [ac] + [bc] \overset{def}{=} [ac + bc]$, c.v.d.

2) $[c] \cdot ([a] + [b]) = [c] \cdot [a] + [c] \cdot [b]$, banalmente vero per le proprietà di $\mathbb{Z}$.

4) PROPRIETÀ COMMUTATIVA DEL PRODOTTO

$\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$: $[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]$, banalmente vero.

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

GLI INSIEMI $\mathbb{N}$ E $\mathbb{Z}$
LE OPERAZIONI SOMMA E PRODOTTO

Si prenda in esame l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$$

Innanzitutto, esso è infinito. Difatti è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $A \subset \mathbb{N}$. Dunque:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$
$$A = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$$

$$f: \mathbb{N} \to A \ni' \forall n \in \mathbb{N}: f(n) = 2n \in A$$

Dunque, presi due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, consideriamo due insiemi A, B disgiunti tali che $(A, B \in S)$:

$$|A| = a \qquad |B| = b$$

N.B. $|A|$ si legge "cardinalità di A", e indica il numero degli elementi di A.

Se effettuo l'unione tra A e B (e successivamente tra B e A), ottengo quanto segue:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$B \cup A = \{x \in S \mid x \in B \vee x \in A\}$$

Le due proposizioni, dal punto di vista logico, sono le stesse.

Se consideriamo la cardinalità degli insiemi:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$\Downarrow$$
$$|A| + |B| = |B| + |A|$$
$$a + b = b + a$$

È stata ora introdotta l'operazione "somma" (+), che dati due numeri naturali ne associa un terzo, derivante dalla cardinalità dell'insieme-unione.

Ed abbiamo anche dimostrato che essa gode della proprietà:

commutativa. Dato che $\mathbb{N}$ è infinito, la somma sarà sempre $\in \mathbb{N}$

Immediata conseguenza è la seguente:

$a, b, c \in \mathbb{N} \quad A, B, C \in S$ t.c. $|A| = a, |B| = b, |C| = c$

$$(A \cup B) \cup C = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\} \cup \{x \in S \mid x \in C\} =$$
$$= \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{x \in S \mid x \in A\} \cup \{x \in S \mid x \in B \vee x \in C\} =$$
$$= \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

Qui l'uguaglianza è ancora più visibile. Dunque:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(|A| + |B|) + |C| = |A| + (|B| + |C|)$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

La somma dunque, gode della proprietà associativa.

Per dimostrare la proprietà dissociativa, dimostriamo prima l'esistenza dell'elemento neutro:

$\exists\ c \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\ a \in \mathbb{N} : a + c = a$

A livello "mentale", ragionando con gli insiemi:

$|A| = a, \quad |C| = c \qquad A, C \in S$

$$A \cup C = A$$
$$C = \emptyset$$
$$\Downarrow$$
$$|C| = 0$$
$$c = 0$$

Dunque

$$0_{\mathbb{N}} = 0$$

Ciò ci può condurre a dimostrare che ogni insieme può essere scritto come unione di due insiemi (il caso limite $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$). Dunque:

$\forall\ a \in \mathbb{N}\ \exists\ b, c \in \mathbb{N}$ t.c. $a = b + c$

Quindi:

$d, e \in \mathbb{N} \quad A, B, C, D, E \in S$ t.c. $|A| = a, |B| = b, |C| = c, |D| = d, |E| = e$

$|A| + |D| = |E| \qquad |B| + |C| + |D| = |E| \qquad |A| + |D| = |B| + |C| + |D|$

$a + d = e \qquad b + c + d = e \qquad a + d = (b + c) + d$

La somma, dunque, gode della proprietà dissociativa.

È interessante notare che:

$\forall a \in \mathbb{N} \nexists b \in \mathbb{N} \ni' a+b=0$

Dunque $(\mathbb{N}, +)$ <u>NON È</u> un gruppo.

STRUTTURE PRINCIPALI

$(A, +, \cdot)$ ANELLO Es. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, $m \geq 2$

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ CAMPO Es. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, p primo

PROPRIETÀ DEI CAMPI

Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo. Allora:

- L'elemento neutro è unico.

Supponiamo che 0 e u siano entrambi elementi neutri di un operazione additiva:

$$0 + u = u \qquad u + 0 = 0 \qquad 0 + u = u + 0 \Leftrightarrow 0 = u$$

Supponiamo che 1 e v siano entrambi elementi neutri di un operazione moltiplicativa:

$$1 \cdot v = v \qquad v \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot v = v \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = v$$

- L'inverso è unico.

$b \in A$

Supponiamo che esistano b^{-1} e $\bar{b}$ t.c. $b^{-1} \cdot b = b \cdot b^{-1} = 1$

$$b \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot b = 1$$

$$b \cdot \bar{b} = 1 \Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot \bar{b} = b^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow (b^{-1} \cdot b)\bar{b} = b^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \bar{b} = b^{-1} \cdot 1$$

$$\bar{b} = b^{-1}$$

PREMESSA

$A^* = \{a \in A \mid \exists\, a^{-1}\}$

A^* è chiuso rispetto al prodotto:

$$a, b \in A^* \Rightarrow a \cdot b \in A^*$$

Dunque $(A^*, \cdot)$ è un gruppo Abeliano.

- $\forall\, a, b \in A^*$: $b^{-1} \cdot a^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$

$$(b^{-1} \cdot a^{-1})(a b) = b^{-1}(a \cdot a^{-1})\, b = b^{-1} \cdot b \cdot 1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$b^{-1} \cdot a^{-1} = (a b)^{-1}$$

- $\forall a: 0 \cdot a = (0+0)a = 0a + 0a$

$$0a + \cancel{0a} = \cancel{0a}$$
$$0 \cdot a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\nexists\ 0^{-1} \Longleftrightarrow 0 \notin K^*$$

In altre termini, non si può dividere per 0 (ossia moltiplicare un numero per l'inverso di 0).

Se 0^{-1} esistesse:

$$0 \cdot 0^{-1} = 1$$

Ma $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \Rightarrow 0 \cdot 0^{-1} = 0$

$$0 \neq 1$$
$$\Downarrow$$
$$\nexists\ 0^{-1}$$

Dunque: $K^{\times} = K^* = K - \{0\}$

- $-a = (-1)a$

Dim.

$$(1 + (-1))a = 0 \cdot a = 0$$
$$(1 + (-1))a = 1 \cdot a + (-1)a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$-a = (-1)a$$

- $ab = 0 \quad \wedge \quad a \neq 0 \Rightarrow b = 0$

Dim. $b = (a \cdot a^{-1})b = (a \cdot b) \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0$

$$b = 0$$

- $\forall a: a^2 \geq 0$

OSSERVAZIONE

$$(-1)^2 = 1$$

Dim. $(1 + (-1))^2 = 1^2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1)^2$

$$0^2 = 0 = \cancel{1} - \cancel{1} - 1 + (-1)^2$$
$$0 = -1 + (-1)^2$$
$$(-1)^2 = 1$$

Dunque:

CASO 1 $\quad a \geq 0$

$$a \cdot a = a^2 \geq 0 \cdot a = 0$$

$$a^2 \geq 0$$

CASO 2 $\quad a < 0 \qquad (-a) > 0 \qquad (-1) \cdot a > 0$

$$(-1)(-1) \cdot a \cdot a \geq 0 \cdot (-1) \cdot a > 0$$

$$(-1)^2 a^2 > 0 \qquad a^2 > 0$$

- $\forall a : \quad a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

$$a \geq 0 \Rightarrow a + (-a) \geq 0 + (-a)$$

$$a - a \geq -a$$

$$0 \geq -a$$

$$-a \leq 0$$

In generale, se $(A, +, \cdot)$ è un anello

$\forall a \in A : \quad 1 + a > a$

Ciò implica che:

$\forall c \in A \qquad a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$

$\forall c \geq 0 \qquad a \geq b \Rightarrow ac \geq bc$

$\mathbb{Z}_m$ ANELLO E $\mathbb{Z}_m$ CAMPO

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ANELLO DEGLI INTERI

$m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2$

Insieme quoziente della relazione di equivalenza "congruenza modulo m":

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

TEOREMA DELLA DIVISIONE EUCLIDEA SU $\mathbb{Z}$

$\forall m \neq 0, \forall a \in \mathbb{Z} \ \exists! \, q \in \mathbb{Z} \wedge \exists! \, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |m| \ni$

$$a = m \cdot q + r$$

Dunque è facile capire, in questo caso, che:

$$[a]_m = [r]_m$$

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\} \qquad |\mathbb{Z}_m| = m$$

Per definizione, inoltre:

$$[a]_m + [b]_m \overset{def}{=} [a+b]_m$$

$$[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$$

Si definisce ora:

$$\mathbb{Z}_m^* = \{[a]_m \mid M.C.D.(a, m) = 1\}$$

Da ciò deriva immediatamente che:

$$\mathbb{Z}_m^* = \mathbb{Z}_m - \{[0]_m\} \iff m = p \text{ primo}$$

In altre parole:

$m = p$ primo $\iff \forall [a]_m, a \neq 0 \ \exists [b]_m, b \neq 0 \ni [a]_m \cdot [b]_m = [1]_m$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo m non è primo, ma $\mathbb{Z}_m$ è un campo.

Dunque: $|m| = p \cdot q$, $0 < p, q < m$

$$[0]_m = [m]_m = [p \cdot q]_m = [p]_m \cdot [q]_m \qquad [p]_m \neq [0]_m, \ [q]_m \neq [0]_m$$

Dunque $\mathbb{Z}_m$ non è un campo poiché in un campo vale che:

$$ab = 0 \quad b \neq 0 \Rightarrow a = 0$$

Ora si supponga m primo.

$\forall a \in \mathbb{Z},\ 0 < a < |m|$:

$$[a]_m \neq [0]_m$$
$$\Downarrow$$
$$m \nmid a$$
$$(a, m) = 1 \qquad a \text{ e } m \text{ sono coprimi}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, s, t \in \mathbb{Z} \ni 1 = as + mt$$
$$\Updownarrow$$
$$as \equiv 1 \pmod m$$
$$\Downarrow$$
$$[1]_m = [a s]_m = [a]_m \cdot [s]_m$$

$[s]_m$ è l'inverso di $[a]_m$ ed esiste $\forall [a]_m$.

Dunque: $\mathbb{Z}_m$ è un campo $\Leftrightarrow$ m è primo, c.v.d.

IL CAMPO DELLE FRAZIONI RAZIONALI

Sia $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ l'anello commutativo dei polinomi razionali a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$.

Ovviamente $(\mathbb{K}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{K}[x], +, \cdot)$. Infatti

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots \quad \forall_{i \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{K}$$

Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_i = 0 \Rightarrow P(x) = a_0$

$$r \overset{def.}{=} \text{grado di } P(x)$$

$$a_0 \neq 0 \iff r = 0$$
$$a_0 = 0 \iff r \overset{def.}{=} -\infty$$

$$\forall a \in \mathbb{K} \ \exists \ P(x) = a \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow (\mathbb{K}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{K}[x], +, \cdot)$$

DIVISIONE CON RESTO SU $\mathbb{K}[x]$

$\forall m(x) \neq 0 : \forall a(x) \in \mathbb{K}[x] \ \exists! \ q(x) \in \mathbb{K}[x] \wedge \exists! \ r(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg r(x) < \deg m(x) \ni' \ a(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x)$

L'analogia è evidente

$$\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{K}[x]/_{m(x)}, \quad m(x) \neq 0$$

$$\mathbb{K}[x]/_{m(x)} = \{ r(x) \mid \deg r(x) < \deg m(x) \}$$

$\left(\mathbb{K}[x]/_{m(x)}, +, \cdot\right)$ è un anello commutativo; è un campo se e solo se $m(x)$ è irriducibile.

$$\mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}[x]/_{m(x)}$$

Così come $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_m$, così anche $\mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}[x]/_{m(x)}$.

E allora:

$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{K}[x] \rightsquigarrow \mathbb{K}[x]/_{m(x)} = \mathbb{Q}[x]$

CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI $\qquad$ CAMPO DELLE FRAZIONI RAZIONALI $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$

IL CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

Sia $\mathbb{Q}[x]$ il CAMPO delle frazioni razionali.

Sia $P(x) = x^2 + 1$ un polinomio $\in \mathbb{Q}[x]$.

Nel campo $\mathbb{Q}$, il polinomio $P(x)$ NON È RIDUCIBILE, in quanto:

$$\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 0 \implies x^2 + 1 > x^2 \geq 0$$

$$x + 1 > x \qquad x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Dunque $\mathbb{Q}[x]/_{x^2+1}$ è un campo. Si tenga a mente (servirà dopo) che in un campo vale che $\forall a \in \mathbb{K} : a^2 \geq 0$.

Dunque:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x]/_{x^2+1} = \left\{ [a + bx] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$\left(\forall a \in \mathbb{Q} \,\exists\, P(x) = a \in \mathbb{Q}[x]/_{x^2+1} \implies \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x]/_{x^2+1} \right)$$

Valutiamo ora tutti quei polinomi che, divisi per $(x^2 + 1)$, danno $r(x) = x$.

$$\forall A(x) \in \mathbb{Q}[x]/_{x^2+1} \ni' P(x) \,|\, (A(x) - x) : A(x) \in [x]$$

Ovviamente: $[x^2 + 1] = [0] \qquad [x] \neq [x^2 + 1]$

$$[x] \neq [0]$$

Ora:

$$P([x]) = ([x])^2 + 1 = [x^2] + 1 = [x^2 + 1] = [0]$$

Dunque x è una radice del polinomio. Per comodità:

Per comodità, $x = i$, $i^2 + 1 = 0 \quad i^2 = -1 < 0$.

Dunque: $[a + bt] = [a] + [b][t] = a + bi$.

Dato che $i^2 < 0$, ho perso l'ordinamento. Dunque questo insieme non è più estendibile secondo l'ordinamento.

Infine, dato che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \implies \left(\mathbb{R}[x]/_{x^2+1}, +, \cdot \right) = \mathbb{C}$ è un campo, il campo dei NUMERI COMPLESSI.

ANCORA SU $\mathbb{Z}_m$ ANELLO E $\mathbb{Z}_n$ CAMPO

Quando operiamo con la relazione di equivalenza "congruenza modulo m", dobbiamo assicurarci che:

$\forall\, b \in \mathbb{Z}\ \exists\, [a] \in \mathbb{Z}_m \ni' b \in [a]$.

Ciò è possibile grazie al fatto che:

$\forall\, m \geq 2,\ \forall\, a \in \mathbb{Z}\ \exists!\, h \in \mathbb{Z}\ \wedge\ \exists!\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < |m| \ni'$

$$a = mh + r$$

Ogni numero, dunque, ha uno e un solo resto r.

Ora:

$$a - r = mq$$
$$\Downarrow$$
$$a \equiv r \pmod m$$
$$\Downarrow$$
$$a \in [r]$$

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

Nel caso particolare in cui R = "congruenza modulo m", le classi di equivalenza dell'insieme quoziente $\mathbb{Z}_m$ prendono il nome di "classi di resto".

Abbiamo già dimostrato che $\mathbb{Z}_m$ è un anello commutativo, e anche che $\mathbb{Z}_m$ è un campo se e solo se m è un numero primo.

Ma in realtà, che cosa succede?

Es. $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Alcune considerazioni:

- $\forall\, [a] \in \mathbb{Z}_3 : [0] + [a] = [a] \quad ([0] = 0_{\mathbb{Z}_3})$;
- $\forall\, [a] \in \mathbb{Z}_3 : [1] \cdot [a] = [a] \quad ([1] = 1_{\mathbb{Z}_3})$;
- $\forall\, [a] \in \mathbb{Z}_3 : [0] \cdot [a] = [0]$;

• $\forall [a] \in \mathbb{Z}_3, [a] \neq [0] \; \exists \; [b] \in \mathbb{Z} \ni [a] \cdot [b] = [b] \cdot [a] = 1$
(evidenziato in rosso i casi).

Dunque $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ è un campo.

Ex. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

Oltre ad alcune considerazioni comuni con $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, in questo caso:

• $\forall [a] \in \mathbb{Z}_4, [a] \neq [0] \ni' MCD(a, 4) = 1 \; \exists \; [b] \in \mathbb{Z}_4 \ni' [a] \cdot [b] = [b] \cdot [a] = [1]$
(evidenziati in rosso)
• $\forall [a] \in \mathbb{Z}_4, [a] \neq [0] \ni MCD(a, 4) \neq 1 \; \nexists \; [b] \in \mathbb{Z}_4 \ni' [a] \cdot [b] = [b] \cdot [a] = [1]$
• $\forall [a] \in \mathbb{Z}_4, [a] \neq [0] \ni' MCD(a, 4) \neq 1 \; \exists \; [b] \in \mathbb{Z}_4, b \neq 0 \ni'$
$[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a] = [0]$ (evidenziato in blu)

Dunque, per opportune $[a], [b] \neq [0]$, si ha che:
$$[a] \cdot [b] = [0]$$
(Si dice che $[a]$ e $[b]$ sono "divisori di 0")

Ma noi sappiamo che:
$$\mathbb{K} \text{ è un campo} \Leftrightarrow [a], [b] \in \mathbb{K}, [b] \neq [0]$$
$$[a] \cdot [b] = [0] \Rightarrow [a] = [0]$$

Dunque $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ non è un campo.

N.B.: per la dimostrazione formale di tutto ciò, vedere le pagine precedenti, paragrafo "$\mathbb{Z}_n$ ANELLO E $\mathbb{Z}_n$ CAMPO".

RIEPILOGO

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ANELLO DEGLI INTERI

Da questo deriviamo:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ CAMPO DEI RAZIONALI

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ANELLO DEI RESTI MODULO m

N.B: $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un campo $\iff$ m è primo

Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora:

$(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ ANELLO DEI POLINOMI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{K}$

Se $\mathbb{K}[x]/m(x)$ è l'insieme quoziente della relazione "divisione per il polinomio $m(x)$, con $\deg m(x) \geq 1$, allora:

$$\mathbb{K}[x]/_{m(x)} = \left\{ [q(x)]_{m(x)} \mid \deg q(x) < \deg m(x) \right\}$$

$\left(\mathbb{K}[x]/_{m(x)}, +, \cdot \right)$ è un campo $\iff$ $m(x)$ non ammette radici $\in \mathbb{K}$, ovvero è irriducibile

Quando si estende $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, la relazione d'ordine viene conservata:

$$\underset{\leq}{(\mathbb{Z}, +, \cdot)} \subseteq \underset{\leq}{(\mathbb{Q}, +, \cdot)}$$

Quindi:

$\frac{a}{b}$, $b > 0$ $\qquad \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

$\qquad \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq 0$

In particolare, se è vero che:

$\forall a \in \mathbb{Q} : a^2 \geq 0$

Allora $P(x) = x^2 + 1$ NON ammette radici $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, perché:

$\forall t \in \mathbb{Q} : t^2 \geq 0 \iff t^2 + 1 > t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 + 1 > 0$

Dunque $\left(\mathbb{Q}[x]/_{x^2+1}, +, \cdot \right)$ è un CAMPO.

Se chiamo $i = [x]_{x^2+1} \Rightarrow i^2 = -1$

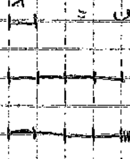
i è una radice di (x^2+1). Ma $i^2 = -1 < 0$, dunque si perde l'ordinamento.

GRANDEZZE INCOMMENSURABILI: $\mathbb{R}$

Due grandezze si dicono commensurabili se e solo se un multiplo della prima coincide con un multiplo della seconda.

Se poi fissiamo un'unità di misura, ovvero una grandezza cui assegniamo il valore 1, la misura di un'altra grandezza è il numero di volte in cui l'unità di misura o un suo sottomultiplo "rientra" nella grandezza di partenza.

Es.



= unità di misura

= 4 u

= 4,5 u

Se prima o poi il processo finisce, ovvero otteniamo l'esatta misura della grandezza, la sua misura si esprime da un numero decimale.

Es. 1,263 = NUMERO DECIMALE $\in \mathbb{Q}$

Se invece non si può ottenere l'esatta misura della grandezza, quest'ultima non termina mai ed è della forma:

$$b = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots \frac{a_k}{10^k} \dots$$

Se all'interno di questa scrittura si crea un "blocco", ossia:

$$b = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots \frac{a_{2k}}{10^{2k}} \dots$$

$$\forall\, i \in 0 \leq i \leq k, \quad a_{nk+i} = a_i$$

Allora il numero si dice periodico.

Es. $1,\overline{34}$ $\quad 2,34\overline{7}$ = NUMERI PERIODICI $\in \mathbb{Q}$

A volte però, la grandezza è incommensurabile con l'unità di misura. Dunque

$$\frac{d}{u} = \frac{d}{1} = d \notin \mathbb{Q} \Rightarrow d \in \mathbb{R}$$

Es. TEOREMA DI PITAGORA

$l^2 + l^2 = 1 + 1 = 2 = d^2$

$d \in \mathbb{Q} \Rightarrow d^2 - 2$ non

ammette radici in $\mathbb{Q}$

$d = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$$
$$\leq \quad \rightarrow \quad \leq \quad \rightarrow \quad \leq$$

Ogni risultato di misurazione è un valore numerico $\in \mathbb{R}$.

Si dice che $\mathbb{R}$ è "completo", dunque gode della:

PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\exists\, d \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A : a \leq d$

Allora: $\exists\, c = \sup A$

$\forall a \in A : a \leq \sup A$

$\exists\, d \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A : a \leq d : d \geq \sup A$

$\Updownarrow$

$\exists\, c \leq \sup A \Leftrightarrow \exists\, a \in A \ni' c \leq a$

Dunque:

$x^2 - 2 = 0$ non ammette radici in $\mathbb{Q}$ — $x^2 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$ ammette radici in $\mathbb{R}$

Dunque $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è stato esteso in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ perdendo un elemento delle radici, ma conservando l'ordinamento ($\leq$).

Ogni polinomio della forma:

$a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad x^n - a = 0$

ammette radici reali

$\mathbb{C}$ E LE OPERAZIONI IN $\mathbb{C}$

Il polinomio (x^2+1), però, continua ad essere irriducibile, dunque non ammette soluzioni reali.

Allora: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/_{x^2+1}$ è un campo.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/_{x^2+1}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists [a] \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R}[x]/_{x^2+1} = \{[a+bt] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$[a+bt] = [a] + [bt] =$$
$$= [a] + [b][t]$$

$$t = i \ni' i^2 = -1$$

$bi = ib$, poiché $\mathbb{R}$ è commutativo

$$\mathbb{C} = \{[a+ib] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Per definizione:

$$0 = 0 + 0 \cdot i$$

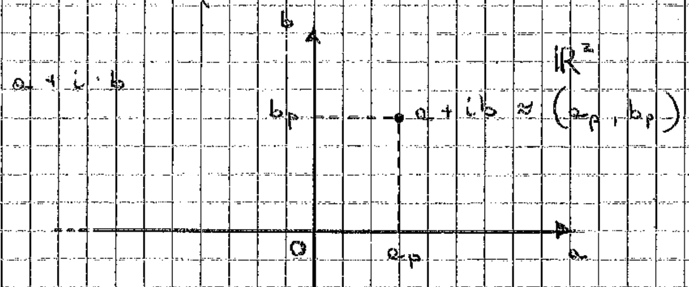
Dato che: $bi = ib$

Allora: $a + bi = a + ib$

Possiamo ora considerare una corrispondenza biunivoca:

$$(a+ib) \approx (a,b), \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

In sostanza, dato un numero complesso, posso collocarlo nel piano cartesiano, mettendolo in corrispondenza biunivoca con il punto $P(a_p, b_p)$.



Questo particolare piano cartesiano prende il nome di "piano di Gauss".

Si noti che $\mathbb{R}$ giace nell'asse delle ascisse:

$$\mathbb{R} = \{a + i\,0 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

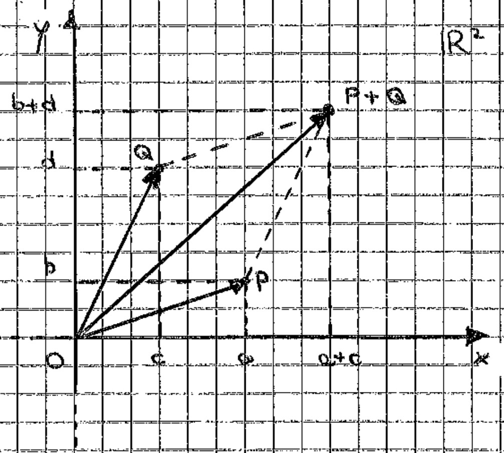
Le operazioni tra numeri complessi sono le seguenti:

$a + i \cdot b$, $c + i \cdot d \in \mathbb{C}$ $\qquad a + i \cdot b \approx (a, b) \qquad c + i \cdot d \approx (c, d)$

- SOMMA: $(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = a + i \cdot b + c + i \cdot d = (a + c) + (b + d) i \approx$
$\approx (a + c, b + d)$

- PRODOTTO: $(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c + i^2 \cdot b \cdot d =$
$= a c + i (a d + b c) - b d = (a c - b d) + i (a d + b c) \approx$
$\approx (a c - b d, a d + b c)$

La rappresentazione grafica della somma di due numeri complessi è relativamente semplice, e fa fede alla "regola del parallelogramma galileiano":



Il prodotto invece, è più complesso da rappresentare. Come funziona?

$(a + i \cdot b) = w$
$(c + i \cdot d) = z$

Innanzitutto, se $d = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

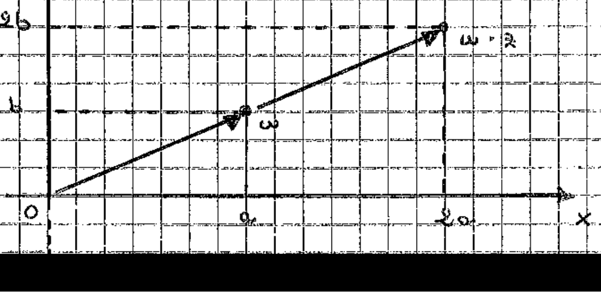
$$w \cdot z = (a + i \cdot b) \cdot c = c \cdot a + i \cdot b \cdot c$$

In particolare, se anche $c = 0 \Rightarrow z = 0$:

$$w \cdot z = 0$$

poiché $\mathbb{C}$ è un campo.

Ex. $w = a + i \cdot b$
$z = 2$



Se i due numeri w e z, invece, sono propriamente complessi (ovvero $w \notin \mathbb{R}$, $z \notin \mathbb{R}$), dobbiamo innanzitutto far ricorso alla CONIUGAZIONE COMPLESSA.

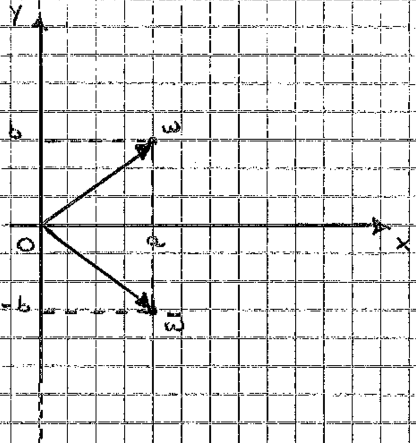
La CONIUGAZIONE COMPLESSA è un'operazione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che associa ad un qualsiasi numero w, della forma:

$$w = a + i \cdot b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

il suo coniugato $\bar{w}$, della forma:

$$\bar{w} = a - i \cdot b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

A LIVELLO GRAFICO



OSSERVAZIONE

$$w \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow b = -b \Rightarrow w = \bar{w}$$
$$w \notin \mathbb{R} \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow b \neq -b \Rightarrow w \neq \bar{w}$$

Un numero reale è tale se e solo se il numero stesso e il suo coniugato coincidono.

Riprendendo il discorso precedente:

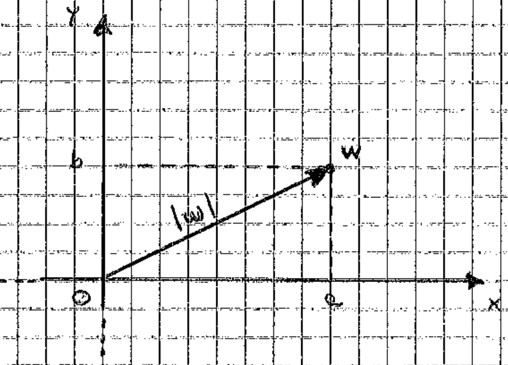
$$w \cdot \bar{w} = (a + i \cdot b)(a - i \cdot b) = a^2 - i^2 \cdot b^2 = a^2 + b^2$$

Dato che $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è un campo avente un ordinamento:

$$\therefore \ w \cdot \bar{w} = a^2 + b^2 \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{w \cdot \bar{w}} = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il modulo di w ($|w|$) esprime l'effettiva distanza tra l'origine e il punto $W(a,b)$ posto in corrispondenza biunivoca con $w = a + i \cdot b$.



OSSERVAZIONE

$$\forall\, w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0 + i \cdot 0\} : w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Dim. $\quad w \cdot \dfrac{\bar{w}}{|w|^2} = \dfrac{|w|^2}{|w|^2} = 1$

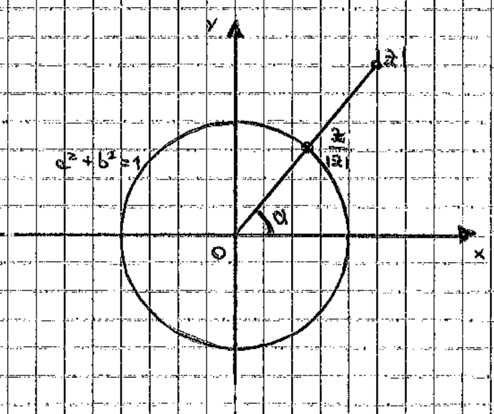
(D'altronde avevamo già posto la relazione $w \cdot \bar{w} = |w|^2$).

Ora, prendendo in esame il secondo fattore z:

$$z = \frac{z}{|z|} \cdot |z|,$$

ma certamente $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$

Se ora poniamo $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |w| = 1$, si crea una situazione di questo tipo:



Notiamo che, presa una conveniente unità di misura, ogni numero complesso $t = a + ib$ può essere scritto nella forma:

$$t = |t| \cdot \frac{t}{|t|}$$

Ma, se θ è l'angolo che il numero complesso t forma con l'asse x, allora:

$$\frac{w}{|w|} \in \text{circ. di eq. } a^2+b^2=1$$

$$\frac{w}{|w|} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{w}{|w|} = (\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ma allora:

$$t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Dunque, ogni numero complesso $c \in \mathbb{C}$, se assumiamo come unità di misura il numero complesso:

$$u = 1 + 0\cdot i = 1 \in \mathbb{R}$$

può essere scritto in due forme:

- FORMA ALGEBRICA: $a + i\cdot b$, $a, b \in \mathbb{R}$
- FORMA TRIGONOMETRICA: $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho = |c| \in \mathbb{R}$

In forma algebrica:

$$w\cdot z = (a+i\cdot b)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$$

In forma trigonometrica:

$$w\cdot z = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|z|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

ove è stata fissata un'unità di misura u t.c. $|u|^2 = a^2+b^2 = 1$, e α e β sono gli angoli formati dai numeri complessi con l'asse x.

Se effettuiamo i calcoli:

$$w\cdot z = |w|\cdot|z|\cdot(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)) =$$
$$= |w|\cdot|z|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

Dunque, se due numeri complessi w e z, il loro prodotto w·z ha distanza dall'origine pari al prodotto delle distanze dall'origine di w e z (se per distanza intendiamo il rapporto con l'unità di misura) e giace sulla retta che forma con l'asse x un angolo φ pari alla somma degli angoli formati dalle rette su cui giacciono i punti w e z con l'asse x.

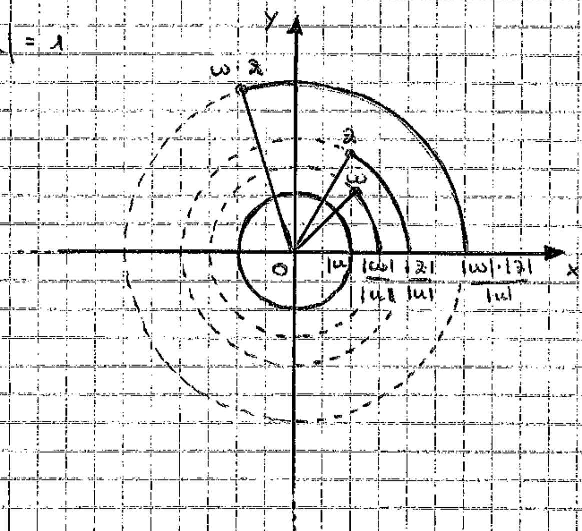
$u = (1 + 0 \cdot i) \Rightarrow |u| = 1$

$\frac{|w|}{|u|} = 1,5$

$\frac{|z|}{|u|} = 2$

$\alpha = 45°$

$\beta = 60°$



Ex. Dimostriamo che:

$$1_{\mathbb{C}} = (1 + 0i)$$

Dim.

Si ponga $|u| = 1$ come unità di misura.

Si ponga $z = a + ib$.

u è della forma $u = (\cos\gamma + i \sin\gamma)$

Allora: $(\cos\gamma + i \sin\gamma)(a + ib) =$

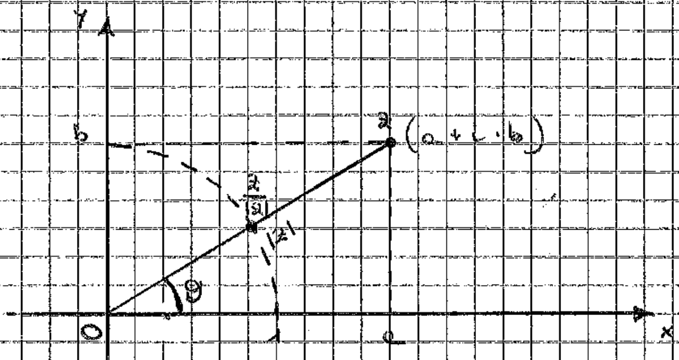
$= a\cos\gamma + ai\sin\gamma + ib\cos\gamma - b\sin\gamma$

$u(1 + 0 \cdot i) = \cos\gamma + i\sin\gamma = u$

$\Downarrow$

$1_{\mathbb{C}} = (1 + 0i)$

POTENZE ENNESIME DI UN NUMERO COMPLESSO



Ogni numero complesso, come sappiamo, può essere espresso in:

- FORMA ALGEBRICA: $z = a + i \cdot b \approx (a, b) \in \mathbb{R}^2$
- FORMA TRIGONOMETRICA: $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, ove $\rho = |z|$.

Inoltre sappiamo che:

$$\left.\begin{array}{l} z = \rho(\cos\vartheta + i \cdot \operatorname{sen}\vartheta) \\ w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot w = \rho \cdot r\left(\cos(\vartheta + \varphi) + i \cdot \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)\right)$$

Come conseguenza immediata:

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n \cdot \vartheta) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \vartheta)\right)$$

RADICI ENNESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Sfruttando quanto precedentemente detto, se:

$$w = \rho\left(\cos\vartheta + i\cdot\sin\vartheta\right),$$

è possibile determinare tutti quegli z_i : $z_i^n = w$.
In primo luogo, se:

$$z_i = r\left(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi\right)$$

Allora:

$$z_i^n = r^n\left(\cos(n\cdot\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi)\right)$$

Dunque:

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\cdot\varphi = \vartheta + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{radici di } w = \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right) \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

A prima vista si potrebbe pensare che, dato che $k\in\mathbb{Z}$ può assumere infiniti valori, allora anche le radici siano infinite.
In realtà non è così, in quanto seno e coseno sono funzioni periodiche, e quindi le soluzioni non sono infinite al variare di $k\in\mathbb{Z}$.
Infatti:

$$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{Z} \qquad \frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} + 2h\pi,\ h\in\mathbb{Z}$$

$$\cancel{\frac{\vartheta}{n}} + \frac{2k_1\pi}{n} = \cancel{\frac{\vartheta}{n}} + \frac{2k_2\pi}{n} + 2h\pi,\ h\in\mathbb{Z}$$

$$2k_1\pi = 2k_2\pi + 2h\pi n,\ h\in\mathbb{Z}$$

$$k_1 = k_2 + hn,\ h\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$n \mid k_1 - k_2$$

$$\Downarrow$$

$$k_1 \equiv k_2 \pmod n$$

Dunque, se $k_1 \equiv k_2 \pmod n$, la radice che si ottiene è la stessa sia per k_1 che per k_2, anche se gli argomenti delle funzioni seno e coseno cambiano.

E allora, dato che:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$$
$$\Downarrow$$
$$|\mathbb{Z}_n| = n$$

Similmente:

$$\text{radici di } w = \left\{ w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2(0)\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\vartheta + 2(0)\pi}{n}\right)\right), \right.$$
$$w_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2(1)\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\vartheta + 2(1)\pi}{n}\right)\right),$$
$$\left. w_2, \dots, w_{n-1} \right\}$$
$$\Downarrow$$
$$|\text{radici di } w| = n$$

Es. $z = 1 = 1(\cos 0° + i \cdot \sin 0°) \approx (1, 0)$

$$\sqrt[4]{1} = \left\{ \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{4}\right) \,\middle|\, k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$
$$= \left\{ \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

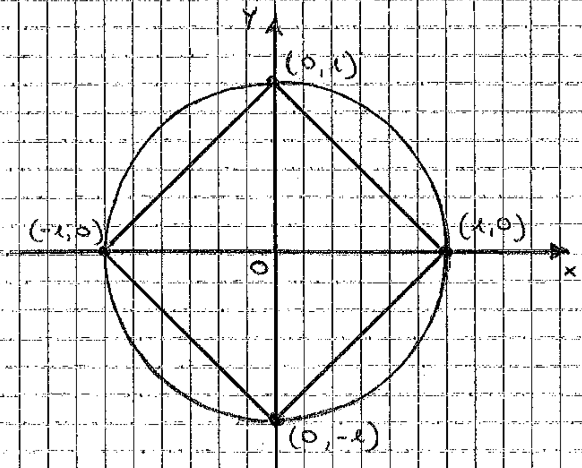
$w_1 = \cos 0° + i \cdot \sin 0° = 1 + 0 \cdot i \approx (1, 0) = 1 \in \mathbb{R}$

$w_2 = \cos 90° + i \cdot \sin 90° = 0 + 1 \cdot i \approx (0, 1) = i \notin \mathbb{R}$

$w_3 = \cos 180° + i \cdot \sin 180° = -1 + 0 \cdot i \approx (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$

$w_4 = \cos 270° + i \cdot \sin 270° = 0 - 1 \cdot i \approx (0, -1) = -i \notin \mathbb{R}$

$$\text{radici di } z = \{1, -1, i, -i\}$$

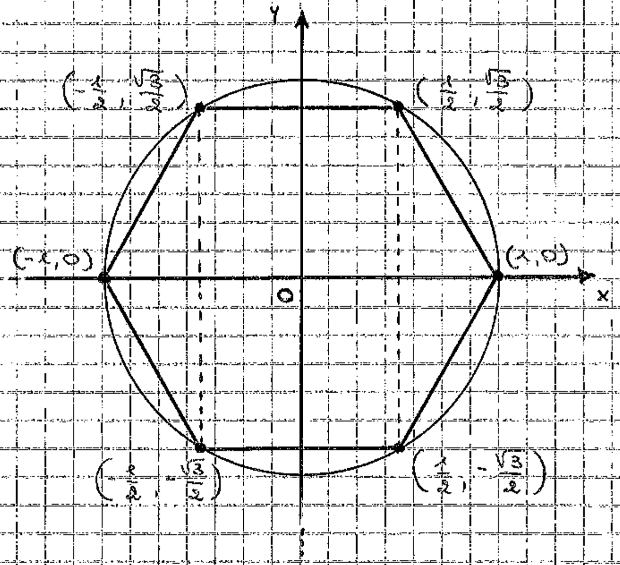


In generale, se si sa una delle radici, basta iscrivere il poligono regolare di n, se n è l'indice della radice (n-esima)

Es. $z = 1 = 1 + 0 \cdot i \approx (1, 0)$

Individuare le radici seste di z.

Sappiamo che una delle radici seste di 1 è 1, ovvero il punto (1, 0) nel piano di Gauss. Allora:



$$\omega_1 = \cos 0° + i \cdot \sin 0° = 1 + i \cdot 0 = 1 \in \mathbb{R} \approx (1, 0)$$
$$\omega_2 = \cos 60° + i \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\omega_3 = \cos 120° + i \cdot \sin 120° = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\omega_4 = \cos 180° + i \cdot \sin 180° = -1 + i \cdot 0 = -1 \in \mathbb{R} \approx (-1, 0)$$
$$\omega_5 = \cos 240° + i \cdot \sin 240° = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\omega_6 = \cos 300° + i \cdot \sin 300° = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

SOMMA E PRODOTTO DI POLINOMI A COEFFICIENTI IN UN CAMPO $\mathbb{K}$

Sia $\mathbb{K}$ un campo.

Un polinomio $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è della forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le m : a_i \in \mathbb{K}$$

Ossia:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le m : a_i \in \mathbb{K}$$

Sia ora $q(x)$ tale che:

$$q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, \forall j \in \mathbb{N}, 0 \le j \le m : b_j \in \mathbb{K}$$

OSSERVAZIONE

Se due polinomi hanno grado differente, posso rendere i gradi uguali aggiungendo i termini mancanti moltiplicati per 0.

Es. $a(x) = 1 + x \quad \deg a(x) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a(x) = 1 + x + 0 \cdot x^2$

$b(x) = 3 - x + x^2 \quad \deg b(x) = 2 \quad \rightsquigarrow \quad b(x) = 3 - x + x^2 \quad \deg a(x) = \deg b(x)$

Supponiamo dunque $m = n$.

$$p(x) = q(x) \iff \forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le m : a_i = b_i$$

Si definisce poi grado di $p(x)$:

$$\deg p(x) \begin{cases} \max \{ i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le m \mid a_i \neq 0 \}, & p(x) \neq 0 \\ -\infty, \ p(x) = 0, & \text{per definizione} \end{cases}$$

Sia ora $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Si definisce SOMMA di due polinomi $p(x)$ e $q(x) \in \mathbb{K}[x]$:

$$+ : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$$
$$(p, q) \mapsto (p + q)$$

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad\qquad q(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \quad\Rightarrow\quad r(x)=p(x)+q(x)\overset{\text{def.}}{=}\sum_{i=0}^{m}(a_i+b_i)\,x^i$$

$(\mathbb{K}[x],+)$ è un gruppo Abeliano?

1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\forall\, p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x] : (p(x)+q(x))+r(x) = p(x)+(q(x)+r(x))$

N.B.: $r(x)=\sum_{i=0}^{m} c_i x^i$

Dim. $(p(x)+q(x))+r(x)=\sum_{i=0}^{m}((a_i+b_i)+c_i)\,x^i$

$p(x)+(q(x)+r(x))=\sum_{i=0}^{m}(a_i+(b_i+c_i))\,x^i$

$\forall\, i\in\mathbb{N}\ 0\le i\le m : a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K} \Rightarrow (a_i+b_i)+c_i = a_i+(b_i+c_i)$

$\Downarrow$

$(p(x)+q(x))+r(x) = p(x)+(q(x)+r(x))$, c.v.d.

2) ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA SOMMA

$\forall\, a\in\mathbb{K} : a+0=a \Rightarrow 0_{\mathbb{K}}=0$

$\Downarrow$

$\forall\, p(x)\in\mathbb{K}[x]\ \exists\, q(x)=0 \ni' \forall\, i\in\mathbb{N},\ 0\le i\le m : a_i+0=a_i$

$\Downarrow$

$\forall\, p(x)\in\mathbb{K}[x]\ \exists\, q(x)=0 \ni' p(x)+q(x)=p(x)$, c.v.d.

$\Downarrow$

$0_{\mathbb{K}[x]} = p(x)=0$

3) ESISTENZA DELL'OPPOSTO

$\forall\, a\in\mathbb{K}\ \exists\, -a\in\mathbb{K} \ni' a+(-a)=0$

$\Downarrow$

$\forall\, p(x)\in\mathbb{K}[x],\ p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\ \exists\, q(x)\in\mathbb{K}[x],\ q(x)=\sum_{i=0}^{m}(-a_i)x^i \ni'$
$p(x)+q(x)=0$, c.v.d.

4) PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$\forall\, a,b\in\mathbb{K} : a+b=b+a$

$\Downarrow$

$\forall\, i\in\mathbb{N},\ 0\le i\le m : a_i+b_i=b_i+a_i \Rightarrow \forall\, p(x), q(x)\in\mathbb{K}[x] : p(x)=q(x)$
c.v.d.

$(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo abeliano.

Si definisce PRODOTTO di due polinomi $p(x)$ e $q(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$\cdot : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$(p, q) \to (p \cdot q)$$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{array}\right\} \Rightarrow s(x) = p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{2m} c_i x^i, \ \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq 2m : c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

$(\mathbb{R}[x], +)$, abbiamo già visto, è un gruppo abeliano.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è un anello commutativo?

1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x] : (p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x))$

Dim. $\forall i, j, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i, j, k \leq m : (a_i \cdot b_j) \cdot c_k = a_i \cdot (b_j \cdot c_k)$

$$\Downarrow$$

$\forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x] : (p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x))$.

c.v.d.

2) ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO

$\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \Rightarrow 1_{\mathbb{R}} = 1$

$$\Downarrow$$

$\forall p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \exists \ q(x) = 1 \ \ni' \ \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq m : a_i \cdot 1 = a_i$

$$\Downarrow$$

$\forall p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \exists \ q(x) = 1 \ \ni' \ p(x) \cdot q(x) = p(x)$. c.v.d.

$$\Downarrow$$

$$1_{\mathbb{R}[x]} = p(x) = 1$$

3) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

$\forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x] : (p(x) + q(x)) \cdot r(x) = (p(x) \cdot r(x)) + (q(x) \cdot r(x))$

Dim. $\forall i, j, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i, j, k \leq \max \deg_{p(x), q(x), r(x)} : a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$\forall i, j, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i, j, k \leq \max \deg_{p(x), q(x), r(x)} : (a_i + b_j) c_k =$
$= a_i \cdot c_k + b_j \cdot c_k \Rightarrow$

$a_i \in$ coeff. $p(x)$
$\Rightarrow \forall\ b_j \in$ coeff. $q(x)$: $(a_i + b_j)\,c_k = (a_i \cdot c_k) + (b_j \cdot c_k)$
$c_k \in$ coeff. $r(x)$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{K}_{[x]} : (p(x) + q(x)) \cdot r(x) = (p(x) \cdot r(x)) + (q(x) \cdot r(x))$$

c.v.d.

Il caso: $\forall\ p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{K}_{[x]} : p(x)\,(q(x) + r(x)) = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$
è similare.

$(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ è un anello commutativo.

OSSERVAZIONE

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg p(x), \deg q(x))$$

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$$ (vero solo se $\mathbb{K}[x]$ è un campo)

$(\mathbb{K}_{[x]}, +, \cdot)$ è un campo?

$\forall\ p(x) \in \mathbb{K}[x] \ \overset{?}{\exists}\ q(x) \in \mathbb{K}[x] \ni' p(x) \cdot q(x) = 1.$

Abbiamo già dimostrato che $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ è un campo se e solo se $p(x)$ è irriducibile; se non lo è, ovvero se:

$$p(x) = q(x) \cdot r(x)$$

si avrebbe $[q(x)] \cdot [r(x)] = [p(x)] = [0]$,

ovvero il fenomeno che è conosciuto come "presenza dei divisori di 0", che certifica che non è un campo quello preso in esame.

Dunque, in genere $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ non è un campo.

TEOREMA DELLA DIVISIONE

Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x] \ni' p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$.

Sia $q(x) \in \mathbb{Z}[x] \ni' q(x) = x - 1$

Allora:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -7x^2 & +8x & -3 & x-1 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 - 5x + 3 \\
& -5x^2 & +8x & -3 & \\
& +5x^2 & -5x & & \\
& & 3x & -3 & \\
& & -3x & +3 & \\
& & r = 0x + 0 & = 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & -5x & +3 & x-1 \\
\cline{4-4}
-2x^2 & +2x & & 2x - 3 \\
& -3x & +3 & \\
& +3x & -3 & \\
\hline
& r = 0x + 0 & = 0 &
\end{array}
$$

$(x-1), (x-1), (2x-3)$ sono polinomi irriducibili.

Dunque:

$$p(x) = (x-1)(2x-3)\,q(x)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = (x-1)(x-1)(2x-3) = (x-1)^2(2x-3)$$

In questo particolare caso, $r = 0$. Allora:

$$q(x) \mid p(x)$$

In genere, il teorema della divisione afferma che:

$\forall\ p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, $q(x) \neq 0$ $\exists!\ s(x) \in \mathbb{K}[x] \wedge \exists!\ r(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg r(x) < \deg q(x) \ni' p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$

Sia ora $p(x)$ un polinomio $\in \mathbb{K}[x]$, e sia $\alpha \in \mathbb{K}$.

Per definizione:

$$\alpha \text{ è radice di } p(x) \iff p(\alpha) = 0$$

Es. $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 8x - 3$ $\quad p(1) = 2 - 7 + 8 - 3 = 0 \Rightarrow 1$ è radice di $p(x)$

TEOREMA DI RUFFINI

Siano $p(x)$ un polinomio $\in \mathbb{K}[x]$ e α un numero $\in \mathbb{K}$.

Il Teorema di Ruffini afferma che:

$$\alpha \text{ è radice di } p(x) \iff x-\alpha \mid p(x)$$

Dim. $\exists\ q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg r(x) < \deg(x-\alpha)$ t.c.

$$p(x) = q(x)(x-\alpha) + r(x)$$

Ora:

$$\deg(x-\alpha) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\deg r(x) = 0 \quad \vee \quad \deg r(x) = -1$$
$$r(x) = K \qquad\qquad r(x) = 0$$

Dunque supponiamo che $r(x) = K$, e dimostriamo che $K=0$.

$$p(x) = q(x)\cdot(x-\alpha) + r(x)$$

Per ipotesi $p(\alpha) = 0$. Dunque:

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha-\alpha) + r(\alpha)$$
$$0 = q(\alpha)\cdot 0 + K$$
$$0 = 0 + K$$
$$K = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Per dimostrare la esimplicazione, per ipotesi $(x-\alpha) \mid p(x)$.

$$(x-\alpha) \mid p(x) \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)\, q(x) \quad q(x) \in \mathbb{K}[x]$$

$$p(\alpha) = (\alpha-\alpha)\, q(\alpha), \ q(\alpha) \in \mathbb{K}[x]$$

$$p(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0$$

Per il Teorema della divisione:

$$p(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ è radice di } p(x), \text{ c.v.d.}$$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, e sia $\alpha \in \mathbb{K}$ una radice di $p(x)$.

Si definisce molteplicità algebrica di α il massimo numero naturale m tale che:

$$(x-\alpha)^m \mid p(x)$$

Equivalentemente:

α è radice di $p(x)$ di molteplicità algebrica m se:

$$\exists\, q(x) \in \mathbb{K}[x],\ q(x) \neq 0 \ \ni'\ p(x) = (x-\alpha)^m q(x) \ \wedge$$

$$\nexists\, q(x) \in \mathbb{K}[x],\ q(x) \neq 0 \ \ni'\ p(x) = (x-\alpha)^{m+1} q(x)$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg p(x) \geq 1$ ammette una radice.

Se $\deg p(x) = m$ e α_1 è radice di $p(x)$:

$$p(x) = (x-\alpha_1)\, q(x) \qquad \deg q(x) = m-1$$

Se $\deg q(x) > 1$ e α_2 è radice di $q(x)$:

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\, r(x), \quad \deg r(x) = m-2$$

Il processo può continuare all'infinito, finché non si presenta un polinomio $h(x) = (x-k)$ di grado 1.

Come immediato corollario, dunque, un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ammette ESATTAMENTE n radici $\in \mathbb{C}$, se $n = \deg p(x)$.

Il campo $\mathbb{C}$, quindi, è algebricamente chiuso.

NOTAZIONE ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Sia U un sottogruppo di $\mathbb{C}^*$, tale che:

$$U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

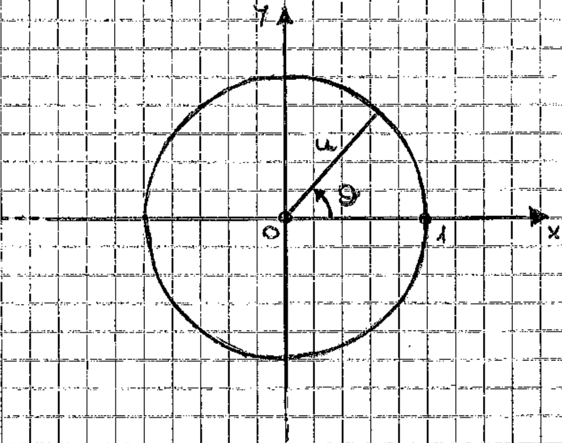
Quest'insieme è chiuso rispetto al prodotto, in quanto:

$$\begin{matrix} \omega \in U \\ z \in U \end{matrix} \Rightarrow |\omega \cdot z| = |\omega||z| = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \omega \cdot z \in U$$

N.B: $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Dunque:

$u \in U$



NOTAZIONE LINEARE

$u = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R} \ni' a^2 + b^2 = 1$

NOTAZIONE TRIGONOMETRICA

$u(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$u = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

NOTAZIONE ESPONENZIALE

$$e^{i\vartheta} \overset{\text{def.}}{=} \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Si noti che:

$$e^{i\vartheta} = e^{i(\vartheta + 2\pi k)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i(\vartheta+\varphi)} = e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi}$$

Sia ora "exp" una relazione così definita:

$$(\mathbb{R}, +) \qquad (U, \cdot)$$

$$\vartheta \xrightarrow{exp} e^{i\vartheta}$$

$$\vartheta \sim \vartheta' \Leftrightarrow exp\,\vartheta = exp\,\vartheta' \Leftrightarrow e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta'} \Leftrightarrow \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \cos\vartheta' + i\sin\vartheta'$$

Allora:

$$\mathbb{R}/_{exp} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$$

Infatti:

$$\vartheta \sim \vartheta' \Leftrightarrow \vartheta = \vartheta' + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

SPAZI VETTORIALI

Sia $\mathbb{K}$ il campo degli scalari.

Uno SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$, detto anche $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, è dato da un insieme $V \neq \emptyset$, munito della seguente struttura:

$$(V, +, \cdot)$$

- SOMMA $(+)$ così definita:

$$+ : V \times V \to V$$

- PRODOTTO PER UNO SCALARE $(\cdot)$ così definito:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \qquad t \cdot v \to tv$$

In particolare, $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

Le proprietà di V sono le seguenti:

- $\forall\, v \in V : 1 \cdot v = v$;
- $\forall\, t, s \in \mathbb{K}, \forall\, v \in V : (t \cdot s) v = t \cdot (s \cdot v)$
(Si noti che il prodotto tra i due scalari è il prodotto definito in $\mathbb{K}$; il prodotto scalare-vettore è il prodotto definito in V);
- $\forall\, t \in \mathbb{K}, \forall\, v, w \in V : t(v + w) = tv + tw$
- $\forall\, t, s \in \mathbb{K}, \forall\, v \in V : (t + s) v = tv + sv$
(Si noti che la somma tra i due scalari è la somma definita in $\mathbb{K}$; la somma tra vettori è quella definita in V)

Un qualunque spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ deve rispettare queste condizioni.

NOTA BENE: È stato definito $t\, v$, ma non $v \cdot t$. È quindi preferibile usare sempre la prima delle due scritture.

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Un'applicazione $f: V \to W$ è detta lineare se:

$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{K}: f(tv) = t f(v)$

(Si noti che in entrambi i casi le operazioni somma e prodotto usate al primo membro sono quelle definite in V; le operazioni somma e prodotto usate al secondo membro sono quelle definite in W).

Siano ora $m, n \in \mathbb{N}$.

Sia ora $V = M(m, n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutte le tabelle con m righe ed n colonne, dove in ogni casella vi è un numero $\in \mathbb{K}$.

Ognuna di queste tabelle prende il nome di "MATRICE $m \cdot n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$".

A LIVELLO GRAFICO

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & & \\ a_{2,1} & \dots & & & \\ \dots & & a_{i,j} & \dots & \\ & & & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{i,j} \in \mathbb{K}$

Siano ora $A, B \in V$.

Definiamo la SOMMA in $M(m, n, \mathbb{K})$:

$$+ : \quad A = (a_{i,j}) \quad + \quad B = (b_{i,j}) \quad = \quad C\,(c_{i,j})$$

$$\forall i, j = c_{i,j} \stackrel{\text{def.}}{=} a_{i,j} + b_{i,j}$$

(Si noti che in quest'ultima definizione, la somma è quella definita in $\mathbb{K}$, dato che $a_{i,j} \wedge b_{i,j} \in \mathbb{K}$).

Definiamo ora il PRODOTTO per uno scalare:

$t \in \mathbb{K}$, $A = (a_{i,j})$: $t \cdot A = (t \cdot a_{i,j})$

(Anche qui il prodotto $(t \cdot a_{i,j})$ è quello definito in $\mathbb{K}$).

Es. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $m = 2$ $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad t = 3$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+1 & 1+0 \\ 0+0 & 0+\frac{1}{2} & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$t \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

NOTA BENE:

Si definisce MATRICE NULLA, ovvero O_V:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & \dots & & & \\ & & \dots & 0 & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \forall i,j : a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}$$

Si definisce MATRICE IDENTITÀ, ovvero I_V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & & \\ & & 0 \dots & 1 & \dots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \forall i,j, \; i \neq j : 0_{\mathbb{K}} \\ \forall i : a_{i,i} = 1_{\mathbb{K}} \end{matrix}$$

NOTAZIONE

$M(m, 1, \mathbb{K})$ si può denotare anche con $\mathbb{K}^m$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ \\ a_{m,1} \end{bmatrix}$$

Ex. $(\mathcal{M}(m,n,\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Dim. Sia $V = \mathcal{M}(m,n,\mathbb{K})$

$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\} : 1 \cdot a_{i,j} = a_{i,j}$

$\forall t, s \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (t \cdot s) v = t (s \cdot v)$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\} : (t \cdot s) a_{i,j} = t(s \cdot a_{i,j})$

$\forall t \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V : t(v + w) = tv + tw$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$:

$$t(a_{i,j} + b_{i,j}) = t \cdot a_{i,j} + t \cdot b_{i,j}$$

$\forall t, s \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (t + s) v = tv + sv$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$

$$(t + s) a_{i,j} = t a_{i,j} + s a_{i,j}$$

Come volevasi dimostrare, $(\mathcal{M}(m,n,\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Ex. Dimostrare che $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, con le operazioni somma e prodotto per scalare così definite:

$\forall A(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k), B(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k)$

- $\forall A(x), B(x) \in \mathbb{K}[x] : A(x) + B(x) \stackrel{def}{=} C(x) = (c_0 + c_1 x + \dots c_k x^k)$,
  $\forall i \in \{1,2,\dots,k\} : a_i + b_i = c_i$
- $\forall t \in \mathbb{K}, \forall A(x) \in \mathbb{K}[x] : t(a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k) \stackrel{def}{=} (t \cdot a_0 + \dots + t a_k x^k)$

è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Dim.

$\forall A(x) \in \mathbb{K}[x] : 1 \cdot A(x) = A(x)$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,k\} : 1 \cdot a_i = a_i$

$\forall t, s \in \mathbb{K}, \forall A(x) \in \mathbb{K}[x] : (t \cdot s) A(x) = t(s \cdot A(x))$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,k\} : (t \cdot s) a_i = t(s \cdot a_i)$

$\forall t \in \mathbb{K}, \forall A(x), B(x) \in \mathbb{K}[x] : t(A(x) + B(x)) = t \cdot A(x) + t \cdot B(x)$

Infatti: $\forall i \in \{1,2,\dots,k\} : t(a_i + b_i) = t a_i + t b_i$

$\forall\, t, s \in \mathbb{K},\ \forall\, A(x) \in \mathbb{K}[x] : (t+s)\,A(x) = t \cdot A(x) + s \cdot A(x)$

Infatti: $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, k\} : (t+s)\,a_i = t \cdot a_i + s \cdot a_i$

Come volevasi dimostrare, $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

A proposito di $\mathbb{K}^n$, esso può essere considerato uno spazio geometrico n-dimensionale, dove ad ogni punto corrisponde una n-upla di numeri $\in \mathbb{K}$. Se $n = 2$, stiamo lavorando sul piano; se $n = 3$ invece, nello spazio. Ma questi sono solo esempi.

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

Sia $\mathbb{K}$ un campo, e sia $X \neq \emptyset$ un insieme.

L'insieme delle funzioni da X a $\mathbb{K}$, che si denota con $\mathbb{K}^X$, è uno spazio vettoriale:

$$V = \mathbb{K}^X = \{ f : X \to \mathbb{K} \}$$

$(V, +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Date due funzioni f e $g \in V$, sono così definite la SOMMA e il PRODOTTO PER SCALARE:

$\forall x \in X : (f+g)(x) \overset{def.}{=} f(x) + g(x)$;

$\forall s \in \mathbb{K}, \forall x \in X : (s \cdot f)(x) \overset{def.}{=} s \cdot f(x)$;

$\forall x \in X : O(x) = 0.$

Sia $\mathbb{K}$ un campo, e sia $X = \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$.

Allora $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_+} = \{$insieme delle successioni a valori in $\mathbb{K}\}$

Le operazioni sono così definite:

- SOMMA: $+ : \mathbb{K}^{\mathbb{N}_+} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}_+} \to \mathbb{N}_+$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m \dots$$
$$+$$
$$[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \dots$$
$$=$$
$$[a_1+b_1 \quad a_2+b_2 \quad \dots \quad a_m+b_m \dots$$

- PRODOTTO PER SCALARE:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}_+} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}_+}$$

$$\alpha \cdot [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m \dots = [\alpha a_1 \quad \alpha a_2 \quad \dots \quad \alpha a_m \dots$$

$(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_+}, +, \cdot, \mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Data una qualsiasi matrice $\in M(m, 1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^m$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Risulta che $X = \{1, 2, 3 \dots m\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq m\}$

Infatti, sia f una funzione $f: X \to \mathbb{K}^m$. È chiaro che il dominio di X sia proprio l'insieme dei naturali tra 1 e m.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^m$ include matrici che possono essere considerate dei polinomi, o meglio delle successioni di elementi di $\mathbb{K}$.

Anche l'insieme $\mathbb{K}[x]$ può essere considerato uno spazio vettoriale, che contiene tutte le successioni a coefficienti in $\mathbb{K}$ definitivamente nulle.
Una successione è definitivamente nulla se:
$\exists\, m \geq 0 : \forall\, a_n,\ n \geq m : a_n = 0$.

$\mathbb{K}[x]$, a sua volta, è un sottoinsieme di $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_+}$, ovvero dell'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{K}$.
Dunque:

$$\mathbb{K}_n[x] \cong \mathbb{K}^{n+1} \subseteq \mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}_+}$$

Come si vedrà più avanti, $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}[x]$ sono dei $\mathbb{K}$-sottospazi vettoriali.

FUNZIONE POLINOMIALE

Sia $\mathbb{K}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$\forall\ p(x) \in \mathbb{K}[x]: \ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ . \ \forall\ i \in \{0, 1, \dots, n\}: a_i \in \mathbb{K}$

$\forall\ a \in \mathbb{K}\ \exists\ p(a) \in \mathbb{K}$

È così definita la FUNZIONE POLINOMIALE:

$$f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$a \to p(a)$$

$p(x) = q(x)$ in $\mathbb{K}[x] \Rightarrow \forall\ a \in \mathbb{K}: p(a) = q(a)$

Il viceversa non vale. Infatti:

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3 \qquad p(x) = 0 \qquad q(x) = x^3 - x$

$p([0]) = [0] \qquad q([0]) = [0]^3 - [0] = [0] - [0] = [0]$

$p([1]) = [0] \qquad q([1]) = [1]^3 - [1] = [1] - [1] = [0]$

$p([2]) = [0] \qquad q([2]) = [2]^3 - [2] = [8] - [2] = [6] = [0]$

Le funzioni polinomiali sono identiche, ma le funzioni sono evidentemente diverse.
Anomalie di questo tipo, però, accadono solo in campi finiti.

ALTRI ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

Se $\mathbb{K}$ è un campo, $\mathbb{K}^n$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1..n\}: a_i \in \mathbb{K}\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se considero il campo $\mathbb{C}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, con le operazioni così definite

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z, w \to z + w$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z, w \to z \cdot w$$

Anche $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, con le operazioni così definite:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z, w \to z + w$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$x, z \to x z \quad , x \in \mathbb{R}$$

Esso però ha una dimensione diversa rispetto a $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$.

Come ultimo esempio, sia X un insieme.
Se solito:

$$\mathbb{K}^X := \{ f : X \to \mathbb{K} \}$$

$\forall f, g : X \to \mathbb{K} : (f+g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$
$\forall f : X \to \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K} : (a \cdot f)(x) \overset{def}{=} a \cdot f(x)$

$\mathbb{K}^X$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Analogamente, sia X un insieme, e V uno spazio vettoriale.
La struttura $(V^X, +, \cdot, V)$, ove:

$$V^X = \{ f : X \to V \}$$

e le operazioni sono così definite:

$$\forall f, g : X \to V : (f+g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V^X \to V^X$$

$$\alpha, f \to \alpha f \qquad ; \quad \alpha f : X \to V$$

$$\forall x \in X : (\alpha f)(x) \overset{def}{=} \alpha \cdot f(x)$$

è un V-spazio vettoriale

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Sia $W \subseteq V$.

$(W, +, \cdot, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale se:

1) $0_V \in W$;
2) W è chiuso rispetto alle operazioni.

Dunque $(W, +, \cdot, \mathbb{K})$, con le operazioni ristrette a W, è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

OMOMORFISMI

Siano V e Z due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Dunque:

$$V^Z = \{ f : Z \to V \}$$

Sia ora $\mathrm{Hom}(Z,V)$ l'insieme delle applicazioni lineari, dette anche OMOMORFISMI, da Z in V:

$$\mathrm{Hom}(Z,V) = \{ f : Z \to V \mid f \text{ è lineare} \}$$

Chiaramente:

$$\mathrm{Hom}(Z,V) \subseteq V^Z$$

Si ricordi che un'applicazione è lineare se e solo se:

$\forall f : Z \to V,\ \forall x_1, x_2 \in Z : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\forall f : Z \to V,\ \forall x \in Z,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

PROPOSIZIONE:

$\mathrm{Hom}(Z,V)$ è un sottospazio di V^Z.

Dim. PUNTO 1: la funzione $0_{V^Z} \in \mathrm{Hom}(Z,V)$, dunque è lineare.

$$\begin{aligned} 0 : Z &\to V \\ z &\to 0_V \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2 \in V: \quad O(x_1 + x_2) = O(x_1) + O(x_2)$

$$0 = 0 + 0 = 0$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V: \quad O(\lambda x) = \lambda \cdot O(x)$

$$0 = 0 \cdot \lambda = 0 \quad \text{OK}$$

PUNTO 2: le funzioni $(f+g)$ ed (λf) sono lineari.

$\forall x_1, x_2 \in V: \quad (f+g)(x_1 + x_2) = (f+g)(x_1) + (f+g)(x_2)$

$$(f+g)(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 + x_2) =$$
$$= f(x_1) + f(x_2) + g(x_1) + g(x_2) =$$
$$= (f+g)(x_1) + (f+g)(x_2).$$

$\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \quad (f+g)(\lambda x) = \lambda (f+g)(x)$

$$(f+g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) =$$
$$= \lambda (f(x) + g(x)) = \lambda (f+g)(x).$$

$\forall x_1, x_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \quad (\lambda f)(x_1 + x_2) = (\lambda f)(x_1) + (\lambda f)(x_2)$

$$(\lambda f)(x_1 + x_2) = \lambda \cdot f(x_1 + x_2) = \lambda \cdot [f(x_1) + f(x_2)] = (\lambda f)(x_1) + (\lambda f)(x_2).$$

$\forall x \in V, \forall \xi \in \mathbb{K}: \quad (\lambda f)(\xi x) = \xi (\lambda f)(x) =$

$$(\lambda f)(\xi x) = \lambda \cdot f(\xi x) = \lambda \cdot \xi \cdot f(x) = \xi (\lambda f)(x).$$

Come volevasi dimostrare, $\mathrm{Hom}(Z, V)$ è un sottospazio vettoriale di V^Z.

NUCLEO E IMMAGINE DI UNA FUNZIONE LINEARE

Siano V e Z due spazi vettoriali, e sia $f: V \to Z$ una funzione lineare.

Si definisce NUCLEO DI F:

$$Ker\ f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

Si definisce invece IMMAGINE DI F:

$$Imm\ f = \{ z \in Z \mid \exists\, v \in V : f(v) = z \}$$

Chiaramente:

$$Ker\ f \subseteq V \quad ; \quad Imm\ f \subseteq Z$$

PROPOSIZIONE

Ker f è un sottospazio vettoriale di V.

Dim.

1) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 \in Ker\ f$$

2) $v_1, v_2 \in Ker\ f$

$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = 0$

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$v_1, v_2 \in Ker\ f \Rightarrow (v_1 + v_2) \in Ker\ f$$

3) $v_1 \in Ker\ f \Rightarrow f(v_1) = 0$

$f(\lambda v_1) = \lambda \cdot f(v_1) = \lambda\ 0 = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{K}$

$$\Downarrow$$

$$v_1 \in Ker\ f \Rightarrow \lambda v_1 \in Ker\ f,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Come volevasi dimostrare, Ker f è un sottospazio vettoriale di V.

PROPOSIZIONE

Imm f è un sottospazio vettoriale di Z.

Dim.

1) 0 è sicuramente l'immagine di $f(0)$, dunque:

$0 \in \operatorname{Imm} f$

2) $z_1, z_2 \in \operatorname{Imm} f \Rightarrow f(w_1) = z_1 \wedge f(v_2) = z_2$

$$z_1 + z_2 = f(w_1) + f(w_2) = f(w_1 + w_2) = z_1 + z_2$$

$$\Downarrow$$

$$(z_1 + z_2) = f(w_1 + w_2) \in \operatorname{Imm} f$$

3) $z \in \operatorname{Imm} f \Rightarrow z = f(v)$

$$\lambda z = \lambda \cdot f(v) = f(\lambda v) = \lambda z$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda z = f(\lambda v) \in \operatorname{Imm} f$$

Come volevasi dimostrare, Imm f è un sottospazio vettoriale di Z.

FUNZIONI LINEARI E INIETTIVE

Siano V e Z due spazi vettoriali, e sia $f \in \mathrm{Hom}(V, Z)$ una funzione lineare.

Si dimostri che:

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$$

Dim.

Innanzitutto, in una funzione lineare $f(0) = 0$. D'altra parte, se la funzione è iniettiva, si ha che:

$$f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

Dunque la tesi, ovvero:

$$\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$$

Al contrario, sia $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$ il nucleo dell'applicazione lineare f. Siano v_1 e v_2 due numeri tali che:

$$f(v_1) = f(v_2)$$

Allora:

$$0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$$

$$0 = f(0)$$

$$\Downarrow$$

$$(v_1 - v_2) \in \mathrm{Ker}\ f$$

$$v_1 - v_2 = 0$$

$$v_1 = v_2$$

La implicazione è dimostrata, come volevasi dimostrare.

ISOMORFISMO

Siano V e Z due spazi vettoriali, e sia f una funzione lineare:

$$f : V \rightarrow Z$$

f si definisce ISOMORFISMO se:

1) è biettiva (quindi implicitamente esiste la funzione inversa f^{-1})

2) f^{-1} è lineare.

$\forall z \in Z \ \exists! \ v \in V \ \ni' f(v) = z$

$\Downarrow$

Definisco la funzione inversa f^{-1} come quella funzione tale che:

$$f^{-1} \circ f = Id_V \iff f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(z) = v$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Z \iff f(f^{-1}(z)) = f(v) = z$$

Dim. $f^{-1}(z_1) = v_1 \quad \wedge \quad f^{-1}(z_2) = v_2$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$f(v_1) = z_1 \qquad f(v_2) = z_2$

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = (z_1 + z_2)$

$\Downarrow$

$f^{-1}(z_1 + z_2) = (v_1 + v_2) = f^{-1}(z_1) + f^{-1}(z_2)$

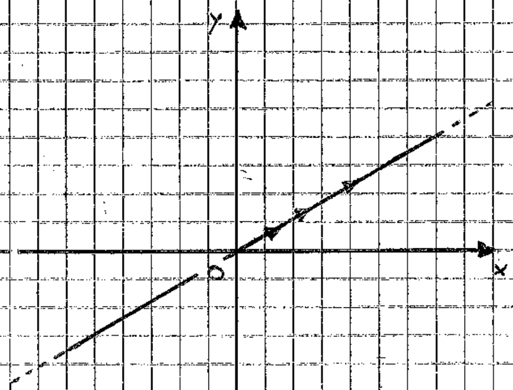
$f^{-1}(z_1 + z_2) = f^{-1}(z_1) + f^{-1}(z_2)$, c.v.d.

ESEMPI DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

Per definizione, dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ e un sottoinsieme $W \subseteq V$, la struttura $(W, +, \cdot, \mathbb{R})$ si definisce SOTTOSPAZIO VETTORIALE se:

- $0_V \in W$;
- W è chiuso rispetto alle operazioni.

L'insieme V stesso e l'insieme $\{0\}$ sono sottospazi vettoriali di V.



Ex. $V = \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale.

Gli unici sottospazi vettoriali sono:

- $\{0\}$;
- tutte le rette passanti per l'origine;
- $\mathbb{R}^2$ stesso.

Ex. $V = \mathbb{R}^3$

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale.

Per le stesse ragioni, gli unici sottospazi vettoriali sono:

- $\{0\}$
- le rette passanti per l'origine;
- i piani contenenti l'origine;
- $\mathbb{R}^3$ stesso.

NOTAZIONI SULLE MATRICI

In genere, $M(m, n, \mathbb{K})$ indica l'insieme delle matrici di m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Se A è una matrice tale che $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, con la notazione:

$$[A]_{i,j} \quad , 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$$

si identifica l'elemento della matrice A di riga i e colonna j.

Es.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad [A]_{3,1} = 3$$

Altre notazioni sono:

- A_i, per indicare la i-esima riga;
- A^j, per indicare la j-esima colonna.

Due matrici A e B sono uguali se in ogni casella vi sono gli stessi coefficienti:

$$A = B \iff \forall\, i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n : [A]_{i,j} = [B]_{i,j}$$

Se scritto con la notazione $M(n, \mathbb{K})$ si intende l'insieme delle MATRICI QUADRATE $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$\begin{bmatrix} \times & & & & & & & \\ & \times & & & & & & \\ & & \times & & & & & \\ & & & \times & & & & \\ & & & & \times & & & \\ & & & & & \times & & \\ & & & & & & \times & \\ & & & & & & & \times \end{bmatrix}$$

Gli elementi contrassegnati, ovvero quelli del tipo:

$$[A]_{i,i} \ , 1 \leq i \leq n$$

costituiscono la DIAGONALE PRINCIPALE della matrice.

Data una matrice quadrata $A \in M(n, \mathbb{K})$, A si dice:

- SIMMETRICA se $\forall\, i,j,\ 1 \le i,j \le n : [A]_{i,j} = [A]_{j,i}$

Ex.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- ANTISIMMETRICA se $\forall\, i,j,\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j : [A]_{i,j} = -[A]_{j,i}$
  $\forall\, i,j,\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j : [A]_{i,j} = 0$

(Il fatto che la diagonale principale debba essere composta di soli 0 rispecchia la proprietà, in quanto 0 è l'unico numero coincidente con il suo opposto)

Ex.
$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- DIAGONALE se $\forall\, i,j,\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j : [A]_{i,j} = 0$

Ex.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- TRIANGOLARE SUPERIORE se $\forall\, i,j \in \mathbb{N},\ i > j : [A]_{i,j} = 0$

Ex.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ & -1 & 4 & 8 & 1 \\ & & 5 & 4 & 4 \\ & 0 & & 8 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Queste tipologie di matrici quadrate sono ognuna un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$. Prima di dimostrarlo, premettiamo che la matrice quadrata nulla, ovvero con tutti i coefficienti nulli, è sia simmetrica, che antisimmetrica, che diagonale, che triangolare superiore. Questa parte verrà dunque omessa nelle quattro dimostrazioni.

DIMOSTRAZIONE 1

$S(n) = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A$ è simmetrica $\}$

$S(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

Dim.

1) $A, B \in S(n)$

$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A+B]_{j,i}$

2) $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in S(n)$

$[\alpha A]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{j,i} = [\alpha A]_{j,i}$

Perciò:

$\forall A, B \in S(n),\ \alpha \in \mathbb{K} : (A+B) \in S(n) \wedge (\alpha A) \in S(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$, c.v.d.

DIMOSTRAZIONE 2

$A(n) = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A$ è antisimmetrica $\}$

$A(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$

Dim.

1) $A, B \in A(n)$

$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} = -[A]_{j,i} - [B]_{j,i} = -[A+B]_{j,i}$

2) $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in A(n)$

$[\alpha A]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{i,j} = \alpha \left(-[A]_{j,i} \right) = -\alpha \cdot [A]_{j,i} = -[\alpha A]_{j,i}$

Perciò:

$\forall A, B \in A(n), \forall \alpha \in \mathbb{K} : (A+B) \in A(n) \wedge (\alpha A) \in A(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$, c.v.d.

DIMOSTRAZIONE 3

$D(n) = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A$ è diagonale $\}$
$D(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

Dim.

1) $A, B \in D(n) \qquad i \neq j$
$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} = 0 + 0 = 0$

2) $A \in D(n)$, $\alpha \in \mathbb{K} \qquad i \neq j$
$[\alpha A]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{i,j} = \alpha \cdot 0 = 0$

Perciò:
$\forall A, B \in D(n), \forall \alpha \in \mathbb{K} : (A+B) \in D(n) \wedge (\alpha A) \in D(n) \Rightarrow$
$\Rightarrow D(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$, c.v.d.

DIMOSTRAZIONE 4

$T(n) = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A$ è triangolare superiore $\}$
$T(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

Dim.

1) $A, B \in T(n) \qquad i > j$
$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} = 0 + 0 = 0$

$A \in T(n)$, $\alpha \in \mathbb{K} \qquad i > j$
$[\alpha A]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{i,j} = \alpha \cdot 0 = 0$

Perciò:

$\forall A, B \in T(n), \forall \alpha \in \mathbb{K} : (A+B) \in T(n) \wedge (\alpha A) \in T(n) \Rightarrow$
$\Rightarrow T(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$, c.v.d.

UN ALTRO SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[x]$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Sia ora $\mathbb{K}_m[x]$:

$$\mathbb{K}_m[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg p(x) \leq m,\ m \in \mathbb{N}\}$$

$\mathbb{K}_m[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.

Dim.

1) Sia $O(x)$ il polinomio nullo, che ha grado -1.

$m \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \leq m\ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow O(x) \in \mathbb{K}_m[x]$.

2) $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}_m[x] : \deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg p(x), \deg q(x))$
$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}_m[x] : \deg(p(x) + q(x)) \leq m \Rightarrow$
$\Rightarrow [p(x) + q(x)] \in \mathbb{K}_m[x]$

3) $\forall p(x) \in \mathbb{K}_m[x], \forall \alpha \in \mathbb{K} : \deg[(\alpha p)(x)] = \deg(p(x)) \leq m \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha p)(x) \in \mathbb{K}_m[x]$

Perciò $\mathbb{K}_m[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$, c.v.d.

ESEMPI DI FUNZIONI LINEARI

1) $0 : V \to W \ \ni' \ \forall x \in V : f(x) = 0$

2) $Id\, V : V \to V \ \ni' \ \forall x \in V : f(x) = x$

Dim. $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = f(x_1) + f(x_2)$

$f(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha \cdot f(x_1)$, c.v.d.

3) Definiamo la funzione "TRACCIA" (Tr):

$$Tr : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$
$$A \to Tr(A)$$

$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad Tr(A) = 8 + 2 = 10$

$Tr(A)$ è una funzione lineare.

Dim.

$\forall A, B \in M(n, \mathbb{K}) : Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} [A+B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} + [B]_{i,i} =$

$= \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,i} = Tr(A) + Tr(B)$

$\forall A \in M(n, \mathbb{K}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : Tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha A]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot [A]_{i,i} =$

$= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} = \alpha\, Tr(A)$, c.v.d.

4) Definiamo la funzione "TRASPOSIZIONE" (T):

$$T : M(p, m, \mathbb{K}) \to M(m, p, \mathbb{K})$$
$$A \longrightarrow A^t$$

ove $\forall i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le p,\ 1 \le j \le m : [A^t]_{j,i} = [A]_{i,j}$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A \in M(3, 2, \mathbb{K})$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A^t \in M(2, 3, \mathbb{K})$

$T(\lambda)$ è una funzione lineare.

Dim. $\forall A, B \in M(p, m, \mathbb{K}) : [(A+B)^t]_{j,i} = [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} =$
$= [A^t]_{j,i} + [B^t]_{j,i} = [A^t + B^t]_{j,i}$

$\forall A \in M(p, m, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K} : [(\alpha A)^t]_{j,i} = [(\alpha A)]_{i,j} = \alpha \cdot [A]_{i,j} =$
$= \alpha \cdot [A^t]_{j,i} = [\alpha \cdot A^t]_{j,i}$, c.v.d.

5) Sia $\mathbb{K}[x]$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, ovvero l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$, e sia $a \in \mathbb{K}$.

Definisco la funzione "VALUTAZIONE" (L_a):

$$L(a) : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$p \longrightarrow p(a)$$

L_a è una funzione lineare.

Dim.

$\forall p, q \in \mathbb{K}[x] \quad (p+q)(a) = p(a) + q(a)$

$$\sum_{i=0}^{3} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i + \sum_{i=0}^{3} \beta_i$$

$\forall p \in \mathbb{K}[x], \forall \alpha \in \mathbb{K} : (\alpha p) a = \alpha (p(a))$

$$\sum_{i=0}^{3} (\alpha \cdot \beta_i) = \sum_{i=0}^{3} \alpha \cdot \beta_i = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{3} \beta_i \text{, c.v.d.}$$

6) Definisco la funzione "DERIVATA" (D):

$$D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$$
$$p \longrightarrow \frac{dp}{dt}$$

D è una funzione lineare. Si ricordi che:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$$

ENDOMORFISMO

Siano V e W due spazi vettoriali, e sia W^V:

$$W^V = \{ f : V \rightarrow W \}$$

Sia ora $Hom(V, W)$:

$$Hom(V, W) = \{ f : V \rightarrow W \mid f \text{ è lineare} \}$$

Se $V = W$:

$$Hom(V, V) = End(V)$$

$End(V)$ si definisce INSIEME DEGLI ENDOMORFISMI di V.

IDENTITÀ E TRASPOSIZIONE

Siano V e W due spazi vettoriali uguali a $M(n, \mathbb{K})$:

$$V = W = M(n, \mathbb{K})$$

Consideriamo le funzioni "IDENTITÀ" e "TRASPOSIZIONE":

$$Id : V \to W \qquad T : V \to W$$
$$Id : M(n) \to M(n) \qquad T : M(n) \to M(n)$$
$$A \to A \qquad A \to A^t$$

Consideriamo ora le funzioni f e g così definite:

$$f : M(n) \to M(n) \qquad g : M(n) \to M(n)$$
$$A \to (Id + T)(A) \qquad A \to (Id - T)(A)$$
$$A \xrightarrow{def.} A + A^t \qquad A \xrightarrow{def.} A - A^t$$

f e g sono funzioni lineari.

Dim. $(Id + T)(A + B) = Id(A + B) + T(A+B) = Id(A) + Id(B) + T(A) + T(B) =$
$(Id + T)(A) + (Id + T)(B)$

$(Id + T)(\lambda A) = Id(\lambda A) + T(\lambda A) = \lambda\, Id(A) + \lambda T(A) =$
$\lambda(Id(A) + T(A)) = \lambda(Id + T)(A)$, c.v.d.

Dim. $(Id - T)(A + B) = Id(A + B) - T(A + B) = Id(A) + Id(B) - T(A) - T(B) =$
$= (Id - T)A + (Id - T)(B)$

$(Id - T)(\lambda A) = Id(\lambda A) - T(\lambda A) = \lambda\, Id(A) - \lambda T(A) =$
$= \lambda(Id(A) - T(A)) = \lambda(Id - T)(A)$, c.v.d.

Analizziamo la funzione $f = Id + T$:

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in M(n) \mid f(A) = 0\} = \{A \in M(n) \mid A + A^t = 0\}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in M(n) \mid A = -A^t\}$$

$$A = -A^t \iff [A]_{i,j} = [-A^t]_{i,j} \iff [A]_{i,j} = -[A]_{j,i} \iff A \in A(n)$$

Dunque:

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in M(n) \mid A \in A(n), \text{ cioè è antisimm.}\}, \text{ c.v.d.}$$

$\mathrm{Imm}\, f = \{ B \in M(n) \mid A + A^t = B \}$

Dimostriamo che $B \in S(n)$, tramite la doppia inclusione. Si faccia caso che la trasposta di una matrice quadrata simmetrica è la matrice stessa.

Dim. $B \in \mathrm{Imm}\, f \Rightarrow B \in S(n)$

$$B \in \mathrm{Imm}\, f \Rightarrow B = A + A^t$$

Si noti che:

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

Dunque $B \in S(n)$.

$$B \in S(n) \Rightarrow B \in \mathrm{Imm}\, f$$

Si noti che:

$$B \in \mathrm{Imm}\, f \Leftrightarrow \exists\, A \in M(n) \text{ t.c. } A + A^t = B$$

Si ponga $A = \frac{1}{2} B$. Se la dimostrazione va a buon fine, abbiamo dimostrato che, se $B \in S(n)$, esiste $A = \frac{1}{2} B$ t.c. $A + A^t = B$, e dunque che $B \in \mathrm{Imm}\, f$.

$$A + A^t = \frac{1}{2} B + \left(\frac{1}{2} B\right)^t = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} (B)^t = \frac{1}{2} (B + B^t)$$

Ma $C \in S(n)$, dunque $C = C^t$:

$$\frac{1}{2}(B + B^t) = \frac{1}{2} \cdot 2B = B, \text{ c.v.d.}$$

Analizzando la funzione $g = \mathrm{Id} - T$:

$$\mathrm{Ker}\, g = \{ A \in M(n) \mid A = A^t \} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, g = S(n)$$

$$\mathrm{Imm}\, g = \{ B \in M(n) \mid B = A - A^t \}$$

Dimostriamo che $B \in A(n)$, tramite la doppia inclusione. Si faccia caso che la trasposta di una matrice quadrata antisimmetrica è l'opposta della matrice stessa.

Dim. $B \in \text{Imm } g \Rightarrow B \in A(n)$

$B \in \text{Imm } g \Rightarrow B = A - A^t$

Si noti che:

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

Dunque $B \in A(n)$.

$B \in A(n) \Rightarrow B \in \text{Imm } g$

$\forall B \in A(n) \; \exists \; A \in M(n) \ni' B = A - A^t$

Si ponga $A = \frac{1}{2} B$. Se la dimostrazione va a buon fine abbiamo dimostrato che, se $B \in A(n)$, esiste $A = \frac{1}{2} B \ni' A - A^t = B$, e dunque che $B \in \text{Imm } g$.

$$A - A^t = \frac{1}{2} B - \left(\frac{1}{2} B\right)^t = \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} (B)^t = \frac{1}{2} (B - B^t)$$

Ma $B \in A(n)$. Dunque $B^t = -B$.

$$\frac{1}{2}(B - B^t) = \frac{1}{2}(B + B) = \frac{1}{2} \cdot 2B = B, \text{ c.v.d.}$$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI LINEARI

Siano V, W, Z dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Siano f e g due funzioni lineari tali che:

$$f : V \to W \qquad g : W \to Z$$

La funzione composta è anch'essa lineare:

$$g \circ f : V \to Z$$
$$x \to g(f(x))$$

Dim.

1) $\forall x, y \in V$:

$$(g \circ f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) =$$
$$= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

2) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$:

$$(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot g(f(x)) =$$
$$= \alpha \cdot (g \circ f)(x)$$

INCLUSIONE TRA NUCLEI

Sia $f: V \to V$ una funzione lineare operante in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Per comodità, la funzione composta:

$$f \circ f$$

si denota con f^2.

Stesso discorso per gli esponenti maggiori di 2. In generale:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ volte}}$$

Si dimostri che:

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$$

Dim.

$\forall x \in \operatorname{Ker} f : f(x) = 0$

$f^2(x) = f(f(x)) = f(0)$

Si ricordi che $f(0) = 0$ per qualsiasi funzione lineare. Dunque:

$$f^2(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in \operatorname{Ker} f : x \in \operatorname{Ker} f^2$$

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$$

In generale:

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \operatorname{Ker} f^3 \dots \operatorname{Ker} f^n \subseteq \operatorname{Ker} f^{n+1} \dots$$

Ex. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione lineare che ad ogni coppia (x, y) associa la coppia di coordinate $(y, 0)$.

$\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, 0) = (0, 0)\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, ovvero l'asse x

$f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, 0) = (0, 0) \Rightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \mathbb{R}^2$

Dunque:

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \quad \text{c.v.d.}$$

$\mathbb{K}$ - ALGEBRA

Siano V, W, Z dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, e siano f e g due funzioni lineari:

$$f : V \to W \qquad g : W \to Z$$

Allora:

$$(f \circ g) : V \to Z$$

è lineare.

Si analizzi ora lo spazio degli endomorfismi di V:

$$Hom(V, V) = End(V)$$

$(End(V), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale chiuso rispetto all'operazione della composizione di funzione $(\circ)$:

$$\circ : End(V) \times End(V) \longrightarrow End(V)$$
$$f, g \longrightarrow f \circ g$$

In particolare, la struttura:

$$(End(V), +, \circ)$$

è un anello, in generale non commutativo, dato che in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

Inoltre:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f, g \in End(V) : \lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$$

La struttura:

$$(End(V), +, \cdot, \circ, \mathbb{K})$$

arricchita di una terza operazione compatibile con le prime due, è chiamata $\mathbb{K}$-ALGEBRA.

Il sottoinsieme degli endomorfismi invertibili prende il nome di "gruppo lineare generale" di V:

$$End(V)^* = GL(V),$$

ove:

$$1_{End(V)^*} = Id_V : V \to V.$$

OMOMORFISMI E MATRICI

Dati due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, si intende scoprire a cosa è uguale l'insieme degli omomorfismi da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

$$\mathbb{K}^n = M(n,1,\mathbb{K}) \qquad X \in \mathbb{K}^n \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; x_i \in \mathbb{K} \;\forall i$$

Ex. $\mathbb{R}^3 = M(3,1,\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \; a,b,c \in \mathbb{R}$$

Sia dunque f un omomorfismo da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X &\longrightarrow f(X) \end{aligned}$$

In $\mathbb{K}^n$ ci sono degli elementi "privilegiati":

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\forall X \in \mathbb{K}^n : X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Sfrutto la linearità di f:

$$f(X) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots x_n f(e_n)$$

Colleziono dunque le informazioni da una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$:

$$m \underbrace{\Big[f(e_1), \; f(e_2) \dots f(e_n) \Big]}_{n} \in M(m,n,\mathbb{K})$$

Data una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, formata dalle colonne $A^1, A^2 \dots A^n$, definisco:

$$\forall X \in \mathbb{K}^n : AX = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots x_n A^n$$

$\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \; \exists A_f \in M(m,n,\mathbb{K}) \ni \forall X \in \mathbb{K}^n$:
$f(X) = A_f \cdot X \in \mathbb{K}^m$ ove $A_f = (f(e_1), f(e_2) \dots f(e_n))$

La cosa si può invertire: data una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, la funzione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ che associa ad X AX è lineare.

Dim.

$A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $X,Y \in \mathbb{K}^n$, $Z \in \mathbb{K}^n$ t.c. $\forall i: x_i + y_i = z_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$

- $AX + AY = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n + y_1 A^1 + y_2 A^2 + \dots + y_n A^n =$
$= (x_1 + y_1) A^1 + (x_2 + y_2) A^2 + \dots (x_n + y_n) A^n =$
$= z_1 A^1 + z_2 A^2 + \dots z_n A^n = AZ = A(X+Y)$

- $A(\lambda X) = (\lambda x_1) A^1 + (\lambda x_2) A^2 + \dots + (\lambda x_n) A^n =$
$= \lambda (x_1 A^1) + \lambda (x_2 A^2) + \dots + \lambda (x_n A^n) =$
$= \lambda (x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n) = \lambda AX$, c.v.d.

In questo modo abbiamo determinato un'identificazione:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \leftrightarrow M(m,n,\mathbb{K})$$
$$f \longrightarrow A_f$$
$$f_A \longleftarrow A$$

Tale identificazione è un ISOMORFISMO tra spazi vettoriali:

$$(\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), +, \cdot) = (M(m,n,\mathbb{K}), +, \cdot)$$

$f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$(f+g)(X) \overset{def.}{=} f(X) + g(X)$; $(\lambda f)(x) \overset{def}{=} \lambda \cdot f(x)$;

$A_{f+g} = (f+g)e_1 + \dots + (f+g)(e_n) = f(e_1) + g(e_1) + \dots f(e_n) + g(e_n) =$
$= (f(e_1) + \dots f(e_n)) + (g(e_1) + g(e_n)) = A_f + A_g$

$A_{\lambda f} = (\lambda f)(e_1) + (\lambda f_2)(e_2) + \dots + (\lambda f)(e_n) = \lambda f(e_1) + \lambda f(e_2) + \lambda f(e_n) =$
$= \lambda (f(e_1) + \dots + f(e_n)) = \lambda A_f$

Si noti che le operazioni sono quelle tra matrici.

Ex. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in M(3,2,\mathbb{Q}) \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

$$A \cdot \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

Sia ora:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) = \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$$

Si ha che il gruppo lineare generale di $\mathbb{K}^n$, ossia $GL(\mathbb{K}^n)$, è composto dalle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ tali che:

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ è invertibile}$$

ovvero:

$\exists\, A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \ni' A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = \mathrm{Id}_n.$

MATRICE COMPOSTA

Si analizzi la seguente situazione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C = BA"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

Che relazione vige tra $C = BA$ e le due matrici A e B?

$$C = C_{e_1} + C_{e_2} + \dots + C_{e_n}$$

Ma: $\forall\, i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n:\ C_{e_i} = B(A_{e_i}) = B A^i$

Dunque:

$$C = \left(B \cdot A^1 + B \cdot A^2 + \dots + B \cdot A^n \right)$$

Sapendo che $B = (B^1, B^2, \dots, B^m)$, si ha che:

$$B \cdot A^i = a_{1,i} B^1 + a_{2,i} B^2 + \dots a_{m,i} B^m, \text{ ove: }$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$$

Scritta in forma compatta:

$$\forall\, i, k \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq m:\ C^i = B \cdot A^i = \sum_{k=1}^{m} a_{k,i} B^k$$

Ex. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{B} \mathbb{Q}^2 \qquad \mathbb{Q}^2 \xrightarrow{C = BA} \mathbb{Q}^2$$

$$A \in M(3, 2, \mathbb{Q}),\quad B \in M(2, 3, \mathbb{Q}),\quad C \in M(2, \mathbb{Q})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = BA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^2)$$

MATRICI E SISTEMI LINEARI

Risolvere un sistema lineare di più equazioni in più incognite non vuol dire altro che ricercare determinati vettori, che moltiplicati per la matrice data danno come risultato una matrice nulla. Quando si ricerchino le soluzioni di un sistema come questo (omogeneo):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$$

Ciò si traduce in questo quesito:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In generale, si deve ricercare il nucleo della matrice A:

$$\operatorname{Ker} A = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0 \}$$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \operatorname{Ker} A = \{ X \in \mathbb{Q}^3 \mid AX = 0 \}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Leggendo "in orizzontale":

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{Q} \right\}$$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \operatorname{Ker} A = \{ X \in \mathbb{Q}^2 \mid AX = 0 \}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Leggendo "in orizzontale":

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{0\}$$

NOTA BENE: quest'applicazione lineare è anche iniettiva.

STUDIO DI NUCLEO E IMMAGINE

Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$$f, g : V \to W \text{ sono lineari } \Rightarrow (f+g) : V \to W \text{ è lineare}$$

Inoltre, valutando i nuclei delle tre funzioni, vale la seguente relazione:

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(f+g)$$

Dim.

$x \in (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f \wedge x \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0 \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f+g)$

In genere il viceversa non vale. Ad esempio:

$V = W = \mathbb{R}$ $\quad f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x \to x \qquad\qquad\qquad x \to -x$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \operatorname{Ker}(0) = \mathbb{R}.$$

Siano V, W, Z dei $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Siano f e g due funzioni lineari: dunque anche $(f \circ g)$ lo è:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Sia ora:

$$\operatorname{Imm}(g \circ f) = \{ z \in Z \mid \exists\, x \in V \text{ t.c. } z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \}$$

Si ha:

$$\operatorname{Imm}(g \circ f) = \operatorname{Imm}\left(g|_{\operatorname{Imm} f} \right)$$

Infatti, sia:

$$g|_{\operatorname{Imm} f} : \operatorname{Imm} f \to Z$$

L'immagine di questa funzione è proprio $\mathrm{Imm}\,(g \circ f)$.

Una relazione interessante è la seguente:

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Imm}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$$

Ex. Siano f e g due funzioni così definite:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (x,0) \qquad\qquad (x,y) \to (0,y)$$

$\mathrm{Ker}\ f = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} =$ asse x

$\mathrm{Ker}\ g = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} =$ asse y

$\mathrm{Imm}\ f = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} =$ asse y

$\mathrm{Imm}\ g = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} =$ asse x

$$\mathrm{Imm}\ f \subseteq \mathrm{Ker}\ g$$

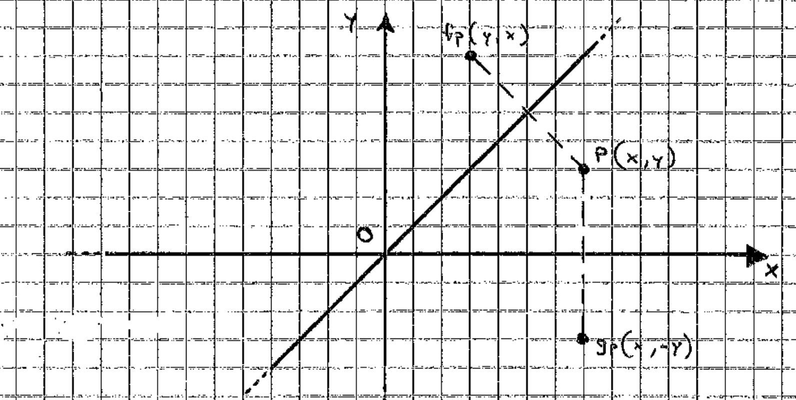
Infatti:

$(f \circ g)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x,0) = (0,0) = 0$, c.v.d.

RIFLESSIONI E ROTAZIONI

Si consideri il piano cartesiano, e si considerino la prima bisettrice e l'asse delle ascisse.

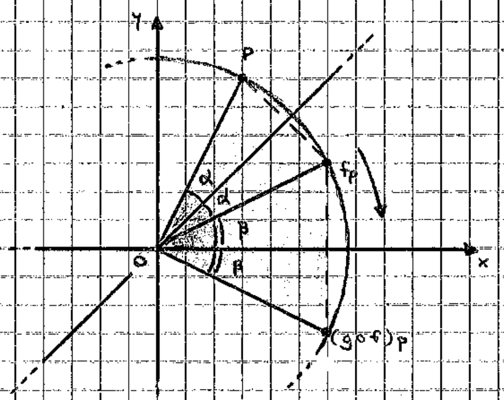
Si considerino ora le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, che associano ad ogni punto del piano il suo simmetrico rispettivamente alla prima bisettrice e all'asse x:



$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (y,x) \qquad\qquad (x,y) \to (x,-y)$$

Dunque:

$$(f \circ g): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(f \circ g)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = g(y,x) = (y,-x)$$



$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2}$$

Questo è un classico esempio, che mostra come la composizione di due riflessioni non sia in generale una riflessione: in questo caso infatti si è ottenuta una rotazione del punto di 90° in senso orario

RIEPILOGO

Si ricordi l'isomorfismo che vige tra gli omomorfismi di due spazi vettoriali $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ e l'insieme delle matrici $m \times n$:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong M(m, n; \mathbb{K})$$

Se A è una matrice di quel gruppo:

$$A = \left[A^1, A^2 \dots A^n \right] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$A = \left\{ (a_{i,j}) \mid a_{i,j} \in \mathbb{K} \ ; \ 1 \leq i \leq m \ ; \ 1 \leq j \leq n \right\}$$

Sia ora $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ una matrice. Allora:

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longrightarrow AX, \text{ ove}$$

$$AX \overset{\text{def.}}{=} x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Dunque, si ha che

$$\forall\, j = 1, \dots, m : y_j = x_1 a_{j,1} + x_2 a_{j,2} + x_n a_{j,n} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{j,i} = A_j X$$

Allora:

$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = \begin{bmatrix} A_1 X \\ \dots \\ A_m X \end{bmatrix}$$

Data questa situazione

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C = BA"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

Si ha che

- $A \in M(m, n, \mathbb{K})$
- $B \in M(s, m, \mathbb{K})$
- $C = BA \in M(s, n, \mathbb{K})$

Dunque:

$$C_{e_j} = (BA)_{e_j} = B(A_{e_j}) = B A^j = (BA)^j = C^j$$

E allora:

$\forall j = 1, \dots, m : C^j = BA^j$

Si noti che:

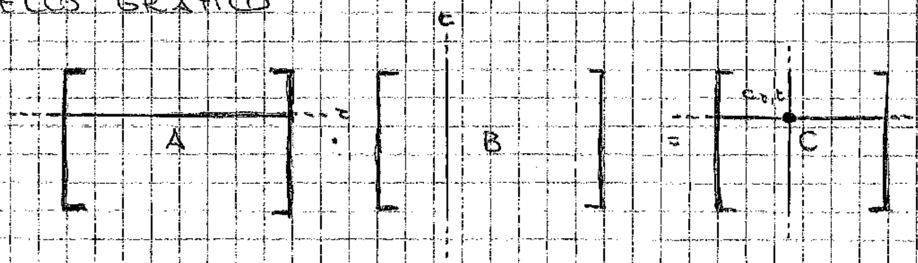
$$C^j = \begin{bmatrix} c_{1,j} \\ c_{2,j} \\ \dots \\ c_{s,j} \end{bmatrix} = B A^j = B \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}$$

In conclusione:

$$B = \{ (b_{r,t}) \mid b_{r,t} \in \mathbb{K} ; 1 \leq r \leq s ; 1 \leq t \leq m \}$$

$$c_{r,j} = \sum_{t=1}^{m} (b_{r,t} \cdot a_{t,j})$$

A LIVELLO GRAFICO



SISTEMI LINEARI OMOGENEI E NON

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, e siano $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ due matrici-colonne. Sia allora:

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longrightarrow AX$$

A questo punto, chiedersi da quali elementi sia composto il nucleo della funzione:

$$\mathrm{Ker}\, f_A = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0 \}$$

equivale a risolvere un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, ove A è la MATRICE DEI COEFFICIENTI, e X è il VETTORE INCOGNITO, contenente una n-upla di soluzioni del sistema.

Sia ora $B \in \mathbb{K}^m$.
Chiedersi se B appartenga o meno all'immagine di f_A equivale a risolvere un sistema lineare in genere non omogeneo:

$$B \in \mathrm{Im}\, f_A \iff \exists\, X \in \mathbb{K}^n \;\text{ t.c. }\; AX = B$$

COMBINAZIONI LINEARI E SPAN(X)

Sia $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V.

Un elemento $v \in V$ si può ottenere come combinazione lineare di elementi di X se e solo se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

Ex. $v \in \mathbb{K}^n$

$A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

v si può scrivere come combinazione lineare di elementi di A:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Allora $v \in \mathrm{Span}(X)$.

Si definisce $\mathrm{Span}(X) \subseteq V$ il sottoinsieme dei vettori $v \in V$ esprimibili come combinazione lineare di vettori di X:

$$\mathrm{Span}(X) = \{ v \in V \mid v = a_1 x_1 + \dots a_n x_n, \; a_i \in \mathbb{K}, \; x_i \in X \}$$

PROPRIETÀ DI SPAN (X)

Ecco alcune delle proprietà di Span(X):

- $X \subseteq \text{Span}(X)$

Dim.

$\forall x \in X : x = 1 \cdot x, 1 \in \mathbb{K}, x \in X$, c.v.d.

- Span(X) è un sottospazio vettoriale di V

Dim.

1) $0 \in \text{Span}(X)$: infatti $\forall x \in X : 0 \cdot x = 0, 0 \in \mathbb{K}, x \in X$

2) Span(X) è chiuso rispetto alle operazioni. Siano $v, w \in \text{Span}(X)$:

$$v = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m, \quad a_j \in \mathbb{K}, \quad x_j \in X$$
$$w = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m, \quad b_j \in \mathbb{K}, \quad x_j \in X$$

Allora:

$$(v + w) = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + b_1 x_1 + \dots b_m x_m =$$
$$= (a_1 + b_1) x_1 + (a_m + b_m) x_m, \quad (a_j + b_j) \in \mathbb{K}, \quad x_j \in X$$

$$(v + w) \in \text{Span}(X)$$

Sia λ uno scalare. Allora:

$$(\lambda v) = \lambda (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m) = \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \dots + \lambda a_m x_m =$$
$$= (\lambda a_1) x_1 + (\lambda a_2) x_2 + \dots + (\lambda a_m) x_m, \quad \lambda a_j \in \mathbb{K}, \quad x_j \in X$$

$$(\lambda v) \in \text{Span}(X), \text{ c.v.d.}$$

- Per ogni W sottospazio di V tale che $X \subseteq W \subseteq \text{Span}(X) \Rightarrow$
$\Rightarrow W = \text{Span}(X)$
(Span(X) è pertanto detto il sottospazio di V generato dall'insieme X)

Per dimostrare che $\text{Span}(X) \subseteq W$, e dunque l'uguaglianza, basta pensare che $X \subseteq W$, e W è chiuso rispetto alle operazioni.

Dunque:

$\forall v \in \text{Span}\, X, v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_m x_m : v \in W$, c.v.d.

- $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$

$V(X) = \{ W \mid W$ è sottospazio di V e $X \subseteq W \}$

$V \in V(X) \Rightarrow V(X) \neq \emptyset$

Allora:

$$\bigcap_{W \in V(X)} W \text{ è un sottospazio vettoriale che contiene } X$$

Dim

1) $\forall\, W \in V(X)$: $0 \in W \Rightarrow 0 \in \bigcap_{W \in V(X)} W$

2) $v, w \in \bigcap_{W \in V(X)} W$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall\, W \in V(X)$: $v, w \in W \Rightarrow \forall\, W \in V(X)$:
$(v + w), (\lambda w) \in W \Rightarrow (v + w), (\lambda v) \in \bigcap_{W \in V(X)} W$

3) $\forall\, W \in V(X)$: $X \subseteq W \Rightarrow X \subseteq \bigcap_{W \in V(X)} W$, c.v.d.

- Più precisamente:

$$\bigcap_{W \in V(X)} W = \operatorname{Span}(X)$$

Per dimostrarlo basti pensare che $\operatorname{Span}(X)$ è un sottospazio vettoriale di V che contiene X, e dunque $\operatorname{Span}(X) \in V(X)$. Allora è evidente che:

$$X \subseteq \bigcap_{W \in V(X)} W \subseteq \operatorname{Span}(X)$$

Ma per una osservazione precedente, se abbiamo questi dati per ipotesi, è vero che:

$$\bigcap_{W \in V(X)} W = \operatorname{Span}(X), \text{ c.v.d.}$$

SPAZI FINITAMENTE GENERATI

Uno spazio vettoriale V si definisce FINITAMENTE GENERATO se esiste un sottoinsieme finito X tale che:

$$V \in Span(X)$$

Si ritornerà a parlare più avanti di spazi finitamente generati.

Ex. $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato. Infatti:

$$\mathbb{K}^n = Span(e_1, e_2 \dots e_n)$$

Ex. $\mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato.

Infatti, per qualsiasi gruppo di polinomi di $\mathbb{K}[x]$, ci è almeno un polinomio di grado maggiore a tutti gli altri:

$$p_1, p_2 \dots p_s \in \mathbb{K}[x]$$

$$\deg j = \deg(p_j) \qquad \max\{\deg j\} = d$$

Un polinomio p esprimibile come combinazione lineare di $p_1, p_2 \dots p_s$ è del tipo:

$$p = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_s p_s \quad , a_i \in \mathbb{K}$$

Dunque:

$$\deg p \leq d$$

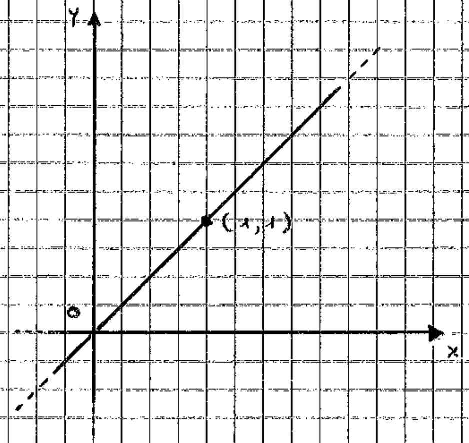
Perciò preso ad esempio il polinomio $q(x) = x^{d+1}$, si ha che:

$$q(x) \notin Span(p_1 \dots p_s)$$

$\mathbb{K}[x]$, dunque, non è finitamente generato.

VALUTAZIONE DELLO SPAN (X)

Ex.



$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$Span(X) = \left\{ v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$Span(X) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Lo Span(X) risulta quindi la prima bisettrice.

Ex. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ex. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a_1 = x_2 \\ x_1 = a_1 + a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = x_2 \\ x_1 - x_2 = a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = x_2 \\ a_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow Span(X) = \mathbb{R}^2$

Ex. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$Span(X) = \mathbb{R}^2$, poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei primi due, difatti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

Sia $X = \{ x_1, x_2 \dots x_m \} \subseteq V$.

I vettori di X sono linearmente indipendenti se:

$$a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0 \;,\; a_j \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; a_1 = \dots = a_m = 0$$

Un solo vettore è linearmente indipendente se non è nullo:

$$X = \{ v \} \;,\; v \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

- I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ non sono linearmente indipendenti. Infatti:

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \,;$$

- I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti;
- I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono linearmente indipendenti. Infatti:

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

SPAZI FINITAMENTE GENERATI E BASI

Uno spazio vettoriale V è finitamente generato se una BASE di V:

$$B = \{v_1, v_2 \dots v_m\}$$

è un sottoinsieme FINITO e ORDINATO, tale che:

1) $V = \mathrm{Span}(B)$;
2) I vettori di B sono linearmente indipendenti.

Alcuni gruppi di vettori generatori linearmente indipendenti, particolarmente noti, vengono definiti BASI CANONICHE o BASI STANDARD.

Ad esempio:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è la BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$;

- $B = \{ e_1, e_2 \dots e_m \}$ è la BASE CANONICA di $\mathbb{K}^m$.

Dato uno spazio V e un insieme X di generatori:

$$X = \{x_1, x_2 \dots x_m\}, \quad x_j \neq 0 \ \forall j \quad ; \quad x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j,$$

un metodo empirico ma efficace per generare una base è il seguente.

Dispongo in fila gli elementi di X, e pongo un cursore tra x_1 e x_2:

$$x_1 \mid x_2 \ x_3 \dots x_m$$

Per ogni elemento successivo al cursore, effettuo una di queste due operazioni:

- x_i è linearmente indipendente con tutti gli elementi precedenti: sposto il cursore a destra dell'elemento;
- x_i non lo è: lo scarto.

Dopo esattamente n passi, avrò questa situazione:

$$x_a \ x_b \dots x_k \mid$$

L'insieme $X_k = \{x_a, x_b \dots x_k\} \subseteq X$ è una base di V:

$$\mathrm{Span}(X_k) = V$$

RIEPILOGO

Il prodotto "righe per colonne" tipico delle matrici è così definito:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

Dati due spazi vettoriali $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^p$, una funzione lineare da $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^p$ è così definita:

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p \qquad X \longrightarrow AX \quad , \quad f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$$

L'applicazione lineare corrisponde ad una matrice $A \in M(p, n, \mathbb{K})$:

$\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p) \ \exists! \ A \in M(p, n, \mathbb{K})$ t.c. $f(X) = AX \ \forall X \in \mathbb{K}^n$

L'applicazione A e l'applicazione f sono dunque la stessa applicazione.

Ex $A \in M(4, 3, \mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^3 \qquad AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x - y + 5z \\ y - z \\ x + 2z \end{bmatrix}, \ AX \in \mathbb{R}^4$$

In generale il prodotto tra matrici si può eseguire in vari modi:

$$AX = \begin{bmatrix} -A_1- \\ \dots \\ -A_p- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 X \\ \dots \\ A_p X \end{bmatrix} = (x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n), \quad AX \in \mathbb{K}^p$$

$$AX \in \mathrm{Span}(A^1, A^2 \dots A^n) \subseteq \mathbb{K}^p$$

$$\mathrm{Imm}\ A \subseteq \mathrm{Span}(A^1, A^2 \dots A^n) = \mathcal{C}(A)$$

ove $\mathcal{C}(A)$ è lo spazio generato dalle colonne di A.

È vero anche che:

$$\mathrm{Imm}\ A \supseteq \lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) = \mathcal{C}(A)$$

Da cui è uguaglianza:

$$\text{Imm } A = \text{Span}(A^1 \ldots A^m) = \mathcal{C}(A)$$

Nel nostro caso:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Imm } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Ae_1 \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Ae_2 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Ae_3$$

Ae_1, Ae_2 e Ae_3 sono vettori generatori di Imm A.
Ne sono una base? Bisogna che siano linearmente indipendenti.
In altre parole:

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 & (1) \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 & (2) \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 & (3) \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Valuto in sequenza le equazioni (3), (1), (2), (4):

$\alpha_2 = \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2 = -2\alpha_3 \Rightarrow -4\alpha_3 - \alpha_3 + 5\alpha_3 = 0$ è un'identità $\Rightarrow$
$\Rightarrow -2\alpha_3 + 2\alpha_3 = 0$ è un'identità

Dunque, dato che:

$$\text{Ker } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

I vettori Ae_1, Ae_2 e Ae_3 non sono linearmente indipendenti.
Dato che $A^3 = 2A - A^2$:

$$\text{Imm } A = \text{Span}(A^1, A^2, A^3) = \text{Span}(A^1, A^2)$$

I vettori A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti: basta notare che non potremo mai ottenere uno dei due vettori mediante una combinazione lineare dell'altro, poiché $\lambda \cdot 0 = 0 \neq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ BASE dell'Imm } A$$

Ritornando alla matrice $A \in M(4, 3, \mathbb{R})$, A è iniettiva?
Lo è se e solo se $\operatorname{Ker} A = \{0\}$:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; AX = 0 \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{BASE di Ker } A \Rightarrow A \text{ non è iniettiva}$$

ESEMPI DI BASI

- $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, ove ogni e_i è della forma:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga}$$

è definita BASE CANONICA di $\mathbb{K}^n$.

- $\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n\} = \text{Span}(x^0, x^1, x^2, \dots, x^n)$

I vettori generatori $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ sono linearmente indipendenti?
Sappiamo già che:

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \iff \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Dunque i vettori generatori sono linearmente indipendenti e costituiscono una base.

- $M(2, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$

$$A \in M(2, \mathbb{K}) \iff A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(2, \mathbb{K}) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Questi vettori generatori sono linearmente indipendenti. Infatti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \iff a = b = c = d = 0$$

Dunque quei vettori, per comodità indicati con $(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$, costituiscono la BASE CANONICA di $M(2, \mathbb{K})$.

- Analogamente, data una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ la base canonica sarà:

$$B = \{ e_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n \}, \text{ ove:}$$

$$\forall e_{i,j} : \; a_{c,d} = 0 \iff c \neq i \lor d \neq j$$
$$a_{c,d} = 1 \iff c = i \land d = j$$

- La base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale è formata dal solo vettore 1, linearmente indipendente perché diverso da 0:

$$\mathbb{C}_{\mathbb{C}} = \text{Span}(1)$$

- La base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$ spazio vettoriale non può essere costituita dal solo vettore 1, poiché non riuscirei a generare $\mathbb{C}$, ma solo $\mathbb{R}$, mediante le sue combinazioni lineari:

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Span}(1) = \mathbb{R}$$

Dunque:

$\exists\, z \in \mathbb{C} \ni' \forall\, \alpha \in \mathbb{R} : z \neq \alpha \cdot 1$

Ricordando che ogni numero complesso è della forma:

$$z = a \cdot 1 + ib \;,\; a, b \in \mathbb{R} \;,\; 1, i \in \mathbb{C}$$

Possiamo affermare che $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale:

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \text{Span}(1, i)$$

Prima di affermare ciò, dovremmo dimostrare che 1 e i sono linearmente indipendenti. La verifica è immediata:

$z = \alpha \cdot 1 + i \cdot \beta \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$z = \alpha + i \cdot \beta$

$z = 0 \implies \alpha = \beta = 0$

- $W = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) = -p(x) \;\forall\, x \in \mathbb{R} \} = \{ a_0 + a_2 x^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R} \}$

$$W = \text{Span}(1, x^2)$$

1) $\forall\, p \in W : p = a_0 \cdot 1 + a_2 x^2 \;,\; a_0, a_2 \in \mathbb{R}$,

2) $p = a_0 \cdot 1 + a_2 x^2 = 0 \implies a_0 = a_2 = 0$.

Dunque $(1, x^2)$ è una base del sottospazio vettoriale W.

ESEMPI DI BASI CON MATRICI QUADRATE

Si prende in considerazione l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$:

$$M(n, \mathbb{K})$$

Più precisamente, consideriamo quattro suoi sottospazi vettoriali:

- $D(n, \mathbb{K})$;
- $S(n, \mathbb{K})$;
- $A(n, \mathbb{K})$;
- $T(n, \mathbb{K})$.

Per ognuno di questi vogliamo determinare una base, e magari determinare la cardinalità della base.

- $$D(n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \dots & & \ddots & 0 \\ & & 0 & a_n \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \dots \right)$$

La base di $D(n, \mathbb{K})$ sarà costituita dunque da n elementi:

$$D(n, \mathbb{K}) = \mathrm{Span}\left(e_{1,1}, e_{2,2}, e_{3,3} \dots\right), \quad |X| = n.$$

- $$S(n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \dots \right)$$

Dunque:

$$S(n, \mathbb{K}) = \mathrm{Span}\left(e_{1,1}, e_{2,1}, \dots\right)$$

La cardinalità di quest'insieme è:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Equivalentemente:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• $A(n,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots \\ -a_2 & 0 & & \\ -a_3 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & & \\ -1 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}, \ldots \right)$

La cardinalità di una qualsiasi base di $A(n,\mathbb{K})$, dunque, è:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Equivalentemente:

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n-2n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

• $T(n,\mathbb{K})$

OSSERVAZIONE

Si può creare una corrispondenza biunivoca tra i vettori di una base di $S(n,\mathbb{K})$ e quelli di $T(n,\mathbb{K})$:

• sulla diagonale: $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ \cdots & & 1 & \cdots \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ \cdots & & 1 & \cdots \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$;

• non sulla diagonale: $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$.

Una qualsiasi base di $T(n,\mathbb{K})$ ha dunque $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi.

Analogamente, se calcoliamo il numero degli elementi di una base delle matrici STRETTAMENTE TRIANGOLARI SUPERIORI $ST(n,\mathbb{K})$ (ovvero con tutti 0 anche sulla diagonale) possiamo creare una corrispondenza biunivoca tra $ST(n,\mathbb{K})$ e $A(n,\mathbb{K})$: il numero degli elementi di una base di $ST(n,\mathbb{K})$ sarà dunque $\frac{n(n-1)}{2}$.

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE, INVERTIBILITÀ E MATRICI NILPOTENTI

Date $A \in M(p, n, \mathbb{K})$ e $B \in M(n, q, \mathbb{K})$, la matrice $C = AB$ sarà tale che:

$$C \in M(p, q, \mathbb{K})$$

Inoltre:

$$C_{i,j} = [AB]_{i,j} = A_i \cdot B^j \stackrel{def}{=} \sum_{h=1}^{n} [A]_{ih} [B]_{hj}$$

Analizziamo ora due matrici $A, B \in M(n, \mathbb{K})$.

In generale si ha che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

La struttura $(M(n, \mathbb{K}), +, \cdot)$, con l'operazione "prodotto righe per colonne", è dunque un anello, in generale NON COMMUTATIVO. Dunque non è un campo:

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

MATRICI DIVISORI DI 0

In particolare, non tutte le matrici sono invertibili. Ad esempio, la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è invertibile in quanto non esistono a, b, c, d tali che:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ad esempio, è impossibile che $0 \cdot b + 0 \cdot d = 1$)

Si analizzi ora la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ si definisce NILPOTENTE se: $\exists\, s \in \mathbb{N}^+$ t.c. $A^s = 0$

SOTTOINSIEMI DI $M(n, \mathbb{K})$ CHIUSI RISPETTO AL PRODOTTO $R \times C$

Dato $M(n, \mathbb{K})$, si ha che:

- $T(n, \mathbb{K})$ è chiuso rispetto al prodotto:

$$A, B \in T(n, \mathbb{K}) \overset{?}{\Rightarrow} \forall\, i, j,\ i > j : [AB]_{ij} = 0$$

- i-esima riga $\Rightarrow$ il primo elemento $\neq 0$ è $[A]_{i,i}$;
- j-esima colonna $\Rightarrow$ il primo elemento $\neq 0$ è $[B]_{j+1,j}$.

$i > j \Rightarrow i \geq j+1 \Rightarrow$ prima che gli elementi della i-esima riga diventino $\neq 0$, quelli della j-esima colonna diventano $= 0$. Al più questo accade nello stesso momento.

Dunque:

$$\sum_{h=1}^{n} [A]_{ih} [B]_{hj} = \sum_{h=1}^{i-1} [A]_{ih} [B]_{hj} + \sum_{h=i}^{n} [A]_{ih} [B]_{hj} = 0 + 0 = 0, \text{ c.v.d.}$$

- $S(n, \mathbb{K})$ non è chiuso rispetto al prodotto:

CONTROESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 30 \\ 30 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 & \underline{54} \\ \underline{56} & 122 \end{bmatrix} \notin S(n, \mathbb{K})$$

- $A(n, \mathbb{K})$ non è chiuso rispetto al prodotto:

CONTROESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{-2} & 0 \\ 0 & \underline{-2} \end{bmatrix} \notin A(n, \mathbb{K})$$

- $D(n, \mathbb{K})$ è chiuso rispetto al prodotto:

$$A, B \in D(n, \mathbb{K}) \overset{?}{\Rightarrow} \forall\, i, j,\ i \neq j : [AB]_{ij} = 0$$

- i-esima riga $\Rightarrow$ l'unico elemento diverso da 0 è $[A]_{i,i}$;
- j-esima colonna $\Rightarrow$ l'unico elemento diverso da 0 è $[B]_{j,j}$.

Supponiamo $i \neq j$:

$$[AB]_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} [A]_{i,h} [B]_{hj} = \sum_{h=1}^{i-1} [A]_{ih} [B]_{hj} + [A]_{i,i} [B]_{i,j} + \sum_{h=i+1}^{n} [A]_{ih} [B]_{hj} =$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0, \text{ c.v.d.}$$

MATRICI TRASPOSTE, TRACCE E ALTRO ANCORA

Si analizzi la trasposizione in $M(n,\mathbb{K})$:

$$t : M(n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto A^t$$

Allora $(AB)^t = B^t A^t$.

Dim.

$\forall i,j : \left[(AB)^t\right]_{i,j} = [AB]_{ji} = \sum_{h=1}^{n} [A]_{jh} [B]_{hi} = \sum_{?}^{?} [A^t]_{hj} [B^t]_{ih}$

Il prodotto righe per colonne è definito in questa maniera:

$$\sum_{h=1}^{n} [A]_{ij} [B]_{jh}$$

Dunque:

$$\sum_{?}^{?} [A^t]_{hj} [B^t]_{ih} = \sum_{h=1}^{n} [B^t]_{ih} [A^t]_{hj} = [B^t A^t]_{ij}, \text{ c.v.d.}$$

Siano $A, B \in S(n,\mathbb{K})$. Allora:

$$AB = BA \iff AB \in S(n,\mathbb{K})$$

Dim.

$(AB) \in S(n,\mathbb{K}) \implies (AB)^t = AB$

Per quanto detto sopra: $(AB)^t = B^t A^t$

$A, B \in S(n,\mathbb{K}) \implies B^t A^t = BA$

Unendo tutto:

$$A, B, AB \in S(n,\mathbb{K}) \iff (AB)^t = AB = B^t A^t = BA \iff AB = BA, \text{ c.v.d.}$$

Siano $A, B \in M(n,\mathbb{K})$.

Allora $tr(AB) = tr(BA)$.

Dim.

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} [B]_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [B]_{ji} [A]_{ij} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} [BA]_{j,j} = tr(BA), \text{ c.v.d.}$$

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, e sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme FINITO e ORDINATO:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m\},$$

I vettori di X non sono linearmente indipendenti

$$\Updownarrow$$

$\exists\ 1 \leq r \leq m \ \ni'\ x_r = a_1 x_1 + \dots + a_{r-1} x_{r-1}$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per ipotesi:

$\exists\ a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0 \ \ni'\ \exists\ a_j,\ 1 \leq j \leq m \ \ni'\ a_j \neq 0.$

Sia $r = \{\max j \ \ni'\ a_j \neq 0\}$. Chiaramente $1 \leq r \leq m$.

Allora:

$$a_1 x_1 + \dots + a_{r-1} x_{r-1} + a_r x_r = 0 \ , \ a_r \neq 0$$

$$(a_r^{-1} \cdot a_1) x_1 + \dots + (a_r^{-1} \cdot a_{r-1}) x_{r-1} + x_r = 0$$

$$(a_r^{-1} \cdot a_1) x_1 + \dots + (a_r^{-1} \cdot a_{r-1}) x_{r-1} = -x_r$$

$$x_r = -(a_r^{-1} \cdot a_1) x_1 - \dots - (a_r^{-1} \cdot a_{r-1}) x_{r-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\ r \in \mathbb{N},\ 1 \leq r \leq m \ \ni'\ x_r = a_1 x_1 + \dots + a_{r-1} x_{r-1},\ \text{c.v.d.}$$

Dimostriamo la seconda implicazione. Per ipotesi:

$\exists\ 1 \leq r \leq m \ \ni'\ x_r = a_1 x_1 + \dots + a_{r-1} x_{r-1}$

Allora:

$$a_1 x_1 + \dots + a_{r-1} x_{r-1} + a_r x_r = 0 \ , \ a_r = 1 \neq 0$$

I vettori non sono dunque linearmente indipendenti, c.v.d.

ALGORITMO DI ESTRAZIONE DI UNA BASE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, e sia $X \subseteq V$ un insieme ordinato e finito capace di generare V:

$$V = \text{Span}(\{x_1, x_2 \dots x_n\}) = \text{Span}(X)$$

Se tra gli elementi di X ce n'è qualcuno nullo, esso è ottenibile chiaramente come combinazione lineare degli altri. Dato che si vuole determinare una base di V, eliminiamo subito gli eventuali vettori nulli.

Supponiamo quindi che $\forall j : x_j \neq 0$.

Eseguo quindi un algoritmo, iterando il processo per un numero finito di volte.

Introduco dunque un cursore. La situazione iniziale è la seguente:

$$(x_1 \mid x_2 \dots x_n)$$

All'inizio di ogni passo, il mio gruppo è costantemente diviso in una parte sinistra, composta da vettori selezionati, e da una parte destra, composta da vettori su cui l'algoritmo deve ancora avvenire:

$$(S \mid D)$$

All'inizio dell'n-esimo passo, la situazione è questa:

$$(S_{n-1} \mid D_{n-1})$$

Considero l'elemento di D_{n-1} più vicino al cursore (ad esempio, nel caso $(x_1\ x_2 \mid x_3 \dots x_n)$ considero x_3), lo denoto ad esempio con t, e mi chiedo se t è esprimibile come combinazione lineare di vettori di S_{n-1}.

- SI: lo scarto. La nuova situazione sarà questa:

$$(S_n = S_{n-1} \mid \cancel{x} \dots x_n) \Leftrightarrow (S_{n-1} \mid D_{n-1} \setminus \{t\})$$

- NO: lo pongo a sinistra del cursore. Ecco la nuova situazione:

$$(S_{n-1} \cup \{t\} \mid D_{n-1} \setminus \{t\})$$

In particolare, si noti come la cardinalità dell'insieme può solo diminuire, ma non aumentare.

Mi fermo quando $D_x = \phi$.

Dunque:

INPUT $\qquad\qquad$ OUTPUT

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \rightsquigarrow [S_x]$$

$$[S_x] \equiv (x_1, x_2 \dots x_m)$$

TEOREMA

$[S_x]$ è una BASE di V. Ovvero:

- $\mathrm{Span}([S_x]) = V$;
- $\{x_1\ x_2 \dots x_m\}$ sono linearmente indipendenti.

Dim.

1) $\mathrm{Span}([S_x]) = V$

1) CASO INIZIALE

Il caso iniziale $[S_{x_0}]$, ovvero:

$$(|x_1\ x_2 \dots x_m)$$

genera V per ipotesi. OK

2) PASSO INDUTTIVO

$S_{x_{m-1}} = (S_{m-1} \mid D_{m-1})$ genera V $\Rightarrow S_{x_m} = (S_m \mid D_m)$ genera V

All'ennesimo passo:

- x_m è esprimibile come combinazione lineare dei precedenti: lo elimino ma V è comunque generato dai vettori restanti;
- x_m non lo è: allora

$$(S_{m-1} \cup \{x_m\} \mid D_{m-1} \setminus \{x_m\})$$

$$\Downarrow$$

$$S_{x_m} = S_{x_{m-1}}$$

2) $\{x_1\ x_2 \dots x_m\}$ sono linearmente indipendenti. Per l'algoritmo usato, questi vettori sono automaticamente linearmente indipendenti (altrimenti sarebbero stati eliminati), c.v.d.

ALGORITMO DI ESTENSIONE AD UNA BASE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, sia X un insieme capace di generare V e sia Z un insieme di vettori linearmente indipendenti:

$$V = \mathrm{Span}(X) \qquad X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$$
$$Z \subseteq V \qquad Z = \{z_1, z_2 \dots z_p\} \text{ lin. ind.}$$

Per estendere Z ad una base di V, innanzitutto unisco i due insiemi:

$$\{z_1, z_2 \dots z_p, x_1, x_2 \dots x_n\}$$

L'insieme X da solo genera V, dunque sicuramente anche $(Z \cup X)$ genera V:

$$\mathrm{Span}(Z \cup X) = \mathrm{Span}(X)$$

A questo punto applico l'algoritmo di estrazione, che mi darà come risultato una BASE $[S_x]$:

$$\{z_1, z_2 \dots z_p, x_1 \dots x_n\} \rightsquigarrow [S_x]$$

In realtà, dato che i vettori di Z sono linearmente indipendenti, in maniera informale si può affermare che il vero algoritmo comincia solo con x_1. Tradotto in maniera più formale, ciò equivale a dire che si è sempre certi che:

$$Z \subseteq [S_x]$$

OSSERVAZIONI SULLE BASI

TEOREMA

Sia $V = \text{Span}(X)$, con $X = \{x_1, x_2 \dots x_m\}$.
Sia Z un sottoinsieme di V di vettori linearmente indipendenti:

$$Z = \{z_1\ z_2 \dots z_t\}$$

Allora $t \leq m$.

Dim.
Dato l'insieme "generatore":

$$(x_1\ x_2 \dots x_m),$$

eseguo un algoritmo di estrazione un po' diverso. Ogni volta aggiungo (all'inizio della stringa) un elemento di Z:

$$(z_1\ x_1\ x_2 \dots x_m)$$

A questo punto applico l'algoritmo di estrazione, arrestando però il processo al primo elemento non linearmente indipendente con i precedenti. Per ipotesi, questo sarà sempre un elemento di X:

$$(z_1\ x_1\ x_2 \dots \cancel{x_i} \dots x_m)$$

Iterando più volte il processo, ad ogni elemento di Z che aggiungo vi è un elemento di X che elimino: la cardinalità dell'insieme rimane dunque costante, e precisamente m.
L'algoritmo si arresta in due casi:

- terminano gli elementi di Z. La situazione dunque è una di queste due:

$$\{z_t\ z_{t-1} \dots z_1\ x_k \dots x_m\}$$
$$\{z_t\ z_{t-1} \dots z_2\ z_1\}$$

La cardinalità dell'insieme è in ogni caso maggiore o uguale della cardinalità degli elementi di Z:

$$t \leq m;$$

- terminano gli elementi di X prima di quelli di Z. L'insieme è quindi del tipo:

$$\{z_k\ z_{k-1} \dots z_2\ z_1\} \qquad k < t$$

In realtà ciò non può avvenire, poiché questo insieme non genera V (e dunque è contro le ipotesi): infatti il vettore $z_{k+1} \in Z$, per ipotesi, non può essere espresso come combinazione lineare di

$$\{z_k \; z_{k-1} \dots z_2 \; z_1\}$$

Quindi $t \leq n$, come volevasi dimostrare.

COROLLARIO

Se X e Y sono entrambe basi di V:

$$X = \{x_1 \; x_2 \dots x_k\} \text{ lin. ind.} \quad V = \mathrm{Span}(X)$$
$$Y = \{y_1 \; y_2 \dots y_h\} \text{ lin. ind.} \quad V = \mathrm{Span}(Y)$$

Allora $|X| = |Y|$, cioè $k = h$.

Dim.

X e Y generano e sono linearmente indipendenti. Perciò:

- X generatore, Y linearmente indipendente $\Rightarrow h \leq k$
- Y generatore, X linearmente indipendente $\Rightarrow k \leq h$

Dunque $h = k$, c.v.d.

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dato uno spazio V finitamente generato, si definisce DIMENSIONE di V:

$$\dim V = \# \{ \text{una base di } V \}$$

In maniera equivalente:

$$\dim V = n \iff X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},\ |X| = n \text{ è una BASE}$$

Sappiamo che esistono più basi per un unico spazio vettoriale, ma la cardinalità di tutte loro è la stessa. La cardinalità delle basi dipende infatti dallo spazio vettoriale, ed è univocamente determinata.

Alcuni esempi:

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = 1$
- $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$
- $\dim M(m, n, \mathbb{K}) = mn$
- $\dim D(n, \mathbb{K}) = n$
- $\dim S(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\dim A(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\dim T(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\dim ST(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\dim \mathbb{K}_n[x] = n+1$

VETTORI E COORDINATE

LEMMA

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, e sia:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

una base di V.

Allora ogni vettore v appartenente a V si scrive, ed in modo unico, come combinazione lineare degli elementi di X:

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

Dim.

Per ogni vettore $v \in V$, certamente almeno una scrittura esiste, poiché $V = Span(X)$, e dunque $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ generano V.

Questa scrittura è unica. Supponiamo che ve ne siano due DISTINTE:

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$v = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

$\exists\ 1 \le i \le n \ \ni'\ a_i \neq b_i \Rightarrow \exists\ 1 \le i \le n \ \ni'\ (a_i - b_i) \neq 0$

Effettuando la sottrazione membro a membro, otterrei una combinazione di 0 con qualche coefficiente non nullo:

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + \dots + (a_n - b_n)x_n$$

Ciò è contro l'ipotesi. La scrittura esiste ed è unica, quindi, c.v.d.

Data una combinazione lineare di una base di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, questi rappresentano le coordinate di un vettore v rispetto alla base X. Attenzione a non confondere i concetti di vettore e coordinate: le seconde, a differenza del primo, dipendono dalla base scelta, che (come sappiamo) non è unica.

Ex. $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [v]_X \qquad X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

MATRICI STRETTAMENTE TRIANGOLARI

Le matrici $A \in T(n, \mathbb{K})$ tali che $\forall\, i \geq j : [A]_{ij} = 0$ si chiamano STRETTAMENTE TRIANGOLARI SUPERIORI.

In altre parole, le matrici triangolari superiori lo sono in modo stretto se e solo se i coefficienti sulla diagonale sono tutti nulli.

Siano $A, B \in ST(n, \mathbb{K})$. Allora $\forall\, 1 \leq i \leq n-1 : [AB]_{i,i+1} = 0$.

A LIVELLO GRAFICO

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dim.

- i-esima riga: il primo elemento eventualmente non nullo è $[A]_{i,i+1}$;
- $(i+1)$-esima colonna: il primo elemento uguale di sicuro a 0 è $[B]_{i+1,i+1}$

$$[AB]_{i\,i+1} = \sum_{h=1}^{n} [A]_{ih} [B]_{h,i+1} = \sum_{h=1}^{i} [A]_{i,h} [B]_{h,i+1} + \sum_{h=i+1}^{n} [A]_{ih} [B]_{h,i+1} = 0 + 0 = 0,$$

c.v.d.

Si noti che, preso $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in ST(3, \mathbb{R})$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

In generale, ogni $A \in ST(n, \mathbb{K})$ è NILPOTENTE, con INDICE DI NILPOTENZA uguale al più n.

INCLUSIONE TRA NUCLEI

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice quadrata.
Sappiamo che:

$$\ker A \subseteq \ker A^2 \subseteq \ker A^3 \subseteq \dots \subseteq \ker A^m = \ker A^{m+1} = \ker A^{m+2} \dots$$

Da quando si ha la prima effettiva uguaglianza, le altre sono tutte uguaglianze.

Più in generale, data

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^i = \ker f^{i+1} \subseteq \ker f^{i+2} \dots$$

risulta che $\ker f^{i+1} = \ker f^{i+2}$, e più in generale che $\ker f^i = \ker f^{i+q}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

Dim. 1) CASO INIZIALE

$q = 1$ $\qquad \ker f^i = \ker f^{i+1}$, vero per ipotesi OK

2) PASSO INDUTTIVO

$q \Rightarrow q+1$

La relazione $\ker f^{i+q} \subseteq \ker f^{i+q+1}$ ci è garantita dall'ipotesi. Ci resta da dimostrare che:

$$\ker f^{i+q+1} \subseteq \ker f^{i+q},$$

supponendo vero che $\ker f^{i+q-1} = \ker f^{i+q}$.
Dunque:

$$x \in \ker f^{i+q+1} \Rightarrow f^{i+q+1}(x) = 0$$
$$(f^{i+q} \circ f)(x) = 0$$
$$f^{i+q}(f(x)) = 0$$

$$f(x) \in \ker f^{i+q} = \ker f^{i+q-1}$$

$$f^{i+q-1}(f(x)) = 0$$
$$f^{i+q}(x) = 0$$
$$x \in \ker f^{i+q}$$

$$\ker f^{i+q+1} \subseteq \ker f^{i+q}$$

$$\ker f^{i+q} = \ker f^{i+q+1}, \text{ c.v.d.}$$

SPAZI FINITAMENTE GENERATI E NON

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale finitamente generato.
Esso certamente ammette infinite basi, tutte con cardinalità costante k.
Dunque, si definisce la DIMENSIONE di V:

$$\dim V = k \quad , \quad \dim V \geq 1$$

Per completezza:
$V = \{0\} \Rightarrow \dim V \overset{\text{def.}}{=} 0$.

LEMMA
Se V non è finitamente generato, allora:
$\forall\, n \geq 1$ esiste $X = \{x_1 \dots x_n\} \subseteq V$ di vettori linearmente indipendenti.

Dim.
1) CASO INIZIALE
$n = 1 \qquad \exists\, x_1 \neq 0 \qquad$ OK

2) PASSO INDUTTIVO
$n-1 \Rightarrow n$
Supponiamo di avere $(n-1)$ vettori linearmente indipendenti:

$$\{x_1, x_2 \dots x_{n-1}\}$$

Dato che V non è finitamente generato, certamente:

$$\mathrm{Span}(x_1 \dots x_{n-1}) \neq V$$

Dunque:
$\exists\, x_n \in V$ t.c. $\{x_1 \dots x_{n-1}, x_n\}$ siano linearmente indipendenti,
c.v.d.

Ex. $V = \mathbb{K}[x]$
$(1 \;\; x \;\; x^2 \dots x^n \dots)$ è una base numerabile ma NON FINITA di $\mathbb{K}[x]$.

COROLLARIO

Sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim V = n$, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.

Allora $\dim W \leq n$.

Dim.

Una qualsiasi base di V, con n elementi, genera V, e dunque anche W. Dunque la dimensione di W può essere al più n:

$$\dim W \leq n \text{ , c.v.d.}$$

Ex. $V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim V = 3$

I sottospazi di V sono:

- $\{0\} \Rightarrow \dim W = 0$;
- le rette passanti per l'origine $\Rightarrow \dim W = 1$;
- i piani contenenti l'origine $\Rightarrow \dim W = 2$;
- $\mathbb{R}^3$ stesso $\Rightarrow \dim W = 3$.

In ogni caso, $\dim W \leq 3$.

DIMENSIONI, BASI,
PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e sia $\mathcal{B}$ una sua base:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\};$$

sia inoltre $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
Allora:

- $\operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}(f(v_1), f(v_2) \dots f(v_n))$; $\dim \operatorname{Imm} f \leq n$
(Si noti che $f(v_1) \dots f(v_n)$ sono elementi di W)

Dim.

$w \in \operatorname{Imm} f \iff \exists\, v \in V$ t.c. $w = f(v)$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow f(v) = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots a_n v_n) =$$
$$= a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots a_n f(v_n))$$

$$w = f(v) \in \operatorname{Span}(f(v_1) \dots f(v_n))$$

$$\operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}(f(v_1) \dots f(v_n))$$

Essendo $f(v_1) \dots f(v_n)$ n elementi, si ha che

$$\dim \operatorname{Imm} f \leq n, \text{ c.v.d.}$$

- f è suriettiva $\iff \operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}(f(v_1), \dots f(v_n)) = W$

Dim.
Per definizione, una funzione è suriettiva se e solo se l'insieme delle immagini e quello d'arrivo coincidono, c.v.d.

- f è iniettiva $\iff \{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti

Dim.
Dimostriamo la prima implicazione

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$
$$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0$$

Dato che f è iniettiva, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Dunque:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

I vettori $v_1 \dots v_n$ sono ovviamente linearmente indipendenti, perciò:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Dimostriamo la seconda implicazione:

$f(v) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} v = 0$

$f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_m f(v_m) = 0$

Dato che $f(v_1) \dots f(v_m)$ sono linearmente indipendenti:

$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0 \Rightarrow v = 0$, c.v.d.

COROLLARIO

$f: V \to W$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow \{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ è una base di W, e $\dim V = \dim W = m$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione:

1) f è suriettiva $\Rightarrow \{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ generano W;

2) f è iniettiva $\Rightarrow \{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ sono linearmente indipendenti.

$$\Downarrow$$

$$\{f(v_1) \dots f(v_m)\} \text{ è una base di } W$$

$$\Downarrow$$

$$\dim W = \dim V = m.$$

Dimostriamo la seconda implicazione:

$\{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ è una base $\Rightarrow \{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ genera W, e sono linearmente indipendenti.

Dunque f è un isomorfismo, poiché è sia suriettiva che iniettiva. Ovviamente:

$$\dim W = \dim V = m, \text{ c.v.d.}$$

ATTENZIONE!

Condizione necessaria e sufficiente affinché due spazi vettoriali siano isomorfi è che abbiano la stessa dimensione. Ciò verrà esplicitato in seguito.

- f è completamente determinata da $f(v_1) \dots f(v_m)$.

Dim.

Dati $f(v_1) \dots f(v_m)$, $v = a_1 v_1 + \dots a_m v_m \Rightarrow f(v) = a_1 f(v_1) \dots a_m f(v_m)$, c.v.d.

• Per ogni scelta di $w_1 \dots w_m \in W$ esiste una e un'unica applicazione lineare $g: V \to W$ tale che:

$$f(v_1) = w_1 \; ; \; f(v_2) = w_2 \; \dots \; f(v_m) = w_m$$

Dim.

Data la base di V $\{v_1 \dots v_m\}$ e un gruppo di vettori di W $\{w_1 \dots w_m\}$, voglio costruire un'applicazione lineare $g: V \to W$ tale che $\forall \, 1 \le i \le m : f(v_i) = w_i$. Ottengo:

$$v \in V \Rightarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

$$g(v) \overset{def}{=} f(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_m f(v_m) =$$
$$= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m \, , \; c.v.d.$$

ISOMORFISMI E DIMENSIONI

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati. Essi sono isomorfi $\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim W$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione.

Il fatto che V e W isomorfi implica che esista un isomorfismo

$$f: V \to W$$

Allora fissata una base di V:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$$

$\mathcal{D} = f(\mathcal{B}) = \{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ è anch'essa una base di W. Entrambi gli insiemi hanno n elementi, perciò:

$$\dim V = \dim W.$$

Dimostriamo la seconda implicazione.

Fissate due basi, rispettivamente di V e W, con lo stesso numero di elementi (poiché $\dim V = \dim(W)$):

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$$

$$\mathcal{D} = f(\mathcal{B}) = \{f(v_1) \dots f(v_n)\}$$

Allora esiste una e un'unica g lineare, in questo caso anche biunivoca, tale che

$\forall\, 1 \le i \le n: \; g(v_i) = w_i$

Dunque $g: V \to W$ è un isomorfismo, c.v.d.

FORMULA DELLE DIMENSIONI

Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n:

$$\dim V = n$$

e un'applicazione $f: V \to W$, sappiamo già che:

$$\dim \operatorname{Ker} f \leq n \qquad \dim \operatorname{Imm} f \leq n$$

In realtà si ha che:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

Dim.

Si consideri il sottospazio vettoriale $\operatorname{Ker} f \subseteq V$. Denotiamo con k la dimensione di $\operatorname{Ker} f$:

$$\dim \operatorname{Ker} f = k \leq n$$

Fissiamo una base di $\operatorname{Ker} f$: $\{v_1 \dots v_k\}$.

Estendiamola a base di V:

$$\{v_1\ v_2 \dots v_k\ w_1 \dots w_s\}, \qquad k + s = n$$

Applicando f, otteniamo un insieme che genera $\operatorname{Imm} f$:

$$X = \{f(v_1) \dots f(v_k), f(w_1) \dots f(w_s)\}, \quad \operatorname{Span}(X) = \operatorname{Imm} f$$

Tutti i vettori $v_i \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v_i) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$. Quindi:

$$\operatorname{Span}(X) = \operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}(f(w_1) \dots f(w_s))$$

Se dimostrassi che $f(w_1) \dots f(w_s)$ sono linearmente indipendenti, dimostrerei che essi sono una base di $\operatorname{Imm} f$, e dunque che $\dim \operatorname{Imm} f = s$, e da qui la tesi.

Dunque:

$$b_1 f(w_1) + \dots b_s f(w_s) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} b_1 = b_2 = \dots b_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b_1 w_1 + \dots b_s w_s) = 0 \Rightarrow (b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots b_s w_s) \in \operatorname{Ker} f$$

Dunque si può scrivere come combinazione lineare di $v_1 \dots v_k$:

$$b_1 w_1 + \dots + b_s w_s = a_1 v_1 + \dots a_k v_k$$

$$-a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_k v_k + b_1 w_1 + \dots b_s w_s = 0$$

Ma i vettori $(v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_s)$ costituiscono una base di V. Dunque sono linearmente indipendenti:

$$b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$$

Allora $f(w_1) \dots f(w_s)$ sono una base di $\operatorname{Imm} f$. Quindi:

$$\dim \operatorname{Imm} f = s$$

È dato che:

$$n = k + s$$

si ha la tesi:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f, \quad \text{c.v.d.}$$

UN UTILE COROLLARIO

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n:

$$\dim V = \dim W = n$$

e sia $f : V \to W$.

Allora:

$$f \text{ è iniettiva} \iff f \text{ è surgettiva}$$

Dim.

È sempre vero che:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

Dimostriamo la prima implicazione.

Se f è iniettiva, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.

Ma allora:

$$\dim \operatorname{Imm} f = \dim W, \ \operatorname{Imm} f \subseteq W$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Imm} f = W$$

Dunque f è surgettiva.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Se f è surgettiva, $\operatorname{Imm} f = W \Rightarrow \dim \operatorname{Imm} f = \dim W$

Ma allora:

$$\dim \operatorname{Imm} f = \dim V \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

Dunque f è iniettiva, c.v.d.

IL CASO PARTICOLARE DI $\mathbb{R}^n$ E IL RANGO

Sia $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ un'applicazione lineare così definita:

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$X \longrightarrow AX \in \mathbb{R}^m$$

Allora: $AX = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n$,
ove $\forall\ 1 \leq j \leq n : A^j = Ae_j$

Dunque:

$$\mathrm{Imm}\, A = \mathrm{Span}\,(A^1, A^2 \dots A^n)$$

E quindi:

$$\dim \mathrm{Imm}\, A = \dim \mathrm{Span}\,(A^1, A^2 \dots A^n)$$

In questo particolare contesto, si può definire il RANGO di A:

$$\dim \mathrm{Imm}\, A \overset{def.}{=} rk\, A$$

Perciò, se Ker A è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$AX = 0$$

Risulterà che

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Imm}\, A$$
$$\Downarrow$$
$$n = \dim \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \} + rk\, A$$

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\, A + rk\, A$$

UN ESERCIZIO...

Ex. Siano $A \in M(p, m, \mathbb{K})$ e $X \in M(m, q, \mathbb{K})$ due matrici.
Sia L_A l'applicazione:

$$L_A : X \longrightarrow AX \in M(p, q, \mathbb{K}).$$

Si calcoli $\dim \operatorname{Ker} L_A$.

Innanzitutto, $AX \in \operatorname{Ker} L_A \Leftrightarrow AX = 0$.
Ma $AX \in \operatorname{Ker} L_A \Leftrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq q: X^i \in \operatorname{Ker} A$:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \mid X^2 \mid X^3 \mid \dots \mid X^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX^1 \mid AX^2 \mid AX^3 \mid \dots \mid AX^q \end{bmatrix}$$

Sia $\{v_1, \dots v_h\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$, con $\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{K}^m$.

Ogni $AX \in \operatorname{Ker} L_A$ sarà una combinazione lineare di questi vettori, tutti linearmente indipendenti:

$i=1$ $\begin{bmatrix} v_1 \mid 0 \mid 0 \dots \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} v_2 \mid 0 \mid 0 \dots \end{bmatrix}$ ...

$i=2$ $\begin{bmatrix} 0 \mid v_1 \mid 0 \dots \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \mid v_2 \mid 0 \dots \end{bmatrix}$ ...

...

Dunque:

$$\dim \operatorname{Ker} A = h$$
$$\dim \operatorname{Ker} L_A = q \cdot \dim \operatorname{Ker} A$$
$$\dim \operatorname{Ker} L_A = h \cdot q.$$

ESERCITAZIONE

Ex. Costruire, ammesso che esista:

$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ lineare, tale che:

- $(1+x) \in \operatorname{Ker} f$
- $\operatorname{Imm} f = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x + z - 2t = 0 \\ -3x + y + 5t = 0 \end{matrix} \right\}$

Consideriamo la funzione φ:

$$\varphi : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_2$$
$$(x, y, z, t) \to (x + z - 2t, -3x + y + 5t)$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Perciò:

$$\varphi(X) = AX$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z - 2t \\ -3x + y + 5t \end{bmatrix}$$

Ora risolvo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + z - 2t = 0 \\ -3x + y + 5t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z + 2t \\ 3z - 6t + y + 5t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z + 2t \\ y = -3z + t \end{cases}$$

Perciò:

$$\operatorname{Imm} f = \left\{ \begin{bmatrix} -z + 2t \\ -3z + t \\ z \\ t \end{bmatrix} \middle| \; z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ciascun vettore è diverso dal nullo; i vettori sono due. La dimensione di Imm f, dunque, può variare da 1 a 2.

I due vettori sono palesemente linearmente indipendenti:

$$\dim \operatorname{Imm} f = 2$$

Perciò, se chiamo quei due vettori w_1 e w_2:

$$\{w_1, w_2\} \text{ BASE di } \operatorname{Imm} f$$

Ora, valutiamo le dimensioni:

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$
$$3 = \dim \operatorname{Ker} f + 2$$
$$\dim \operatorname{Ker} f = 1$$

Dunque $(1+x)$ è l'unico vettore che costituisce la base di Ker f:

$$\{(1+x)\} \text{ BASE di } \operatorname{Ker} f$$

Potremmo quindi valutare la funzione lineare ψ:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(z,t) \rightarrow z\begin{bmatrix}-1\\-3\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\-3 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-z+2t\\-3z+t\\z\\t\end{bmatrix}$$

Prendendo in esame $\mathbb{R}_2[x]$:

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ è la BASE CANONICA di $\mathbb{R}_2[x]$

Dato che $(1+x) \in \operatorname{Ker} f$, conviene generare una nuova base, che contenga $(1+x)$:

$\mathcal{S} = \{1+x, x, x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$

Dim.

I tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$a(1+x) + b(x) + c(x^2) = 0$$
$$a + (b+a)x + cx^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b+a=0\\ c=0\end{cases} \quad \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$$

Dato che sono linearmente indipendenti, sono 3, e $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, allora generano $\mathbb{R}_2[x]$. Ma allora sono una base, c.v.d.

Consideriamo ora l'omomorfismo "coordinate di p rispetto alla base $\mathcal{B}$":

$$[\ ]_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$p \rightarrow [p]_{\mathcal{B}}$$
$$a + bx + cx^2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

Esso pone in relazione due spazi di dimensione uguale, dunque è un ISOMORFISMO.

Se perciò $(1+x) = p_1$, $x = p_2$, $x^2 = p_3$:

$$\{p_1, p_2, p_3\} \text{ BASE } \Rightarrow \{[p_1]_B, [p_2]_B, [p_3]_B\} \text{ BASE di } \mathbb{R}^3,$$

ove:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se dunque valuto $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$:

$$\text{Imm } f = \text{Span}\left(f(p_1), f(p_2), f(p_3)\right)$$

Ma la traccia impone che $f(x+1) = 0$. Perciò:

$$\text{Imm } f = \text{Span}\left(f(p_2), f(p_3)\right)$$

La scelta più logica appare dunque:

$$f(p_2) = w_1 \qquad f(p_3) = w_2$$

Consideriamo ora l'omomorfismo (in realtà è un isomorfismo) "coordinate di p rispetto alla base S."

$$[\;]_S : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3$$
$$p \longrightarrow [p]_S$$

$$a + bx + cx^2 \to \alpha(1+x) + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + (\alpha+\beta)x + \gamma x^2$$

Dunque: $a = \alpha \quad b = \alpha + \beta \quad c = \gamma$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = a \quad \beta = b - a \quad \gamma = c$$

Se perciò $p = a + bx + cx^2$:

$$[p]_S = \begin{bmatrix} a \\ b-a \\ c \end{bmatrix}$$

Perciò, per concludere:

$$f(p) = f\left(a p_1 + (b-a) p_2 + c p_3\right) \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} a f(p_1) + (b-a) f(p_2) + c f(p_3) =$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (b-a) \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + 2c \\ 3a - 3b + c \\ b - a \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

VALUTAZIONE DI DIMENSIONI

Se f e g sono due funzioni lineari così definite:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

Allora $g \circ f$ è lineare.

Ma c'è di più:

$$\dim \operatorname{Imm}(g \circ f) \leq \min\{\dim \operatorname{Imm} f, \dim \operatorname{Imm} g\}$$

Dim.

Sappiamo che:

$$\operatorname{Imm}(g \circ f) = \operatorname{Imm}\left(g|_{\operatorname{Imm} f}\right)$$

Dunque è evidente che:

1) $\operatorname{Imm}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Imm} g \Rightarrow \dim \operatorname{Imm}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Imm} g$;

2) Valutando la funzione:

$$g|_{\operatorname{Imm} f} : \operatorname{Imm} f \to Z$$

risulta che $\dim \operatorname{Imm} f \geq \dim \operatorname{Imm}\left(g|_{\operatorname{Imm} f}\right)$.

Dunque la tesi:

$$\dim \operatorname{Imm}(g \circ f) \leq \min\{\dim \operatorname{Imm} f, \dim \operatorname{Imm} g\}, \text{ c.v.d.}$$

Riferendosi in particolare alle matrici:

$$A \in M(p, q, \mathbb{K}), \quad B \in M(q, n, \mathbb{K}) \Rightarrow AB \in M(p, n, \mathbb{K})$$

Ossia:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & \mathbb{K}^q \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^p \end{tikzcd}$$

$$X \longrightarrow (AB)X$$

Si ha che:

$$\left.\begin{array}{l} rk\,A = \dim \operatorname{Imm} A \\ rk\,B = \dim \operatorname{Imm} B \end{array}\right\} \Rightarrow rk\,AB = \dim \operatorname{Imm} AB$$

$$rk(AB) \leq \min\{rk\,A, rk\,B\}$$

ALTRI ESERCIZI

Ex. Costruire, se esiste:

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare, tale che:

1) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$;

2) $f^2 = 0$.

Appare evidente che sia impossibile costruire una tale applicazione lineare.

Valutando le dimensioni:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

$$4 = 1 + \dim \operatorname{Imm} f$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \operatorname{Imm} f = 3$$

Ma:

$$f^2 = f \circ f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Imm} f \leq \dim \operatorname{Ker} f = 1$$

$$\dim \operatorname{Imm} f \leq 1$$

$3 > 1$, dunque non vi sono applicazioni lineari valide.

DAGLI SPAZI ASTRATTI AGLI SPAZI STANDARD

Consideriamo uno spazio vettoriale V tale che $\dim V = n$
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ (ovviamente $\dim \mathbb{K}^n = n$).

Esiste un ISOMORFISMO DI PASSAGGIO ALLE COORDINATE tra V e $\mathbb{K}^n$, che permette di "traslare" il problema in uno spazio vettoriale più "pratico", dotato cioè di una base canonica, tale che le componenti di un vettore coincidono con le sue coordinate, espresse nella base canonica.
In V, infatti, non vi è una scelta privilegiata, per quanto riguarda la base; in $\mathbb{K}^n$, ovviamente, sì.

Scelgo dunque $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V: l'isomorfismo di passaggio alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ associa v_1 con e_1, v_2 con e_2, e così via. Dunque:

$$\forall\ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \in V : [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Allo stesso modo, sappiamo che, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, l'insieme degli omomorfismi tra V e W è isomorfo all'insieme delle matrici $m \times n$, a sua volta isomorfo all'insieme degli omomorfismi da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$.

Dunque:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & W_{\mathcal{D}} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{D}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "{A \in M(m,n,\mathbb{K})}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

La matrice A è chiamata MATRICE ASSOCIATA ad f mediante le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ (si indica con $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$).
Si hanno questi due importanti risultati:

- $[\ ]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\ ]_{\mathcal{B}}^{-1} = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$;
- $[f(v)]_{\mathcal{D}} = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)\,[v]_{\mathcal{B}}$.

SPAZIO PRODOTTO

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Si definisce SPAZIO PRODOTTO $V \times W$ lo spazio vettoriale così definito:

$$V \times W = \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$$

e con le operazioni così definite:

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \longrightarrow (V \times W)$$
$$(v_1, w_1), (v_2, w_2) \longrightarrow (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\bullet : \mathbb{K} \times (V \times W) \longrightarrow (V \times W)$$
$$\lambda, (v_1, w_1) \longrightarrow (\lambda v_1, \lambda w_1)$$

Esso è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

LEMMA

Sia $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Allora:

$$\dim (V \times W) = n + m$$

Dim.

Siano:

- $\mathcal{B} = \{ v_1 \dots v_n \}$ una base di V,
- $\mathcal{D} = \{ w_1 \dots w_m \}$ una base di W.

Considero il seguente insieme di vettori (che sono $n+m$):

$$(v_1, 0), (v_2, 0), \dots (v_n, 0) (0, w_1) \dots (0, w_m)$$

Essi generano $V \times W$. Infatti:

$\forall v \in V \ \exists! \ a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{K} \ni' v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \Rightarrow$

$\forall w \in W \ \exists! \ b_1, b_2 \dots b_m \in \mathbb{K} \ni' w = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$

$\Rightarrow \forall (v, w) \in (V \times W) \ \exists! \ a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m \in \mathbb{K} \ni' (v, w) = (a_1 v_1 \dots a_n v_n, b_1 w_1 \dots)$

Il fatto che la scrittura è unica potrebbe già farci pensare che questa è una base. Ad ogni modo:

$a_1 (v_1, 0) + \dots + b_m (0, w_m) = 0 \Leftrightarrow (a_1 v_1, 0) + \dots + (0, b_m w_m) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1 v_1 + \dots, \dots b_m w_m) = 0 \Leftrightarrow a_1 v_1 \dots = 0 \wedge \dots b_m w_m = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = \dots = b_m = 0$, c.v.d.

SPAZIO SOMMA

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, e siano W, Z due suoi sottospazi.
Sappiamo che $(W \cup Z)$ non è un sottospazio, in quanto ad esempio non è chiuso rispetto alla somma.
Consideriamo però ciò che genera:

$$\mathrm{Span}(W \cup Z) = \{ v \in V \mid \exists\, w \in W,\ \exists\, z \in Z \text{ t.c. } v = w + z \}$$

Lo Span dell'unione si definisce SPAZIO SOMMA $(W + Z)$:

$$\mathrm{Span}(W \cup Z) \overset{\text{def}}{=} (W + Z)$$

FORMULA DI GRASSMANN

Supponiamo che $\dim V = n$.
Allora, per due sottospazi di V, si ha che:

$$\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$$

Dim.
Innanzitutto, sappiamo che:

$$\dim W + \dim Z = \dim(W \times Z)$$

Voglio perciò costruire un'applicazione lineare $f : W \times Z \to V$ tale che $\mathrm{Imm}\, f = W + Z$ e $\mathrm{Ker}\, f$ sia isomorfo a $W \cap Z$.
Dunque:

$$f : W \times Z \to V$$
$$(w, z) \to w + z$$

È ovvio che $\mathrm{Imm}\, f = \{ v \in V \mid v = w + z,\ w \in W,\ z \in Z \} = W + Z$
Inoltre:
$\mathrm{Ker}\, f = \{ w + z \mid w + z = 0 \} = \{ w + z \mid w = -z \}$
L'uguaglianza impone che $w \in W \cap Z$, $z \in (W \cap Z)$
Di qui l'isomorfismo:

$$g : \mathrm{Ker}\, f \to W \cap Z$$
$$(w, -w) \to w$$

Dunque, per la formula delle dimensioni:
$\dim(W \times Z) = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Imm}\, f \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim W + \dim Z = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$, c.v.d.

COSTRUZIONE DI BASI DELLO SPAZIO SOMMA

Consideriamo una base di Ker f:

$$\mathcal{B} = \{(w_1, -w_1) \dots (w_k, -w_k)\}$$

Attraverso l'isomorfismo g: Ker $f \to W \cap Z$, otteniamo una base di $(W \cap Z)$:

$$\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_k\}$$

Ora, estendiamo $\mathcal{D}$ a base prima di W, poi di Z:

$$\mathcal{D}' = \{w_1, \dots w_k, t_1 \dots t_q\} \text{ base di } W$$

$$\mathcal{D}'' = \{w_1 \dots w_k, z_1 \dots z_s\} \text{ base di } Z$$

L'insieme $\mathcal{E}$ di vettori

$$\mathcal{E} = \{w_1, \dots w_k, t_1, \dots t_q, z_1 \dots z_s\}$$

è una base dello spazio somma $(W + Z)$.

SOMMA DIRETTA

Consideriamo il caso particolare in cui $(W \cap Z) = \{0\}$ e quindi $\dim(W \cap Z) = 0$.

La formula di Grassmann, in questo caso, afferma che:

$$\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z = \dim(W \times Z)$$

In questo caso, la somma $W + Z$ è una SOMMA DIRETTA.

Quindi scriviamo:

$$W \oplus Z$$

e in questo caso intendiamo sia che si sta considerando lo spazio somma $W + Z$, sia che $\dim(W \cap Z) = 0$.

Se:

$$\mathcal{B} = \{w_1 \dots w_k\} \text{ base di } W$$
$$\mathcal{D} = \{z_1 \dots z_h\} \text{ base di } Z$$

Allora:

$$\mathcal{F} = \{w_1 \dots w_k, z_1 \dots z_h\}$$

è una base di $W \oplus Z$.

Ex. Dati due spazi vettoriali V e W, consideriamo:

$$V^* = \{0\} \times V = \{(0, v) \mid v \in V\}$$
$$W^* = W \times \{0\} = \{(w, 0) \mid w \in W\}$$

Allora:

$$V^* \cap W^* = (0,0) = 0 \Rightarrow \dim(V^* \cap W^*) = 0$$

Quindi:

$$\dim(V^* + W^*) = \dim V^* + \dim W^*$$
$$\dim(V^* + W^*) = \dim(V^* \times W^*)$$

Dunque la scrittura $(V^* \oplus W^*)$ ha senso.

SPAZI COMPLEMENTARI

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, e sia W un suo sottospazio.
Se Z è un sottospazio di V tale che si possa parlare di somma diretta:

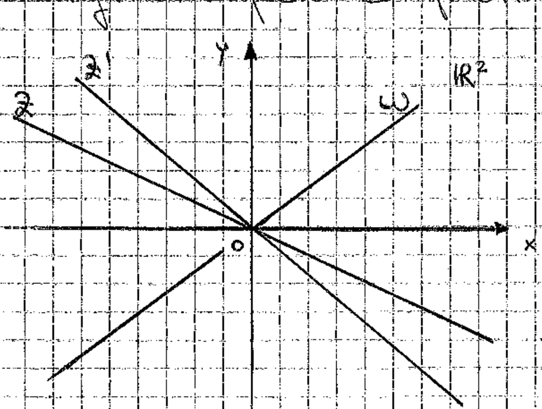
$$V = W \oplus Z$$

allora Z è definito:
- uno SPAZIO SUPPLEMENTARE di W;
- uno SPAZIO COMPLEMENTARE in V.

Data una qualsiasi base $\mathcal{E}$ di V, essa contiene al suo interno una base $\mathcal{B}$ di W, più un insieme di altri vettori, chiamiamolo $\mathcal{D}$.
Ebbene, $\mathcal{D}$ è la base di uno spazio complementare:

$$\text{Span}(\mathcal{D}) = Z$$

È fondamentale capire che esistono infiniti spazi complementari. Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia W una qualsiasi retta passante per l'origine. W, si sa, è un sottospazio. Ebbene, qualsiasi altra retta passante per l'origine che non coincide con W è uno spazio complementare.



Vi è però un invariante: la dimensione. Se $\dim V = n$, $\dim W = K$, allora la dimensione di un qualsiasi spazio complementare sarà $(n - K)$.

Dim.

$$V = W \oplus Z \Rightarrow \dim V = \dim W + \dim Z$$
$$V = W \oplus Z' \Rightarrow \dim V = \dim W + \dim Z'$$
$$\Downarrow$$
$$\dim Z = \dim Z' \text{, c.v.d.}$$

Si noti che, se $V = W \oplus Z$, allora:

$\forall v \in V \; \exists! \; w \in W, z \in Z \; \ni' \; v = w + z$

Dim.

Supponiamo che:

$$v = w + z, \; w \in W, \; z \in Z$$
$$v = w_1 + z_1, \; w_1 \in W, \; z_1 \in Z$$

Ovviamente:

$$w + z = w_1 + z_1$$
$$w - w_1 = z_1 - z, \; (w - w_1) \in W, \; (z_1 - z) \in Z$$

L'uguaglianza impone che:

$$w - w_1 \in W \cap Z, \; z_1 - z \in W \cap Z$$

Ma $W \cap Z = \{0\}$. Dunque la Tesi:

$$w = w_1, \; z_1 = z, \; \text{c.v.d.}$$

Dimostriamo ora l'esistenza, in tali situazioni di un ISOMORFISMO CANONICO tra Z e Z'.

Dim.

Per ipotesi:

$$\begin{matrix} V = W \oplus Z \\ V = W \oplus Z' \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} V = W + Z \\ W \cap Z = \{0\} \end{cases} \wedge \begin{cases} V = W + Z' \\ W \cap Z' = \{0\} \end{cases}$$

Perciò:

$\forall \bar{v} \in V \; \exists! \; \bar{w} \in W \wedge \exists! \; z \in Z \; \ni' \; v = w + z$

$\forall \bar{v} \in V \; \exists! \; \bar{w} \in W \wedge \exists! \; z_1 \in Z' \; \ni' \; v = w + z_1$

Dunque costruiamo l'applicazione $\varphi : Z \to Z'$, che associa alla componente z del vettore v la componente z_1.

Essa è lineare:

- $v_1 = w_1 + z_1, \; v_2 = w_2 + z_2 \; ; \; \varphi(z_1) = z_1', \; \varphi(z_2) = z_2'$
  $v_1 + v_2 = (w_1 + w_2) + (z_1 + z_2) \Rightarrow \varphi(z_1 + z_2) = z_1' + z_2' = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$.
- $v = w + z, \; \varphi(z) = z' \; ; \; \lambda \in \mathbb{K}$
  $\lambda v = \lambda w + \lambda z \Rightarrow f(\lambda z) = \lambda z' = \lambda f(z)$.

In particolare, si noti che:

$\forall z \in Z : z \in V \Rightarrow \forall z \in Z \; \exists! \; w, z' \; \ni' \; z = w + z'$

L'applicazione lineare φ è un isomorfismo. Dimostriamo ad esempio che è iniettiva.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{ z \in Z \mid \varphi(z) = z' = 0 \}$$

Se $z' = 0$, si ha:

$$z = w + z' = w$$

$$z = w$$

L'uguaglianza implica che $z \in W \cap Z$. Ma allora l'unica possibilità è che $z = 0$.

L'applicazione è iniettiva; dunque è biiettiva, c.v.d.

Possiamo quindi definire ora la PROIEZIONE SUI FATTORI DIRETTI:

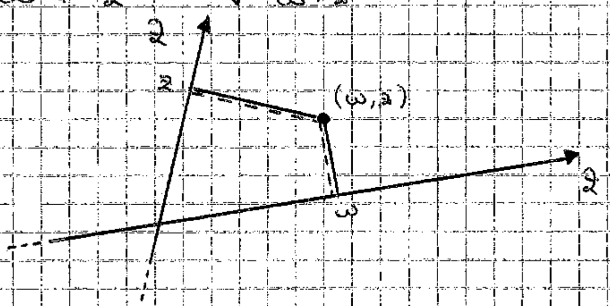
$$\begin{array}{ccc} V = W \oplus Z & \xrightarrow{P_Z} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle P_W} & & \\ W & & \end{array}$$

$\forall\, v \in V\ \exists!\, w, z \ni' v = w + z$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} P_W(v) = w \\ P_Z(v) = z \end{cases}$$

Ex. $V = \mathbb{R}^2 = W \oplus Z \qquad v = w + z$



Alla luce di ciò, la funzione φ può essere riformalizzata:

$W \oplus Z = V = W \oplus Z' \quad ; \quad Z \subseteq V$

Dunque:

$$Z \xrightarrow[i]{} W \oplus Z = V = W \oplus Z' \xrightarrow{P_{Z'}} Z' \qquad (i = \text{inclusione})$$

Perciò, l'isomorfismo φ non è altro che:

$$\varphi : Z \longrightarrow Z'$$
$$z \longmapsto P_{Z'}(z)$$

Quindi:

$$\varphi = P_{Z'}\big|_{Z} \qquad \vee \qquad \varphi = P_{Z'} \circ i$$

ESERCITAZIONE

Ex. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, e siano f e g due applicazioni lineari tali che:

- $f \circ g = 0$;
- $f + g$ è un isomorfismo.

Si dimostri che:

- $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Imm} f$
- $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Imm} g$.

Innanzitutto, con la formula delle dimensioni:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Imm} g$$

Il fatto che $f \circ g = 0$ implica che $\operatorname{Imm} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. Perciò:

$$\dim \operatorname{Imm} g \leq \dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Imm} f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Imm} g \leq n - \dim \operatorname{Imm} f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n - \dim \operatorname{Ker} g \leq n - \dim \operatorname{Imm} f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} g \geq \dim \operatorname{Imm} f.$$

Il fatto che $(f+g)$ sia iniettiva e surgettiva implica che $\operatorname{Ker}(f+g) = \{0\}$. Allora:

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(f+g) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

Si può perciò considerare la somma diretta:

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g \subseteq V \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g \leq n$$

Si può quindi concludere:

$$n - \dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Imm} g \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq n - \dim \operatorname{Ker} g$$
$$\Downarrow$$
$$\dim \operatorname{Imm} g = \dim \operatorname{Ker} f$$
$$\dim \operatorname{Imm} f = \dim \operatorname{Ker} g, \text{ c.v.d.}$$

Ex. Si consideri $M(n, \mathbb{K})$. Si determini com'è formato l'insieme W così definito:

$$W = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \quad \forall B \in M(n, \mathbb{K}) \}$$

PRIMO METODO

Innanzitutto, notiamo che:

- $0 \in W$, poiché $0 \cdot B = B \cdot 0 = 0$;
- $I \in W$, poiché $I \cdot B = B \cdot I = B$;
- $\lambda I \in W$, poiché $(\lambda I) B = B (\lambda I) = \lambda (I \cdot B) = \lambda (B \cdot I) = \lambda B$.

Dato che $I = 1 \cdot I$, e $0 = 0 \cdot I$, diciamo che:

$$\{ \lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \} \subseteq W$$

Sia ora $A \in W$, e sia E_{ij} la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ i-esima riga

$\uparrow$ j-esima colonna

Ora:

$$A \in W \Rightarrow \forall i, j : A E_{ij} = E_{ij} A$$

Quindi:

$$A E_{ij} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ? & 0 \end{bmatrix}$$

colonna j-esima, ove ci sarà l'i-esima colonna di A

$$E_{ij} A = \begin{bmatrix} 0 & 1_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ? \\ 0 \end{bmatrix}$$

riga i-esima, dove ci sarà la j-esima riga di A

Uguagliamo le due matrici:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \\ A^i \end{array} = \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \leftarrow A_j$$

Molti elementi saranno quindi nulli, tranne $[A]_{jj}$:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A^i & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ [A]_{jj} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A_j & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & [A]_{jj} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque, la matrice è sicuramente DIAGONALE:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & & 0 \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Supponiamo $a_{1,1} \neq a_{2,2}$, e consideriamo la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

Si avrebbe:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & a_{1,1} & \\ a_{2,2} & \dots & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & a_{2,2} & \\ a_{1,1} & \dots & \end{bmatrix},$$

ovvero matrici differenti.

Iterando il processo più volte si ha che:

$\forall\ 1 \leq i, j \leq n : a_{i,i} = a_{j,j}$,

ovvero:

$$W \subseteq \{ \lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$$

Ma allora si ha l'uguaglianza:

$$W = \{ \lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \}, \text{c.v.d.}$$

ALGORITMO DI GAUSS

Data una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, l'ALGORITMO DI GAUSS permette, tramite una serie di "passi elementari", il cui ordine e tipologia sono univocamente determinati, di ottenere una matrice $\hat{A} \in M(m,n,\mathbb{K})$, detta "A SCALINI" (dopo verrà spiegato perché):

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \hat{A} \end{bmatrix}$$

Dunque, si avrà un processo del tipo:

$$A = A_0 \xrightarrow{P_1} A_1 \xrightarrow{P_2} A_2 \xrightarrow{P_3} \dots \xrightarrow{P_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{P_k} A_k \overset{\text{STOP}}{=} \hat{A}$$

In particolare, ogni "passo elementare" sarà ottenuto applicando un'"operazione elementare" tra le righe di A:

$$\dots A_i \xrightarrow{P_{i+1}} A_{i+1} \dots$$

Le "operazioni elementari" sono di tre tipi:

- SCAMBIO TRA RIGHE: $R_j \to R_k$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE: $R_j \to cR_j$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{K}$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- COMBINAZIONE LINEARE: $R_j \to R_j + aR_k$, $a \in \mathbb{K}$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 1 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

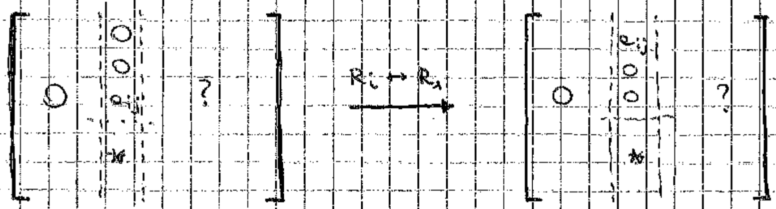
Vediamo ora come si applica questo algoritmo.
Data la matrice iniziale, guardo in sequenza le colonne, e mi fermo alla prima che non è completamente nulla:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & A_i & ? \end{array}\right], \quad A_i \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

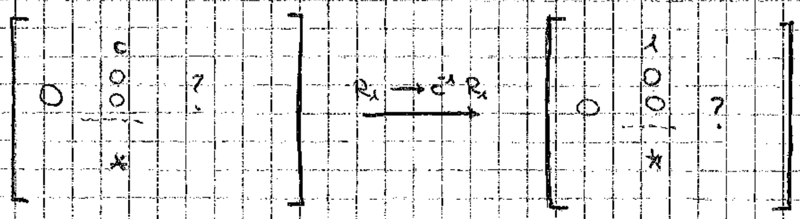
NOTA BENE

Se la matrice è composta da sole colonne formate da 0, il processo termina immediatamente: $A = \hat{A}$.

Ritornando alla matrice generica, valuto la colonna A_j. Individuo il primo elemento non nullo della colonna, e applico un'operazione del primo tipo, per "spostare" l'elemento non nullo nella prima riga:



Supponiamo $a_{ij} = c$. Applico ora un'operazione del secondo tipo, in modo tale da rendere $a_{ij} = 1$:

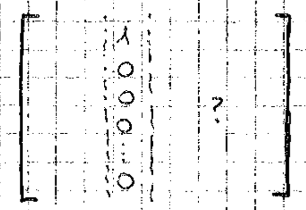


A questo punto, ho un termine 1 in prima riga, e una serie di numeri sottostanti. Il termine 1 prende il nome di PIVOT.

Applico a questo punto una serie di operazioni del terzo tipo, per rendere nulli tutti gli elementi della j-esima colonna:

$\forall\, a_k \in A_j : R_k \to R_k - a_k R_1$

Dopo questo gruppo di passi, ho ottenuto una matrice del genere:



A questo punto trascuro la prima riga:

$$A(m, n, \mathbb{K}) \to A^*(m-1, n, \mathbb{K})$$

Richiamo A^* in prima posizione, e ripeto i passi. Ad un certo punto finisco le righe, e così mi fermo.

Ottengo quindi $\hat{A}$

$\hat{A}$ è formata in questa maniera:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perciò è detta "matrice a scalini"

Ex.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \dashrightarrow$$

$$\dashrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{A}$$

SPAZIO QUOZIENTE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.

Si definisce SPAZIO QUOZIENTE V/W lo spazio generato da una relazione di equivalenza, che impone che:

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$$

Le operazioni nello spazio quoziente sono così definite:

$$+ : [v_1] + [v_2] \overset{def}{=} [v_1 + v_2]$$

$$\cdot : \lambda [v_1] = [\lambda v_1]$$

In base a queste definizioni, è immediato dimostrare che:

$$\pi : V \longrightarrow V/W$$
$$v \longrightarrow [v]$$

è un'applicazione lineare.

Inoltre, π è suriettiva:

- $\forall [v] \in V/W \ \exists v \in V$ t.c. $\pi(v) = [v]$

Per quanto riguarda invece il nucleo:

$$\operatorname{Ker} \pi = \{ v \in V \mid [v] = 0 \} = \{ v \in V \mid v - 0 = v \in W \} = W$$

Perciò si ha:

$$\dim V/W + \dim W = \dim V$$

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

Se dunque consideriamo uno spazio vettoriale Z complementare di W in V, abbiamo che:

$$\dim V/W = \dim Z$$

E dunque si può dimostrare che $\pi \circ i$, così definito:

$$Z \xhookrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/W$$

è un isomorfismo.

Basta dimostrare ad esempio che è iniettiva.

Dim.

$$\operatorname{Ker} \pi \circ i = \{ z \in Z \mid [z] = 0 \} = \{ z \in Z \mid z \in W \} =$$
$$= \{ z \in W \cap Z \} \overset{def}{=} \{0\}, \text{ c.v.d.}$$

MATRICI ASSOCIATE E ISOMORFISMI

Supponiamo che $\dim V = n$.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Considerando l'ISOMORFISMO DI PASSAGGIO ALLE COORDINATE, si ha:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \implies [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Consideriamo ora un omomorfismo tra $V_{\mathcal{B}}$ e $W_{\mathcal{D}}$:

$$V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{\mathcal{D}}, \quad f \in \mathrm{Hom}(V_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{D}})$$

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] \arrow[dr, bend left] & W_{\mathcal{D}} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{D}}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Si ha:

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) = [\ ]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\ ]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Inoltre $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) \in M(m, n, \mathbb{K})$ dunque individua un'applicazione lineare $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.
Si ha che:
$\forall\, j : M^j = [f(v_j)]_{\mathcal{D}}$

Perciò:
$\forall\, v \in V : [f(v)]_{\mathcal{D}} = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)\,[v]_{\mathcal{B}}$

Vi è dunque un isomorfismo tra spazi vettoriali: la funzione α così definita:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Hom}(V, W) &\longrightarrow M(m, n, \mathbb{K}) \\ f &\longrightarrow M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

è un isomorfismo.
Se focalizziamo l'attenzione sugli spazi standard, ciò si traduce nell'"equivalenza" tra lo spazio degli omomorfismi da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ e lo spazio delle matrici $m \times n$:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \xrightarrow{M^{C_n}_{C_m}} M(m, n, \mathbb{K})$$

CAMBIAMENTO DI BASE

Sia V uno spazio vettoriale, tale che $\dim V = n$.
Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi differenti di V.

Si intende analizzare la relazione, per ogni vettore di V, tra $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[v]_{\mathcal{B}'}$.

In questo caso, conviene utilizzare la funzione IDENTITÀ:

$$Id_V : V_{\mathcal{B}} \longrightarrow V_{\mathcal{B}'}$$

Dunque, lo schema è il seguente:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & V_{\mathcal{B}'} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)"'] \arrow[r, bend left=80] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Percorrendo lo schema nei due sensi, si ha:

$\forall\, v \in V : [f(v)]_{\mathcal{B}'} = [M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f)][v]_{\mathcal{B}}$

In questo particolare caso:

$\forall\, v \in V : [f(v)]_{\mathcal{B}'} = [M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)][v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'}$

La matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)$ è definita MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE.

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DELLE COORDINATE

Siano V e W due spazi vettoriali finitamente generati; siano B e B' due basi differenti di V; siano D e D' due basi differenti di W.

Combinando quanto appreso finora, si può realizzare il seguente schema: $Id_W \circ f \circ Id_V = f$

$$\begin{tikzcd}
V_{B'} \arrow[r, "Id_V"] \arrow[rrr, bend left] \arrow[d, "{[\ ]_{B'}}"] & V_B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"] & W_D \arrow[r, "Id_W"] \arrow[d, "{[\ ]_D}"] & W_{D'} \arrow[d, "{[\ ]_{D'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^B_{B'}(Id_V)"'] \arrow[rrr, dashed, bend right, "M^{D'}_{B'}(f)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^D_B(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dashed, "M^{D'}_D(Id_W)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

OSSERVAZIONE

E' ovvio che $(Id_W \circ f \circ Id_V)(v) = Id_W(f(Id_V(v))) = Id_W(f(v)) = f(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow Id_W \circ f \circ Id_V = f$

Possiamo quindi formulare la formula del cambiamento di base:

$$M^{D'}_{B'}(f) = M^B_{B'}(Id_V) \cdot M^D_B(f) \cdot M^{D'}_D(Id_W)$$

Un altro caso è il seguente:

- $f: V_B \rightarrow W_D$ lineare;
- $g: W_D \rightarrow Z_C$ lineare.

In questo caso:

- $A = M^D_B(f)$;
- $B = M^C_D(g)$.

Si ha:

$$M^C_B(g \circ f) = BA.$$

PROPRIETÀ DELLE MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE

Analizziamo ora alcune proprietà di queste matrici.

- Ovviamente $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = I_V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

  se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, si ha che:

$$M^j = \left([v_j]_{\mathcal{B}}\right) = e_j$$

- Analizziamo il seguente schema, con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V:

$$V_{\mathcal{B}} \xrightarrow[M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)]{Id_V} V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)]{Id_V} V_{\mathcal{B}}$$

Risulta perciò che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V) = I_V$$

Dunque queste due matrici sono una l'inversa dell'altra.
Come conseguenza, si ha che ogni matrice di cambiamento di base è invertibile.

- Supponiamo $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ invertibile, con $A \in M(n, \mathbb{K})$.
  Sia V perciò uno spazio vettoriale, avente $\mathcal{B}$ come base.
  Analizziamo il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc}
V_{\mathcal{B}} & \overset{f}{\dashrightarrow} & V_{\mathcal{B}} \\
\downarrow [\ ]_{\mathcal{B}} & & \downarrow [\ ]_{\mathcal{B}} \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow[A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)]{} & \mathbb{K}^n
\end{array}$$

Sappiamo che $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in GL(n, \mathbb{K})$. Perciò:
$\exists\, A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K}) \ni' A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Ma se $[I]_{\mathcal{B}} = Id_V$, allora:
$\exists\, f^{-1} \in End(V) \ni' f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_V$,
ossia:

$$f, f^{-1} \in GL(V).$$

LEMMA

Siano dati A, V e $\mathcal{B}$, definiti come prima.

Allora:

- $\exists!\ \mathcal{B}'$ di V t.c. $A = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$
- $\exists!\ \mathcal{B}''$ di V t.c. $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{Id}_V)$

Dim.

- So che $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = A = (A^1, A^2, \dots A^n)$, so che $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \dots v_n'\}$.

  Impongo:

  $\forall j : A^j = [v_j']_{\mathcal{B}}$

Poiché A è invertibile, $\mathcal{B}'$ è una base, c.v.d.

- Dato che per ipotesi A^{-1} esiste, sfrutto il fatto che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{Id}_V) = A \iff M^{\mathcal{B}''}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = A^{-1}$$

  Ma, come visto nella precedente dimostrazione, $\mathcal{B}''$ esiste, c.v.d.

EQUIVALENZA DESTRA-SINISTRA (DS)

Sia:

- $\dim V = n$;
- $\dim W = m$.

Consideriamo lo spazio degli omomorfismi $Hom(V, W)$.

Per definizione, due funzioni $f, g \in Hom(V,W)$ sono EQUIVALENTI DESTRA SINISTRA se esistono due funzioni $k \in GL(V)$ e $h \in GL(W)$ tali che $g = h \circ f \circ k$.

In altre parole:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "k"] \arrow[rrr, bend right, "g = h \circ f \circ k"'] & V \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

$f, g \in Hom(V, W)$

$f \sim_{DS} g \iff \exists\, k \in GL(V),\ \exists\, h \in GL(W)$ t.c. $g = h \circ f \circ k$

Questa è una relazione di equivalenza.

Dim.

- $f \sim_{DS} f$. Infatti: $f = Id_W \circ f \circ Id_V$;
- $f \sim_{DS} g \iff g \sim_{DS} f$. Infatti: $g = h \circ f \circ k \iff f = h^{-1} \circ g \circ k^{-1}$;
- $f \sim_{DS} g$, $g \sim_{DS} e \Rightarrow f \sim_{DS} e$.
  Infatti:
  $g = h \circ f \circ k$, $e = h' \circ g \circ k' \Rightarrow e = h' \circ h \circ f \circ k \circ k'$
  $e = (h' \circ h) \circ f \circ (k \circ k') \Rightarrow f \sim_{DS} e$, c.v.d.

PRIMO TEOREMA SULL'EQUIVALENZA DS

Siano $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Allora:

$f \sim_{DS} g \iff \exists\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, $\exists\, \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ basi di W t.c. $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per ipotesi, $f \sim_{DS} g$.

Allora, si consideri questo schema:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "h"'] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "g = k \circ f \circ h"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & W_{\mathcal{D}} \arrow[r, "k"'] \arrow[d] & W_{\mathcal{D}} \arrow[d] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h)"] \arrow[rrr, bend right, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(k)"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Dunque, in generale:

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) = A \qquad M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) = M \qquad M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(k) = B$

$$B\,M\,A = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$$

Ora, cambiando interpretazione, considero le identità Id_V e Id_W:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}'}}"'] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] & W_{\mathcal{D}} \arrow[r, "Id_W"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{D}}}"] & W_{\mathcal{D}'} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{D}'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)"'] \arrow[rrr, bend right, "M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dashed, "M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{D}}(Id_W)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Dunque:

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) &= A \\ M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{D}}(Id_W) &= B \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\,M\,A = M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)$$

Perciò la tesi:

$\exists\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, $\exists\, \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ basi di W t.c. $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Dimostriamo la seconda implicazione. Per ipotesi:

$\exists\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, $\exists\ \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ basi di W t.c. $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Allora:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "Id_V"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] & W_{\mathcal{D}} \arrow[r, "Id_W"] & W_{\mathcal{D}'} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u] \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)"] \arrow[rrr, bend right, "M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[u] \arrow[r, "M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)"] & \mathbb{K}^m \arrow[u] \arrow[r, "M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{D}}(Id_W)"] & \mathbb{K}^m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{B}'}(f)$$

Le funzioni indotte dalle matrici di cambiamento di base (che sono invertibili) sono applicazioni lineari invertibili:

$$Id_V : V_{\mathcal{B}'} \longrightarrow V_{\mathcal{B}}$$
$$Id_W : W_{\mathcal{D}} \longrightarrow W_{\mathcal{D}'}$$
invertibili

Dunque:

$$g = (Id_V)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \circ f \circ (Id_W)^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{D}}$$

è il prodotto di f per due applicazioni invertibili:

$$Id_V : h \in GL(V)$$
$$Id_W : k \in GL(W)$$

$$g = h \circ f \circ k$$

Dunque la tesi:

$f \sim_{DS} g$, c.v.d.

SECONDO TEOREMA SULL'EQUIVALENZA DS

Siano $f, g \in Hom(V, W)$, con $\dim V = n$; $\dim W = m$.
Allora:

$$f \sim_{DS} g \iff \dim Imm\, f = \dim Imm\, g$$

Dim.

LEMMA
Sia $\dim Imm\, f = r \leq \min\{m, n\}$.
Allora:
$\exists$ $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{D}$ base di W $\ni'$ $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = J_r(m, n)$,
ove $J_r(m,n)$ è la matrice così formata:

$$m \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]^{n}.$$

Ex. • $J_1(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

• $J_2(3,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dim.

$$f : V \longrightarrow W$$

$\dim Imm\, f = r \iff \dim Ker\, f = n - r = s$

$$\{v_1 \dots v_s\} \text{ base di } Ker\, f$$

Estendo, e inverto:

$$\overline{\mathcal{B}} = \{v_1 \dots v_s\, w_1 \dots w_r\}$$
$$\mathcal{B} = \{w_1 \dots w_r\, v_1 \dots v_s\} \text{ base di } V$$

A questo punto considero, nella scorta del fatto che $f(v_1) = \dots$
$\dots = f(v_s) = 0$, la base di $Imm\, f$ estesa a base di W:

$$\mathcal{D} = \{f(w_1) \dots f(w_r), z_1 \dots z_s\}$$

Dunque la tesi, ossia:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = J_r(m,n), \text{ c.v.d.}$$

Per il teorema precedente:

$f \sim_{bs} g \Rightarrow \exists\ \mathcal{B}'$ di V, $\mathcal{D}'$ di W $\ni'$:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{D}'}(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = J_r(m,n)$$

Ma allora anche $\dim \mathrm{Imm}\, g = r$, c.v.d.

Se consideriamo gli spazi standard, si ha che, data $A \in M(m,n,\mathbb{K})$:

$$\mathrm{rk}\, A = r \Rightarrow \exists\ P \in GL(V),\ Q \in GL(W) \ni' PAQ = J_r(m,n).$$

SPAN DELLE RIGHE E SPAN DELLE COLONNE

Consideriamo la trasposizione di una matrice:

$$T : M(m,n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,m,\mathbb{K})$$
$$A \longrightarrow A^t$$

si ha che:

- $\text{rk}\, A = \dim \text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$;
- $\text{rk}\, A^t = \dim \text{Span}(A^{t1}, A^{t2}, \dots, A^{tm}) = \dim \text{Span}(A_1, A_2 \dots A_m)$

Allora $\text{rk}\, A = \text{rk}\, A^t$; in altre parole, la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle righe di A.

<u>Dim</u>

$\forall\, i,j : [(AB)^t]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{h=1}^{m} [A]_{jh} [B]_{hi} = \sum_{h=1}^{m} [B^t]_{ih} [A^t]_{hj} = [B^t A^t]_{i,j}$:
perciò $(AB)^t = B^t A^t$.

Se $A \in GL(n,n,\mathbb{K})$, valutiamo A^{-1}:

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- $(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = I^t = I$ $\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Se ora supponiamo che $\text{rk}\, A = r$, allora:
$\exists\, P, Q$ t.c.:

$$P A Q = J_r(m,n,\mathbb{K})$$
$$\Downarrow$$
$$(P A Q)^t = Q^t A^t P^t = [J_r(m,n,\mathbb{K})]^t = J_r(n,m,\mathbb{K})$$
$$\Downarrow$$
$$\text{rk}\, A^t = r = \text{rk}\, A, \text{ c.v.d.}$$

APPLICAZIONI DELL'ALGORITMO DI GAUSS

CALCOLO DEL RANGO DI UNA MATRICE

Sia $A \in M(m,n,\mathbb{R})$.
Si intende calcolare il rango di A:

$$rk\, A = \dim \operatorname{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n) = \dim \operatorname{Span}(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Consideriamo l'algoritmo di Gauss:

$$A = A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_m = \hat{A},$$

ove $\hat{A}$ è una matrice a scalini.

Si ha:

- $\operatorname{Span}(A_1, A_2, \dots, A_m) = \operatorname{Span}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m)$;
- Le righe non nulle di $\hat{A}$ formano una base di $\operatorname{Span}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m)$;
- $rk\, A = rk\, \hat{A} = \#\{pivot\}$.

Dim.

LEMMA

Considerato l'i-esimo passo dell'algoritmo di Gauss:

$$A_i \longrightarrow A_{i+1}$$

Si ha:

$$\operatorname{Span}(\text{righe di } A_i) = \operatorname{Span}(\text{righe di } A_{i+1})$$

Dim.

Ovvio: se eseguo un passo elementare del primo, secondo o terzo tipo, lo spazio generato non cambia.

Come corollario:

$$\operatorname{Span}(A_1, A_2, \dots, A_m) = \operatorname{Span}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m)$$

$$rk\, A = rk\, \hat{A}$$

Se qualche riga di $\hat{A}$ è nulla essa si può scrivere come combinazione lineare delle altre righe, ad esempio imponendo tutti i coefficienti uguali a 0.
Se perciò indichiamo con $\hat{A}_1 \dots \hat{A}_k$ le colonne non nulle, si ha

$$\operatorname{Span}(\hat{A}_1 \dots \hat{A}_m) = \operatorname{Span}(\hat{A}_1 \dots \hat{A}_k)$$

Ma le righe non nulle sono tante quante sono i pivot. Quindi:

$$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, \hat{A} = \#\{\text{righe non nulle}\} = \#\{\text{pivot}\}.$$

Ciò è vero se le righe di $\hat{A}$ non nulle sono una base di Span $(\hat{A}_1, \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_k)$. Analizziamo la matrice $\hat{A}$ eventualmente privata delle righe nulle:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots \end{bmatrix}$$

Dimostrare che le righe non nulle formano una base è facile: prendendo in esame il primo pivot, esso ha sotto di sé solo zeri. Affinché la combinazione lineare dia 0 come risultato, a_1 deve essere 0.

Iterando questo processo tante volte quante sono i pivot, si ha:

$$a_1 \hat{A}_1 + a_2 \hat{A}_2 + \ldots a_k \hat{A}_k = 0 \iff a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

Le righe di $\hat{A}$ non nulle generano, e sono linearmente indipendenti. Perciò sono una base di Span $(\hat{A}_1 \ldots \hat{A}_m)$.

Tutto è stato dimostrato, c.v.d.

SISTEMI LINEARI

Consideriamo il sistema lineare:

$$AX = B$$

Il sistema ha soluzioni?

LEMMA (di Rouché-Capelli)

Sia $(A|B)$ la matrice completa del sistema, comprensiva della colonna dei termini noti, e sia A la matrice dei coefficienti del sistema. Chiaramente $\mathrm{rk}(A|B) \geq \mathrm{rk}\, A$.

Il sistema lineare ha soluzioni se e solo se $B \in \mathrm{Span}(A^1 \ldots A^n)$.

Dunque:

- $\mathrm{rk}\,(A|B) = \mathrm{rk}\, A \iff$ il sistema ha soluzioni;
- $\mathrm{rk}\,(A|B) > \mathrm{rk}\, A \iff$ il sistema non ha soluzioni.

Supponiamo che il sistema $AX = B$ abbia soluzioni, quindi:

$$rk(A|B) = rk\ A$$

Vogliamo calcolare le soluzioni.

Prendiamo in esame due matrici complete (dello stesso "formato"):

$$(A|B) \quad , \quad (A'|B')$$

Per definizione, i due sistemi sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

LEMMA

I sistemi lineari $(A|B)$ e $(\hat{A}|\hat{B})$ sono equivalenti.

Dim.

Consideriamo l'i-esimo passo dell'algoritmo di Gauss:

$$A_i \longrightarrow A_{i+1}$$

Pensato sulle equazioni, qualsiasi passo elementare non altera l'insieme delle soluzioni. Come corollario:

$$(A|B) = (\hat{A}|\hat{B}), \text{ c.v.d.}$$

Risolvere il sistema $\hat{A}X = \hat{B}$, però è molto più semplice, se si analizza la matrice $(\hat{A}|\hat{B})$ "dal basso verso l'alto".

Ex. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 9 = 5 \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

INVERTIBILITÀ DI MATRICI

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$.

LEMMA

A è invertibile $\Leftrightarrow$ rk $A = n$

Dim.

Ovvio: se ci fossero righe nulle in $\hat{A}$, non potrei ottenere la matrice identità moltiplicando $\hat{A}$ per una qualche matrice.

Dunque:

- $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ rk $\hat{A} = n \Leftrightarrow A$ è invertibile;
- $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ rk $\hat{A} < n \Leftrightarrow A$ non è invertibile.

Supponiamo che A sia invertibile, ossia:

$$\text{rk } A = n.$$

Per calcolare A^{-1}, considerato che:

$$A^{-1} = \underbrace{\left(X^1 \ldots X^n \right)}_{\text{colonne incognite}},$$

e che:

$$A\left(X^1, X^2 \ldots X^n \right) = AX^1 + \ldots AX^n = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

potrei risolvere gli n sistemi lineari, che si san risolvere:

$$\begin{cases} AX^1 = e_1 \\ AX^2 = e_2 \\ \ldots \\ AX^n = e_n \end{cases}$$

Ma vi è un altro modo, nettamente più efficiente, che fa uso dell'algoritmo di Gauss.

Una "matrice elementare rispetto alle righe" $n \times n$ si ottiene, per definizione, partendo da I_n e agendo con operazioni elementari del primo, secondo o terzo tipo.

Ex. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice elementare di tipo 1;
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice elementare di tipo 2;
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice elementare di tipo 3.

Chiaramente, se E è elementare di tipo $* \in \{1, 2, 3\}$, allora è invertibile, e E^{-1} è invertibile dello stesso tipo.

Per le matrici $m \times n$, si ha quanto segue:

$$A \xrightarrow[P_*]{} A' \qquad I_m \xrightarrow[P_*]{} E$$

$$A' = EA$$

Ex.
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = A'$;

  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; $EA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A'$.

  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Introduciamo dunque l'"algoritmo raffinato di Gauss", che una volta ottenuta una matrice a scalini, agisce su di essa mediante operazioni del terzo tipo, per ottenere la matrice identità, o una molto simile ad essa (del tipo $J_r(m, n)$).

Nel caso di matrici quadrate:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow[P_1]{} & A_1 & \xrightarrow[P_2]{} & A_2 & \xrightarrow[P_3]{} & \dots & \xrightarrow[P_k]{} & A_k = \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & E_1 & & E_2 & & E_3 & & E_k & \end{array}$$

$$(E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1) A = \hat{A}$$

Applichiamo un "Gauss raffinato":

$$\hat{A}_0 \xrightarrow[G_1]{} \hat{A}_1 \xrightarrow[G_2]{} \dots \xrightarrow[G_s]{} \hat{A}_s = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 \downarrow E_{k+1} \qquad G_2 \downarrow E_{k+2} \qquad G_s \downarrow E_{k+s}$$

$$(E_{k+s} \dots E_{k+1}) \hat{A} = \underbrace{(E_{k+s} \dots E_{k+1} E_k \dots E_1)}_{A^{-1}} A = I_n$$

In definitiva:

$A \in M(n, \mathbb{K})$; $rk\, A = n$

$$A \xrightarrow{\text{Gauss raffinato}} I$$

$$I \xrightarrow{\text{stesse operazioni}} A^{-1}$$

COROLLARIO

Ogni matrice invertibile $A \in M(n, \mathbb{K})$ è il prodotto di un numero finito di matrici elementari.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$;

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^{-1}$.

Nel caso di matrici generiche, l'"algoritmo raffinato di Gauss" permette di determinare le matrici che moltiplicate a quella data, danno una matrice del tipo $J_r(m, n, \mathbb{K})$.

Dunque:

$A \in M(m, n, \mathbb{K})$ $\qquad rk\, A = r \le \min(m, n)$

Allora:

$\exists\, P \in M(m, \mathbb{K})$, $\exists\, Q \in M(n, \mathbb{K})$ $\ni$:

$$P \cdot A \cdot Q = J_r(m, n) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Applicando l'algoritmo di Gauss, quindi:

$$A \longrightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & ? \\ 0 & \ddots & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Applicando queste operazioni su I_m, ottengo P.
Applico poi Gauss raffinato sulle colonne:

$$\tilde{A} \longrightarrow J_r(m,n) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Applico le stesse operazioni su I_n, ottengo Q.
P e Q sono tali che:

$$P\,A\,Q = J_r(m,n)$$

TRASLAZIONI E SPAZI AFFINI

Consideriamo un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ di un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale finitamente generato:

$$W = Span(\{v_1, \dots, v_k\})$$

W può anche essere pensato come lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo:

$$W = \{ SOL. \ AX = 0 \}$$

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$W = Ker\ A$$

Ex. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline x_1 & x_2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & x_2 - x_1 \end{array}\right] \Rightarrow W = \{ SOL. \ \{ x_2 - x_1 = 0 \} = Span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se il sistema è omogeneo, W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Si consideri ora il sistema lineare $AX = B$, $B \neq 0$.
Se vi sono soluzioni (ovvero se e solo se $rk(A|B) = rk A$), l'insieme delle soluzioni non costituisce uno spazio vettoriale, poiché ad esempio:

$$A \cdot 0 = 0 \neq B$$
$$\Downarrow$$
$$0 \notin B,$$

mentre un sottospazio vettoriale contiene, per definizione, lo 0.

Consideriamo però una soluzione particolare X_0 del sistema $AX = B$. Consideriamo $W = \{ Sol. \ AX = 0 \}$ (sistema omogeneo associato).

Allora:

LEMMA

X è soluzione di $AX = B \Leftrightarrow Y = (X - X_0) \in W$

Dim

Dimostriamo la prima implicazione

Per ipotesi, $AX = AX_0 = B$.

Allora:

$AY = A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0$

$Y \in W$

Dimostriamo la seconda implicazione. Per ipotesi:

$$AX_0 = B \quad , \quad AY = A(X - X_0) = 0$$

Allora:

$AY + AX_0 = A(X - X_0) + AX_0 = AX - AX_0 + AX_0 = AX$

$AY + AX_0 = 0 + B = B$

$$AX = B \quad , \quad c.v.d.$$

ESERCIZI VARI

Ex. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 5y + 4z + t = 5 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + 5y + 3z + t = 10 \end{cases}$

Le soluzioni saranno del tipo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Dunque:

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right] = A|B \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

AX è risolubile $\Leftrightarrow B \in \operatorname{Imm} A \Leftrightarrow \operatorname{rk} A|B = \operatorname{rk} A$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\#\{\text{pivot}\}\ 3$

$\operatorname{rk} A|B = \operatorname{rk} A$

Perciò:

$$\begin{cases} z = t - 5 \\ y = t + 5 \\ x = -3y - 2z + 5 = -t \end{cases}$$

$$\text{Sol.} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t+5 \\ -t-5 \\ t \end{bmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

In particolare:

- $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema $AX = B$;

- $\left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sono le infinite soluzioni del SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $AX = 0$.

In particolare, $W = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1:

$$\dim W = 1$$

Le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ si ottengono pertanto mediante una traslazione dello spazio vettoriale W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $AX = 0$.

Se $AY = B$:

$$\text{Sol.} = \{ X + Y \mid AX = 0 \}$$

Dim.

Sia W una soluzione del sistema $AX = B$. Allora:

$$AW = B, \; AY = B \Rightarrow AW - AY = A(W - Y) = B - B$$

Dunque $W - Y = X$ è soluzione del sistema $AX = 0$:

$$\text{Sol} \subseteq \{ X + Y \mid AX = 0 \}$$

Siano ora X una soluzione di $AX = 0$, Y la soluzione particolare di $AX = B$. Allora:

$$AX + AY = A(X + Y) = 0 + B = B$$

Dunque:

$$\{ X + Y \mid AX = 0 \} \subseteq \text{Sol}$$

Perciò si è l'uguaglianza:

$$\text{Sol.} = \{ X + Y \mid AX = 0 \}, \text{ c.v.d.}$$

Ex. Si consideri l'applicazione lineare f così definita:

$$f : S(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \longrightarrow (2a - b,\ a + c,\ a - b + c)$$

Si calcoli una base di $\operatorname{Ker} f$, e si determini la matrice associata $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$, ove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $S(2)$, e $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Innanzitutto:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

$$\mathcal{C} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$$

1) $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 1, 1) \Rightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, -1) \Rightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

3) $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, -1) \Rightarrow [f(v_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

La matrice associata, perciò, è:

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Analizziamo ora $\operatorname{Ker} f$. Innanzitutto, per la formula delle dimensioni:

$$\dim S(2) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

$$3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

Inoltre:

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = A [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} A$$

$$\Downarrow$$

$$3 = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rk} A$$

Analizziamo rk A:

$$\text{rk}\, A = \dim \text{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Analizzando le tre colonne:

$$A^1 + 2A^2 - A^3 = 0$$

$$Ae_1 + 2Ae_2 - Ae_3 = 0$$

$$A(e_1 + 2e_2 - e_3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(1, 2, -1)$$

Questo vettore è una base del Ker A?

A^2 e A^3 sono palesemente linearmente indipendenti, perciò:

$$\text{rk}\, A = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \text{Ker}\, A = 1$$

Dunque:

$$\{(1, 2, -1)\} \text{ è una base di Ker } A$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\right\} \text{ è una base di Ker } f.$$

Ex. Facendo riferimento all'esercizio precedente, si determinino una base $\mathcal{B}'$ di $S(2)$ e una base $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{R}^3$ tali che:

$$A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = J_2(3,3)$$

Analizzando la matrice A' risulta evidente che, se:

$$\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$$

$$\mathcal{C}' = \{w_1', w_2', w_3'\},$$

allora:

$$v_3' \in \text{Ker}\, f \implies v_3' = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

Completiamo la base a piacere:

$$\mathcal{B}' = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\right\}.$$

Volendo generare $\mathcal{C}'$, si ricordi che:

$$\left[f(v_i)\right]_{\mathcal{C}'} = A \left[v\right]_{\mathcal{B}'}$$

Risulta necessariamente che:

- $w_1' = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- $w_2' = f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Completiamo a piacere la base:

$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ex. Facendo riferimento all'esercizio precedente, si determinino le matrici di cambiamento di base.

Analizziamo lo schema:

$$\begin{tikzcd}
S(2) \arrow[r, "f \approx A"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "Id_{\mathbb{R}^3} = M"] \\
S(2) \arrow[u, "Id_{S(2)} = N"] \arrow[r, "f \approx A'"] \arrow[r, dashed, bend left=60] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$f = Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{S(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$A' = M \cdot A \cdot N$$

"Ricollezioniamo" le basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \; ; \; \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \; ; \; \mathcal{C}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Generiamo $N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_{S(2)})$:

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\bullet \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\
\bullet \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{array}\right\} \Rightarrow N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_{S(2)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Generiamo $M = M^{e}_{e'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:

- $\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]_{e'} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2a = 1\\ a+b=0\\ a-b+c=0\end{cases} \begin{cases}a = \frac{1}{2}\\ b = -\frac{1}{2}\\ c = -1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]_{e'} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix};$$

- $\left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]_{e'} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a = 0\\ b=1\\ -b+c=0\end{cases} \begin{cases}a = 0\\ b = 1\\ c = 1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]_{e'} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};$$

- $\left[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]_{e'} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$

Dunque:

$$M = M^{e}_{e'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Infatti:

$$MAN = M\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right], \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

In questo problema si è sfruttata la seguente proprietà:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "f"] & W_{\mathcal{B}} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "{[\ ]_{\mathcal{B}'}}"] \arrow[r, dashed, "A"'] \arrow[r, bend left] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Considero $e_1 \in \mathbb{K}^n$:

- $Ae_1 = A^1$;
- $e_1 \rightarrow v_1 \longrightarrow f(v_1) \longrightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{B}}$ $\quad \Rightarrow A^1 = [f(v_1)]_{\mathcal{B}}$.

Ex. Determinare l'insieme E così definito:

$$E = \{ A \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \ \ \forall B \in M(n, \mathbb{K}) \}$$

SECONDO METODO

Dunque:

$$A \in E \Rightarrow AB = BA \ \ \forall B \in GL(n, \mathbb{K})$$

Perciò:

$$\forall B \in GL(n, \mathbb{K}) : \ B^{-1} A B = B^{-1} \cdot B A = A$$

$$\forall B \in GL(n, \mathbb{K}) : \ B^{-1} A B = A$$

Costruiamo dunque il seguente schema:

$\mathcal{F} = \{ v_1 \dots v_n \}$ base generica di $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{E} = \{ e_1 \dots e_n \}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n_{\mathcal{E}} \arrow[d, "M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(Id_{\mathbb{K}^n}) = B"] \\
\mathbb{K}^n_{\mathcal{F}} \arrow[u, "M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{K}^n}) = B^{-1}"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend left] & \mathbb{K}^n_{\mathcal{F}}
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(A) = A$$

e vogliamo che, per ogni base $\mathcal{F}$, valga:

$$M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(A) = A$$

Consideriamo dunque $\mathcal{F}' = \{ -e_1, e_2, \dots, e_n \}$.

Si ha:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(Ae_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(A^1) \qquad M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'}(A(e_1)) = M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'}(-Ae_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n,1} \end{bmatrix} = M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'}(A^1)$$

Dato che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(A^1) = M^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'}(A^1)$, risulta che

$$a_{2,1} = a_{3,1} = \dots = a_{n,1} = 0$$

Ripetendo n volte questo ragionamento, si dimostra che A è di tipo diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \ \ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora $\mathcal{S}'' = \{e_2, e_1, \dots, e_n\}$.
Si ha che:

$$M^{\mathcal{S}''}_{\mathcal{S}''}(A e_2) = M^{\mathcal{S}''}_{\mathcal{S}''}(A^2) = \begin{bmatrix} a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{e}_{e}(A^1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{\mathcal{S}''}_{\mathcal{S}''}(A^1) = M^{e}_{e}(A^1)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{22} = a_{11}$$

Ripetendo n volte questo ragionamento, si deduce che:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \lambda I \,,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{, c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Si osservi che, per ogni base del tipo di $\mathcal{S}'$, la matrice di cambiamento di base è di tipo diagonale; per ogni base del tipo di $\mathcal{S}''$, la matrice di cambiamento di base è di tipo simmetrico (si noti che le matrici diagonali sono anche simmetriche).
Ad esempio:

$$M^{e}_{\mathcal{S}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{e}_{\mathcal{S}''}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & 0 & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

Se quindi denotiamo con E' il seguente insieme:

$$E' = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \quad \forall B \in S(n, \mathbb{K})\}$$

Si ha:

$$E = E'.$$

SPAZIO DUALE

Considerato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, si definisce SPAZIO DUALE di V l'insieme delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{K}$:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

Ogni omomorfismo $\varphi \in V^*$, $\varphi : V \to \mathbb{K}$ è detto FUNZIONALE su V.

Sia ora W un altro $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si considerino gli omomorfismi da uno spazio all'altro:

$$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \quad , \quad f : V \to W$$

Si ha che l'APPLICAZIONE DUALE o TRASPOSTA di f è così definita:

$$V^* \xleftarrow{f^t} W^*$$

Si osservi ora che:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$\varphi \in W^* \quad , \quad \varphi \circ f \in V^*$$

$$f^t(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ f .$$

MATRICI RIGA E MATRICI TRASPOSTE

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, di dimensione n, e sia $\mathbb{K}$ il campo degli scalari di V.
Allora, fissate le basi:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ base di } V$$
$$\mathcal{K} = \{1\} \text{ base di } \mathbb{K}$$

Si può considerare il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{K}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}(\varphi)"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

È evidente dunque che l'insieme dei funzionali sia isomorfo allo spazio delle matrici riga:

$$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} M(1, n, \mathbb{K})$$
$$\varphi \longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}(\varphi)$$

Lo spazio vettoriale $M(1, n, \mathbb{K})$, essendo uno spazio standard, ha una base canonica:

$$\mathcal{B}^* = \{e_1^t, e_2^t, \dots, e_n^t\},$$

ove $\forall\ 1 \leq i \leq n$: $e_i^t = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{-esima colonna} \end{array}$.

L'immagine inversa di $\mathcal{B}^*$ tramite $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}(\varphi)$ fornisce una base di V^*:

$$\mathcal{B} = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\} \text{ base di } V^*$$

La base di V^* così costruita è chiamata BASE DUALE, ed è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \iff i = j; \\ 0 \iff i \neq j. \end{cases}$$

Il simbolo δ_{ij} è detto SIMBOLO DI KRONECKER.

SPECIALIZZAZIONE AGLI SPAZI STANDARD

In generale, abbiamo:

$$V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} V^*_{\mathcal{B}^*}$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$
$$\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^* \dots v_n^*\}$$

Nel caso degli spazi standard, invece:

$V = \mathbb{K}^n$

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} M(1, n, \mathbb{K})$$

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$$
$$\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^* \dots e_n^*\} = \{e_1^t, e_2^t \dots e_n^t\}$$

Perciò è evidente che una matrice colonna vada nella sua trasposta:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow [x_1 \dots x_n] = X^t$$

Dunque:

$$[v]_{\mathcal{B}} \to [\varphi]_{\mathcal{B}^*}, \varphi \in M(1, n, \mathbb{K})$$
$$X \to X^t.$$

OMOMORFISMI E MATRICI TRASPOSTE

Consideriamo due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W, tali che:

$$\dim V = n \quad , \quad \dim W = m$$

siano:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \text{ base di } V$$
$$\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_m\} \text{ base di } W.$$

Consideriamo un omomorfismo da V in W:

$$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \quad , \quad f : V \to W,$$

e si consideri la matrice indotta:

$$A = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Consideriamo ora:

$$V^* \xleftarrow{f^t} W^*$$

$$B = M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{D}^*}(f^t)$$

Si ha $B = A^t$, ossia:

$$M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{D}^*}(f^t) = [M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)]^t.$$

Dim.

$\forall\, 1 \le i \le n : f(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots a_{mi} w_m$

Dunque:

$\forall\, 1 \le i \le n,\ \forall\, 1 \le j \le m : f^t(w_j^*)(v_i) = w_j^*(f(v_i)) = a_{ji},$

per le proprietà della base duale. Quindi:

$\forall\, j,\ 1 \le j \le m : f^t(w_j^*) = a_{j1} v_1^* + a_{j2} v_2^* \dots a_{jn} v_n^*$

Trasformando in coordinate, si ha la tesi:

$$M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{D}^*}(f^t) = [M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)]^t, \text{ c.v.d.}$$

Analogamente, sfruttando l'isomorfismo tra V e V^*, e il fatto che

$$\{e_1^t, e_2^t \dots e_n^t\} \rightsquigarrow \{v_1^*, v_2^* \dots v_n^*\}$$

si può concludere che:

$$M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{D}^*}(f^t) = [M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)]^t, \text{ c.v.d.}$$

ANNULLATORE

Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, e un suo sottospazio W, tali che:

$$\dim V = n \quad , \quad \dim W = k \leq n .$$

Si definisce ANNULLATORE di W:

$$\operatorname{Ann} W = \left\{ \varphi \in V^* \mid \varphi|_W = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \varphi \in V^* \mid W \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \right\} =$$
$$= \left\{ \varphi \in V^* \mid \forall\, w \in W : \varphi(w) = 0 \right\}$$

Si ha che:

- $\operatorname{Ann} W$ è un sottospazio di V^*.

Dim.

$\varphi : V \to 0 \in \operatorname{Ann} W$, poiché $f(v) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow$
$\Rightarrow f(w) = 0 \ \forall w \in W$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \in \operatorname{Ann} W \\ \varphi_2 \in \operatorname{Ann} W \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1(w) + \varphi_2(w) = (\varphi_1 + \varphi_2)(w) = 0 + 0 = 0 \ \forall w \in W;$$

$$\varphi \in \operatorname{Ann} W \Rightarrow (\lambda\varphi)(w) = \lambda\,\varphi(w) = \lambda \cdot 0 = 0 \ \forall w \in W.$$

- $\dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W$

Dim.

Sia $\{w_1 \dots w_k\}$ una base di W; estendendola a $\{w_1 \dots w_n\}$ base di V; considero a questo punto la base duale:

$$\{ w_1^* \dots w_k^* \ w_{k+1}^* \dots w_n^* \}$$

Consideriamo il seguente gruppo di vettori:

$$\{ w_{k+1}^* \dots w_n^* \}$$

- $\forall\, 1 \leq i \leq k,\ \forall\, k+1 \leq j \leq n : w_j^*(w_i) = 0 \Rightarrow \forall\, k+1 \leq j \leq n : w_j^* \in \operatorname{Ann} W;$
- i vettori $w_{k+1}^* \dots w_n^*$, per costruzione, sono linearmente indipendenti;
- i vettori $w_{k+1}^* \dots w_n^*$ generano $\operatorname{Ann} W$. Infatti, sia:

$$\varphi \in \operatorname{Ann} W$$

Dunque:

$$\varphi = a_1 \omega_1^* + a_2 \omega_2^* + \dots + a_k \omega_k^* + a_k \omega_{k+1}^* \dots a_n \omega_n^*$$

Ora:

$$\varphi \in \mathrm{Ann}\, W \Rightarrow \varphi(w_1) = a_1 \underbrace{\omega_1^* w_1}_{1} + \underbrace{a_2 \omega_2^* w_1 + \dots}_{0} = a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Ripetendo k volte queste considerazioni:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

Dunque:

$$\varphi \in \mathrm{Ann}\, W \Rightarrow \varphi = a_{k+1} \omega_{k+1}^* \dots a_n \omega_n^*$$

$$\mathrm{Span}(\omega_{k+1}^* \dots \omega_n^*) = \mathrm{Ann}\, W$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \mathrm{Ann}\, W = n - k = \dim V - \dim W, \text{ c.v.d.}$$

COMPARAZIONE DI RANGHI

Dati due spazi vettoriali finitamente generati, si considerino i seguenti schemi:

$$V \xrightarrow{f} W \qquad\qquad V^* \xleftarrow{f^t} W^*$$

Allora:

$$\dim \operatorname{Imm} f = \dim \operatorname{Imm} f^t$$
$$\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^t$$

COROLLARIO

Nel caso di matrici $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, si ha:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^t$$

Dim.

$$\dim W^* = \dim \operatorname{Ker} f^t + \dim \operatorname{Imm} f^t$$

Ora:

- $\dim W^* = \dim W$;
- $\operatorname{Ker} f^t = \{ \varphi \in W^* \mid f^t(\varphi) = 0 \} = \{ \varphi \in W^* \mid \forall v \in V : \varphi(f(v)) = 0 \} = \operatorname{Ann} \operatorname{Imm} f$
- $\operatorname{Imm} f \subseteq W \Rightarrow \dim \operatorname{Ann} \operatorname{Imm} f = \dim W - \dim \operatorname{Imm} f$

Dunque:

$$\cancel{\dim W^*} = \dim \operatorname{Ker} f^t + \dim \operatorname{Imm} f^t$$
$$\cancel{\dim W} = \cancel{\dim W} - \dim \operatorname{Imm} f + \dim \operatorname{Imm} f^t$$
$$\dim \operatorname{Imm} f = \dim \operatorname{Imm} f^t \text{, c.v.d.}$$

RAPPRESENTAZIONI CARTESIANA E PARAMETRICA DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Per facilitare la comprensione, si usino gli spazi standard.
Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ il sottospazio vettoriale così definito:

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \,,\ 2x + 5y + t = 0 \}$$

Innanzitutto, esso è un sottospazio vettoriale, perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo:

$$W = \left\{ \text{Sol} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

Ora, consideriamo la matrice associata al sistema lineare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo considerare $W = \text{Ker } A$, ossia:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Questa si definisce RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEL SOTTOSPAZIO.
Si noti che il sottospazio è stato espresso in termini di NUCLEO di un'applicazione lineare.

Ora, riduciamo "a scalini" la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \hat{A}$$

Si ha che:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker } A + \text{rk } A$$
$$4 = \dim \text{Ker } A + 2$$
$$\dim \text{Ker } A = 2$$

Consideriamo il sistema associato a $\hat{A}$, e calcoliamo x e y in funzione di z e t:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y + z \\ y = -2z - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4z + 2t + z \\ y = -2z - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5z + 2t \\ y = -2z - t \end{cases}$$

Perciò:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 5z + 2t \\ -2z - t \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si ha quindi:

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}5\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti. Inoltre $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$.
Allora i due vettori formano una base

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}5\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \text{ base di } W = \mathrm{Ker}\, A$$

Sia dunque $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$[a, b] \longmapsto a\begin{bmatrix}5\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 2\\-2 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

Si ha:

$$W = \mathrm{Imm}\, \varphi$$

Questa si definisce RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DEL SOTTOSPAZIO. Si noti che il sottospazio è stato espresso in termini di IMMAGINE di un'applicazione lineare.

Si noti come si può "ritornare indietro":

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}5\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \quad ; \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} =$$

$$= a\begin{bmatrix}5\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}5 & 2\\-2 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \text{ ammette soluzioni}$$

Consideriamo ora la matrice completa, e la sua ridotta a scalini:

$$\left[\begin{array}{cc|c}5 & 2 & x\\-2 & -1 & y\\1 & 0 & z\\0 & 1 & t\end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & z\\-2 & -1 & y\\5 & 2 & x\\0 & 1 & t\end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & z\\0 & -1 & y+2z\\0 & 2 & x-5z\\0 & 1 & t\end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & z\\0 & 1 & t\\0 & 2 & x-5z\\0 & -1 & y+2z\end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & z\\0 & 1 & t\\0 & 0 & x-5z-2t\\0 & 0 & y+2z+t\end{array}\right]$$

E si sa bene che il sistema è risolubile se e solo se

$$\begin{cases}x - 5z - 2t = 0\\y + 2z + t = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 5z - 2t = 0\\2y + 4z + 2t = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y - z = 0\\5y + 10z + 5t = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x - 10z - 4t = 0\\5y + 10z + 5t = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y - z = 0\\2x + 5y + t = 0\end{cases}, \text{ c.v.d.}$$

ESERCIZI VARI

Ex. Al variare di $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, discutere la risolubilità di $A_\lambda X = B_\beta$, ove:

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & (2+\lambda) & -\lambda \\ -2 & 2\lambda & (3+\lambda) & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

Riduciamo a scalini la matrice completa "$A_\lambda | B_\beta$":

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & \lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & (2+\lambda) & -\lambda & \beta \\ -2 & 2\lambda & (3+\lambda) & 1 & 2\beta \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & \lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & (2+\lambda) & -\lambda & \beta \\ 0 & \lambda & (2+\lambda) & -1 & 2\beta - 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\dashrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & \lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & (2+\lambda) & -\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & \beta - 3 \end{array}\right]$$

Dunque:

- $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1 \Rightarrow rk\, A = 3 \Rightarrow$ il sistema è sempre risolubile, qualsiasi sia il valore di β;
- $\lambda = 0$
  $$A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad rk\, A = 3 \Rightarrow$$ il sistema è risolubile, qualsiasi sia il valore di β;
- $\lambda = 1$
  $$A'' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad rk\, A = 2 \Rightarrow$$
  - $\beta = 3$: il sistema è risolubile;
  - $\beta \neq 3$: il sistema non ammette soluzioni.

NOTA BENE

Quando il sistema è parametrico, si può ugualmente ottenere un pivot operando sulle righe. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda + 1 \\ 2\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} \leftarrow \text{Pivot}$$

RANGO PER RIGHE E RANGO PER COLONNE

Data una matrice $A \in M(p, n, \mathbb{K})$, denotiamo con:

- $\mathcal{R}(A) = \mathrm{Span}(A_1 \dots A_p) \subseteq \mathbb{K}^n$ lo spazio generato dalle righe di A;
- $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}(A^1 \dots A^n) \subseteq \mathbb{K}^p$ lo spazio generato dalle colonne di A.

Si definiscono:

- RANGO PER RIGHE $= \dim \mathcal{R}(A)$;
- RANGO PER COLONNE (o RANGO, laddove non crei ambiguità) $= \dim \mathcal{C}(A)$.

Si ha che (si consideri S la ridotta a scalini di A):

- $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(S)$

  CONTROESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$;\quad \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \neq \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

- $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S) \Leftrightarrow \mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, S$

  Dim.

  Sappiamo che i sistemi:

$$AX = 0 \quad \text{e} \quad SX = 0$$

  sono equivalenti.

  Allora $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, S \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, S$.

  Dato che $A, S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, per la formula delle dimensioni si ha:

$$\cancel{\dim \mathrm{Ker}\, A} + \dim \mathrm{Imm}\, A = \cancel{\dim \mathrm{Ker}\, S} + \dim \mathrm{Imm}\, S.$$

$$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, S \text{, c.v.d.}$$

- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S)$

  Dim.

  Effettuando una qualsiasi operazione elementare, lo spazio generato non cambia. Come conseguenza:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S) \text{, c.v.d.}$$

• $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(S) = \#\{\text{pivot}\}$

Dim.

Dato che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, S$ e $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S)$, basta dimostrare che, se r è il numero dei pivot in S:

$$\dim \mathcal{C}(S) = \dim \mathcal{R}(S) = r.$$

Considero ora la ridotta a scalini S privata di eventuali righe finali nulle:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & & ? & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_r \end{bmatrix}$$

Esse sono linearmente indipendenti, poiché:

$$p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_r = 0$$
$$\Downarrow$$
$$S_1 = 0 \Rightarrow S_2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow S_r = 0$$

Dunque sono una base di $\mathcal{R}(S)$:

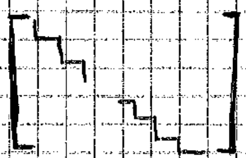
$$\{S_1 \dots S_r\} \text{ base di } \mathcal{R}(S)$$
$$\Downarrow$$
$$\dim \mathcal{R}(S) = r.$$

In una maniera del tutto analoga, si dimostra che, prese le colonne $S^{j_1} \dots S^{j_r}$ contenenti gli r pivot, queste sono linearmente indipendenti:

$$p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_r = 0$$
$$\Downarrow$$
$$S^{j_1} = 0 \Rightarrow S^{j_2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow S^{j_r} = 0$$

Per dimostrare che generano, consideriamo la matrice S^* così formata:

$$S^* = \left[S^{j_1} \,\middle|\, S^{j_2} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, S^{j_r} \right] =$$



Ogni colonna $S^i \in S \setminus S^*$ ha al più r elementi non nulli, dato che $S^i \in \mathbb{K}^r$. Dunque:

$\forall\, S^i \in S \setminus S^* : \mathrm{rk}\, S^i \leq \mathrm{rk}\, S^* = r \Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_r \in \mathbb{K} \ni$
$S^i = \alpha_1 S^{j_1} + \dots \alpha_r S^{j_r}$

Dunque $\{S^{j_1} \dots S^{j_r}\}$ è una base di $\mathcal{C}(S)$. Perciò la tesi:

$$\dim \mathcal{C}(S) = r = \dim \mathcal{R}(S), \text{ c.v.d.}$$

CONSEGUENZA

Un'importante conseguenza è che:

$$rk\ A = rk\ A^t$$

Dim.

$rk\ A^t = \dim \mathcal{C}(A^t) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(S) = r$;

$rk\ A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S) = r$.

Allora:

$$rk\ A = rk\ A^t, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Ogni base di $\mathcal{R}(S)$ è anche una base di $\mathcal{R}(A)$, e viceversa.

INVERTIBILITÀ DELLE MATRICI ELEMENTARI

Si sa che, quando si utilizza l'algoritmo di Gauss:

$$A \xrightarrow{\text{OP. ELEM.}} B$$
$$I \xrightarrow{\text{STESSA OP.}} E$$

$$EA = B$$

Dimostriamo ora che le matrici elementari sono invertibili, esibendo per ognuna di esse un'inversa.

Dim.

- TIPO 1

  Si denoti con E_{ij} la matrice elementare che, rispetto all'identità, presenta le righe i e j scambiate di posto:

  $$I \longrightarrow E_{ij}$$

  Allora $E_{ij} = (E_{ij})^{-1}$. Infatti, se una generica matrice A viene moltiplicata per E_{ij}, l'effetto è una matrice A_{ij}, che rispetto ad A presenta le righe i e j scambiate di posto. Perciò, se $A = E_{ij}$, le righe, per così dire, "ritornano al loro posto"; in altre parole, vengono scambiate fra di loro due volte:

  $$E_{ij} \cdot E_{ij} = I \Rightarrow E_{ij} = (E_{ij})^{-1}$$

- TIPO 2

  Si denoti con $E_i(\alpha)$ la matrice elementare che, rispetto all'identità, presenta l'i-esima riga moltiplicata per α.

  Stesso ragionamento di prima, si ha che:

  $$E_i(\alpha) \cdot E_i(\alpha^{-1}) = I \Rightarrow E_i(\alpha^{-1}) = (E_i(\alpha))^{-1}$$

- TIPO 3

  Si denoti con $E_{ij}(\alpha)$ la matrice elementare che, rispetto all'identità, presenta nella riga i la somma tra la riga i e la riga j, quest'ultima moltiplicata per α. Ragionando come sopra, si ha che:

  $$E_{ij}(-\alpha)\, E_{ij}(\alpha) = I \Rightarrow E_{ij}(-\alpha) = (E_{ij}(\alpha))^{-1}, \text{ c.v.d.}$$

ISOMORFISMI E BASI

Mediante l'algoritmo di Gauss, e sfruttando il fatto che le matrici elementari sono invertibili, possiamo dedurre che:

$$A \longrightarrow E_1 A \longrightarrow E_2 E_1 A \longrightarrow \dots E_k \dots E_2 E_1 A = S$$

Sia $M = E_k \dots E_1$. Essa è il prodotto di funzioni invertibili, dunque è invertibile; essa individua quindi una funzione invertibile, ossia biunivoca: in altre parole, un ISOMORFISMO.

A LIVELLO GRAFICO

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathbb{K}^p \arrow[r, "M"] & \mathbb{K}^p \end{tikzcd}$$

$$S = MA$$

$$S^i = MA^i$$

Si sa che un isomorfismo manda basi in basi. Dunque:

$$\{S^{j_1} \dots S^{j_r}\} \text{ base di } S$$

$$S^{j_1} = MA^{j_1} \; ; \; \dots \; ; \; S^{j_r} = MA^{j_r}$$

$$\Downarrow$$

$$\{A^{j_1} \dots A^{j_r}\} \text{ base di } \mathcal{C}(A) = \operatorname{Imm} A.$$

Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \boxed{2} & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow S = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & 0 \end{bmatrix}$$

base di A $\Longleftarrow$ base di S

ESERCIZI VARI

Ex. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, e un insieme di vettori $v_1 \dots v_k$:

1) decidere se $v_1 \dots v_k$ sono linearmente indipendenti;
2) estrarre una base di $W = \mathrm{Imm}\, A = \mathrm{Span}\,(v_{i_1} \dots v_{i_h})$;
3) completare a una base di V la base di W trovata al punto 2.

PUNTO 2

Dato che $W = \mathrm{Span}\,(\mathcal{C}(A)) = \mathrm{Imm}\, A$, procedo in questo modo:

- creo la seguente matrice:

$$A = \left[v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_k \right] \in M(n, k, \mathbb{K});$$

- riduco A a una matrice $\hat{A}$ ridotta a scalini;
- considero le colonne $\hat{A}^{i_1} \dots \hat{A}^{i_h}$ contenenti i pivot;
- considero i vettori $v_{i_1} \dots v_{i_h}$ che occupano la stessa posizione, rispettivamente, di $\hat{A}^{i_1}, \dots \hat{A}^{i_h}$;
- l'insieme:

$$\{ v_{i_1} \dots v_{i_h} \}$$

è una base di $W = \mathrm{Imm}\, A = \mathrm{Span}\,(\mathcal{C}(A))$.

PUNTO 1

- $h = k \Rightarrow$ i vettori $v_1 \dots v_k$ sono linearmente indipendenti;
- $h < k \Rightarrow$ i vettori $v_1 \dots v_k$ non sono linearmente indipendenti.

PUNTO 3

Considero le seguenti basi:

$$\mathcal{B} = \{ v_{i_1} \dots v_{i_h} \} \text{ base di } W$$
$$\mathcal{C} = \{ e_1 \dots e_n \} \text{ base canonica di } V$$

Considero la seguente matrice:

$$B = \left[v_{i_1} \middle| \dots \middle| v_{i_h} \middle| e_1 \middle| \dots \middle| e_n \right]$$

Riducendola a scalini, esattamente $(n-h)$ vettori tra $e_1 \dots e_n$ risulteranno linearmente indipendenti con $v_{i_1} \dots v_{i_h}$:

$$\{ v_1 \dots v_h, e_{t_1} \dots e_{t_{n-k}} \} \text{ base di } V$$

OSSERVAZIONE

Si è supposto $V = \mathbb{R}^n$; per uno spazio vettoriale qualsiasi, basta considerare "in primis" l'isomorfismo di passaggio alle coordinate.

Ex. Sia $W = \text{Span}\left(1+2x+x^3,\ 2+x^2+x^3,\ -4x+x^2-x^3\right) \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

1) Determinare una base di W;
2) Determinare un complementare di W.

PUNTO 1

Sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base di $\mathbb{R}_3[x]$

Consideriamo l'isomorfismo di passaggio alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$:

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

• Per verificare se essi siano indipendenti o meno:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sulla base del fatto che:

$$\varphi(W) = \mathcal{C}(A),$$

procedo con la riduzione a scalini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

Ora:

- $\text{rk}\, A = \text{rk}\, S = 2$;
- $\{S^1, S^2\}$ base di $\mathcal{C}(S) \Rightarrow \{A^1, A^2\}$ base di $\mathcal{C}(A) = \varphi(W) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ base di W.

PUNTO 2

Considero la seguente matrice:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La riduco a scalini:

$$A \to \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = S$$

Ora:

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \{ v_1, v_2, 1, x \}$ base di $\mathbb{R}_3[x]$;

- $\{1, x\}$ base di Z : $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z \Rightarrow \text{Span}(1, x) = Z$.

Ex. Al variare di $k, b \in \mathbb{R}$ costruire, se possibile, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineare tale che:

$f(1, 1, 0) = (0, 2, 3)$
$f(0, 2, 1) = (1, -3, 2b)$
$f(2, k, 1) = (1, 1, 0)$.

Innanzitutto, poniamo:

$v_1 = (1, 1, 0)$ $\qquad w_1 = (0, 2, 3)$
$v_2 = (0, 2, 1)$ $\qquad w_2 = (1, -3, 2b)$
$v_3 = (2, k, 1)$ $\qquad w_3 = (1, 1, 0)$

Analizziamo questa matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamola:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 \end{bmatrix}$$

Dunque:

- $k \neq 4$: $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ esiste, ed è univocamente determinata;
- $k = 4$: si ha $v_3 = 2v_1 + v_2$. Perciò, se f è lineare:
  $f(v_3) = w_3 = 2(f(v_1)) + (f(v_2)) = 2w_1 + w_2 = (1, 1, 6 + 2b) = (1, 1, 0)$
  - $b = 3 \Rightarrow 6 + 2b = 0 \Rightarrow$ infinite f lineari valide;
  - $b \neq 3 \Rightarrow 6 + 2b \neq 0 \Rightarrow$ nessun'applicazione lineare valida.

RIEPILOGO

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

Sia $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Allora:

$$f : V \longrightarrow W \quad \longrightarrow \quad f^t : W^* \longrightarrow V^*$$

(Si noti che $\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow V \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Id}_V^t = \mathrm{Id}_{V^*} : W^* \longrightarrow V^*$).

Infine, sia:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "f^t"'] & Z^* \arrow[l, "g^t"'] \arrow[ll, bend left, "(g \circ f)^t"] \end{tikzcd}$$

È immediato che:

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$$

Dim.

Sia $\varphi \in Z^*$. Allora:

$(g \circ f)^t \varphi = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^t(g^t(\varphi)) = (f^t \circ g^t)\varphi$, c.v.d.

COROLLARIO

Se f è invertibile, anche f^t è invertibile, e $(f^{-1})^t = (f^t)^{-1}$.

Dim.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_V"'] & W \arrow[r, "f^{-1}"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "f^t"'] & V^* \arrow[l, "(f^{-1})^t"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{Id}_{V^*} = \mathrm{Id}_V^t = \mathrm{Id}_V"] \end{tikzcd}$$

$$f^t \circ (f^{-1})^t = \mathrm{Id}_V^t = \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{V^*}$$

$$\Downarrow$$

$$(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t, \text{ c.v.d.}$$

ISOMORFISMI CANONICI

Consideriamo lo spazio standard $\mathbb{K}^n$. Ovviamente:

$$V^* = M(1, n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}_n$$

Sia $R \in V^*$, $X \in V$:

$$R = [r_1, \dots r_n] \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Allora:

$$\varphi_R(X) = RX = r_1 x_1 + \dots r_n x_n$$

Negli spazi standard si può individuare un ISOMORFISMO CANONICO:

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow V^* \\ \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}_n \\ X &\longrightarrow X^t \end{aligned}$$

Infatti, sfruttando la proprietà caratteristica delle basi duali:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

possiamo considerare la base canonica di $V = \mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$$

e generare la base duale di $V^* = \mathbb{K}_n$:

$$\mathcal{C} = \{e_1^t, e_2^t \dots e_n^t\}$$

e mandare dunque un generico vettore X nel suo trasposto.

Si vede che:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}_n \xrightarrow{[\ ]_{e^*}} \mathbb{K}^n \\ X &\longrightarrow X^t \longrightarrow X \end{aligned}$$

Si ha (e ciò si poteva prevedere per il fatto che $(X^t)^t = X$):

$$[\ ]_{e^*} \circ \varphi = Id_{\mathbb{K}^n}$$

$$\varphi \circ [\ ]_{e^*} = Id_{\mathbb{K}_n}.$$

OMOMORFISMI E TRASPOSIZIONI

Consideriamo gli spazi standard $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ e un omomorfismo:

$$f \in (\mathrm{Hom}\,\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong A \in M(m, n, \mathbb{K})$$

$$f_A(X) = AX$$

Dunque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{K}^m \\ X & \longrightarrow & AX \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n*} & \xleftarrow{f_A^t} & \mathbb{K}^{m*} \\ M(1, n, \mathbb{K}) & \longleftarrow & M(1, m, \mathbb{K}) \\ RA & \longleftarrow & R \end{array}$$

Ex. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{R} \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$RA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9, & 12 \end{bmatrix} \in M(1, 2, \mathbb{K})$$

Dunque $R \cdot A$ è proprio un funzionale su $\mathbb{R}^2$.

Si noti ora che:

$$\begin{array}{ccc} M(1, n, \mathbb{K}) & \xleftarrow{M^{e_n^*}_{e_m^*}(f_A^t)} & M(1, m, \mathbb{K}) \\ RA & \longleftarrow & R \\ \downarrow [\ ]_{e_n^*} & & \downarrow [\ ]_{e_m^*} \\ (RA)^t = A^t R^t & \xleftarrow{A^t} & R^t \\ \mathbb{K}^n & \longleftarrow & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Perciò:

$$M^{e_n^*}_{e_m^*}(f_A^t) = A^t.$$

DEFINIZIONE DI BASI DUALI

Dati due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, V e W, tali che:

- $\dim V = n$;
- $\dim W = m$,

ho che:

- $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ è una base di V;
- $\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_m\}$ è una base di W.

Tramite la proprietà caratterizzante:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

posso dunque definire:

- $\mathcal{B}^* = \{v_1^* \dots v_n^*\}$ base duale di V^*;
- $\mathcal{D}^* = \{w_1^* \dots w_m^*\}$ base duale di W^*.

Allora si osservi il seguente schema:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^1_{\mathcal{B}}(\varphi)"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

(ove $\varphi \in V^*_{\mathcal{B}^*}$).

Si ha:

$$\varphi \to M^1_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

$$V^*_{\mathcal{B}^*} \to M(1, n, \mathbb{K})$$

$$\mathcal{B}^* \to e^*$$

$$M^1_{\mathcal{B}}(\ )$$

Discorso analogo per $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^*$.

$\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{D}^*$ sono dunque le basi duali di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente.

COROLLARIO

Abbiamo dunque che:

$$V_B \xrightarrow{f} W_{B'} \qquad V^*_{B^*} \xleftarrow{f^t} W^*_{B'^*}$$

Un utile e immediato corollario ci dice che:

$$\left(M^{B}_{B'}(f)\right)^t = M^{B'^*}_{B^*}(f^t)$$

SPAZIO BIDUALE

Considerato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n (V) e il suo duale V^*, possiamo considerare il DUALE di V^*, meglio noto come BIDUALE di V, e indicato con V^{**}.
Si ha che V è isomorfo a V^{**}, essendo V^* isomorfo a V^{**} e V isomorfo a V^*.

Perciò, analogamente rispetto a quanto fatto per la base duale, se:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\} \text{ base di } V$$
$$\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots v_n^*\} \text{ base di } V^*, \ni v_i^*(v_j) = \delta_{ij},$$

allora:

$$\mathcal{B}^{**} \{v_1^{**}, \dots v_n^{**}\} \text{ base di } V^{**}, \ni v_i^{**}(v_j^*) = \delta_{ij}$$

è la BASE BIDUALE di V.

Apparentemente l'isomorfismo $\varphi: V \to V^{**}$ dipende dalla base $\mathcal{B}$ di V, ma...

TEOREMA
Esiste un isomorfismo canonico:

$$F: V \to V^{**}$$

Tale che:
$\forall\, \mathcal{B}$ base di V:

$$\varphi_{\mathcal{B}}: V \to V^*, \quad \varphi_{\mathcal{B}^*}: V^* \to V^{**}$$
$$\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}} = F$$

Dim.
Sia $v \in V$, sia $\varphi \in V^*$. Allora:

$$V \longrightarrow V^* \longrightarrow V^{**}$$
$$v \longrightarrow \varphi \longrightarrow \varphi_v$$

$\varphi_v \in V^{**} \Rightarrow \varphi_v : V^* \to \mathbb{K}$.

- φ_v è lineare?
Siano f e $g \in V^*$. Allora:
$\varphi_v(f+g) = (f+g)(v) = f(v) + g(v) = \varphi_v(f) + \varphi_v(g)$;
$\varphi_v(\lambda f) = (\lambda f)(v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f)$, c.v.d.

• F è lineare?

$F_{v_1+v_2} = \varphi_{v_1+v_2}(f)$; $F_{v_1} = \varphi_{v_1}(f)$, $F_{v_2} = \varphi_{v_2}(f)$, $F_{\lambda v} = \varphi_{\lambda v}(f)$

$\varphi_{v_1+v_2}(f) = f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \varphi_{v_1}(f) + \varphi_{v_2}(f)$;

$\varphi_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f)$.

Dunque:

$$\begin{array}{l} F_{v_1+v_2} = F_{v_1} + F_{v_2} \\ F_{\lambda v} = \lambda F_v \end{array} \Rightarrow F \text{ è lineare, c.v.d.}$$

• F è un isomorfismo?

Abbiamo provato che $F \in Hom(V, V^{**})$.

Dato che $\dim V = \dim V^{**}$, basta dimostrare che F è iniettiva:

$$Ker\, F = \{v \in V \mid \varphi_v = 0\} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \ \varphi(v) = 0\}$$

Sia $v \neq 0$. Allora:

$\exists\, \mathcal{B} = \{v, v_2 \dots v_n\}$ base di $V \Rightarrow \exists\, \mathcal{B}^* = \{v^*, v_2^* \dots v_n^*\}$ base di V^*

Ma:

$$v^*(v) = \delta_{ij} = 1$$

Dunque la tesi:

$$Ker\, F = \{0\}, \text{ c.v.d.}$$

Analogamente:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{B}}}"] & V^*_{\mathcal{B}^*} \arrow[r] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{B}^*}}"] & V^{**}_{\mathcal{B}^{**}} \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{B}^{**}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "Id"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "Id"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$F(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Un altro modo di dimostrare la proprietà di isomorfismo di F.

• F è canonica. Infatti, preso $\mathcal{B}$ base di V:

$\forall i, j : F(v_i)(v_j^*) = (v_j^*)(v_i) = \delta_{ij} = (v_i^*)^*(v_j^*) = \psi_{\mathcal{B}}(v_i^*)(v_j^*) =$

$= (\psi_{\mathcal{B}^*} \circ \psi_{\mathcal{B}})(v_i)(v_j^*)$, c.v.d.

ENDOMORFISMI

Dato uno spazio astratto finitamente generato, la struttura:

$$(End(V), +, \cdot, \circ)$$

è un' ALGEBRA.
In particolare, si definisce GRUPPO LINEARE GENERALE l' insieme delle funzioni invertibili (dunque degli endomorfismi lineari veri, detti anche AUTOMORFISMI).

Dato uno spazio standard del tipo $V = \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, l' algebra corrispondente è la seguente:

$$(End(\mathbb{K}^n), +, \cdot, \circ)$$
$$\Downarrow$$
$$(M(n, \mathbb{K}), +, \cdot, \circ),$$

ove l' operazione $\circ$ è il PRODOTTO RIGHE PER COLONNE.
Il corrispondente standard del $GL(V)$, ovvero il $GL(n, \mathbb{K})$, detto GRUPPO LINEARE MATRICIALE, è l' insieme delle matrici $n \times n$ invertibili.

ENDOMORFISMI CONIUGATI E MATRICI SIMILI

Due endomorfismi di uno stesso spazio vettoriale si dicono CONIUGATI (scriveremo $f \sim g$) se:

$\exists\ h \in GL(V) \ni' g = h \circ f \circ h^{-1}$

È una relazione di equivalenza, infatti:

- $f \sim f$, infatti $f = Id \circ f \circ Id^{-1}$;
- $f \sim g \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ h = f \Rightarrow$
  $\Rightarrow f = h^{-1} \circ g \circ h \Rightarrow g \sim f$;
- $f \sim g,\ g \sim e \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1},\ e = k \circ g \circ k^{-1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow e = k \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ k^{-1} = j \circ f \circ j^{-1} \Rightarrow f \sim e$, c.v.d.

Negli spazi standard, due matrici $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, se esiste una matrice $P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che:

$$B = P A P^{-1}$$

si dicono SIMILI.

STUDIO DI $\mathrm{End}(V)/_{\sim}$ e $M(n,\mathbb{K})/_{\sim}$

Consideriamo il seguente disegno (si noti che il passaggio da spazi astratti a spazi standard è garantito dall'isomorfismo di passaggio alle coordinate):

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] \arrow[rrr, bend left, "g"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h)"'] \arrow[rrr, bend right, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h^{-1})"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Si ha che:

- $h \in GL(V) \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) \in GL(n,\mathbb{K})$
- $f \sim g \Leftrightarrow g = h^{-1} \circ f \circ h \,,\ h \in GL(V)$

Allora:

$\forall\, \mathcal{B}$ base di V : $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) \sim M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, poiché le matrici $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h^{-1}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h)\right)^{-1}$ sono l'una l'inversa dell'altra, dunque sono invertibili.

Cambiando interpretazione:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}'}}"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] & V_{\mathcal{B}'} \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Si ha anche che:

$\exists\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di $V \ni' M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$

INVARIANTI

Una proprietà P è detta INVARIANTE se:

$$f \sim g \Rightarrow P(f) = P(g)$$
$$f \nsim g \Leftarrow P(f) \neq P(g)$$

Un invariante è COMPLETO se e solo se:

$$f \sim g \Leftrightarrow P(f) = P(g)$$

Consideriamo lo spazio vettoriale $M(2, \mathbb{K})$, e ricerchiamo degli invarianti.

Sicuramente, il RANGO (ovvero la dimensione dell'immagine) è un invariante.

Si noti che però non è un invariante completo. Infatti, ad esempio, la classe di equivalenza dell'identità (matrice di rango 2) è composta dalla sola identità, e non da tutte le matrici di rango 2:

$$A \sim I \Rightarrow \exists P \in GL(2, \mathbb{K}) \text{ t.c. } A = P I P^{-1} = P P^{-1} = I \Rightarrow A = I$$

$$[I] = \{I\}$$

Consideriamo dunque l'algoritmo di Gauss, per decidere se una matrice è invertibile:

$V = M(2, \mathbb{K})$
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Innanzitutto, se la prima colonna è nulla, A non è invertibile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ non è invertibile}$$

Supponiamo dunque che $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dunque:

- $a \neq 0$;
- $a = 0$, $c \neq 0$.

Vediamo i due casi.

CASO 1

$a \neq 0$

Si ha:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & ba^{-1} \\ c & d \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & d-cba^{-1} \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

Dunque:

- $ad-bc \neq 0 \Rightarrow$ la matrice è invertibile;
- $ad-bc = 0 \Rightarrow$ la matrice non ha rango massimo, quindi non è invertibile.

CASO 2

$a = 0,\ c \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Supposto che $c \neq 0$, perché la matrice sia invertibile è necessario che $b \neq 0$: in altre parole, $bc \neq 0$.
Inoltre, dato che $a = 0$, si ha che $ad = 0$ in ogni caso.
In conclusione, dato che $-bc = ad-bc$, è ancora valido che:

- $ad-bc \neq 0 \Rightarrow$ la matrice è invertibile;
- $ad-bc = 0 \Rightarrow$ la matrice non è invertibile.

DETERMINANTE E PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Data una matrice $A \in M(2, \mathbb{K})$, si definisce DETERMINANTE di A la funzione:

$$\det_2 : M(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow ad - bc$$

$$\det_2 A \overset{def}{=} ad - bc$$

Si ha che:

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det_2 A \neq 0$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI $\det_2$

Le proprietà fondamentali di $\det_2$ sono essenzialmente tre:

- $\det_2 I = 1$

  Infatti:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det_2 I = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1;$$

- $\det_2 (X, X) = 0$

  Infatti:

  $$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \Rightarrow \det_2 (X, X) = ab - ab = 0;$$

- $\det_2$ è bilineare rispetto alle colonne.

  APPLICAZIONI MULTILINEARI

  Dati dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali $V_1, V_2, \ldots V_k, V$, un'applicazione:

  $$\varphi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \longrightarrow V$$

  è detta k-lineare o MULTILINEARE se selezionato uno qualsiasi di quegli spazi, e fissato per ogni spazio $V_1 \ldots V_k$ un vettore $v_1 \ldots v_k$, l'applicazione:

  $$F : V_s \longrightarrow V$$

  $$v \longrightarrow F(v_1 \ldots v_{s-1}, \hat{v}_s, v_{s+1} \ldots v_k)$$

  è lineare.

In questo caso:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$C^1 \quad C^2$$

$$\det_2 A \overset{def}{=} a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Se fisso C^1 / C^2 e faccio variare C^2 / C^1, l'applicazione che ottengo si comporta in modo lineare.
La funzione $\det_2$ è dunque 2-lineare, o BILINEARE.

PROPRIETÀ DERIVATE

- $\det_2 (X, Y) = -\det_2 (Y, X)$

Dim.
$\det_2 (X+Y, X+Y) = \det_2 (X+Y, X) + \det_2 (X+Y, Y) =$
$= \det_2 (X, X) + \det_2 (Y, X) + \det_2 (X, Y) + \det_2 (Y, Y)$

Ora:
- $\det_2 (X+Y, X+Y) = 0$;
- $\det_2 (X, X) = 0$;
- $\det_2 (Y, Y) = 0$.

Quindi:
$$\det_2 (X, Y) + \det_2 (Y, X) = 0$$
$$\det_2 (X, Y) = -\det_2 (Y, X), \text{ c.v.d.}$$

- A non è invertibile $\Rightarrow \det_2 A = 0$

Dim.
Sia $A = [X, \lambda X]$ non invertibile. Allora:
$$\det_2 (X, \lambda X) = \lambda \det_2 (X, X) = \lambda \cdot 0 = 0, \text{ c.v.d.}$$

- Sia $D: M(2, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una funzione che verifica le tre proprietà fondamentali. Allora $D = \det_2$ (UNICITÀ DEL DETERMINANTE).

Dim.

$$D(A) = D\left(a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Usando la terza proprietà fondamentale:

$$D(A) = D\left(a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, a_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + D\left(a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= D\left(a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, a_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + D\left(a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, a_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + D\left(a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) +$$

$$+ D\left(a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= a_{11}a_{12}\, D\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{21}a_{12}\, D\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + a_{11}a_{22}\, D\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + a_{21}a_{22}\, D\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Per le prime due proprietà fondamentali, e per la prima proprietà derivata, si ha:

$$D(A) = -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \Rightarrow D(A) = \det_2 A, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Se $D_\lambda : M(2, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ verifica le proprietà fondamentali 2 e 3, e la proprietà 1 afferma che:

$$D_\lambda\, I = \lambda,$$

allora $D_\lambda(A) = \lambda \det_2 A$.

Dim.

Similmente a prima, si ha:

$$D_\lambda(A) = a_{11}a_{21}\, D_\lambda\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{21}a_{12}\, D_\lambda\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + a_{11}a_{22}\, D_\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} +$$

$$+ a_{21}a_{22}\, D_\lambda\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Per le proprietà fondamentali "1-bis", 2, e per la prima proprietà derivata, si ha:

$$D_\lambda(A) = a_{11}a_{22}\, D_\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - a_{12}a_{21}\, D_\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{21}a_{12} = \lambda \det_2 A, \text{ c.v.d.}$$

FORMULA DEL PRODOTTO
(DI CAUCHY - BINET)

Siano $A, B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{K})$. Si ha

$$\det_2 (A \cdot B) = \det_2 A \cdot \det_2 B$$

Dim.

Definisco la funzione D, tale che

$$D(B) = \det_2 (AB)$$

La funzione D verifica le seguenti proprietà:

- $D(I) = \det_2 (AI) = \det_2 A$;
- $D(X, X) = \det_2 (A(X, X)) = \det_2 (AX, AX) = 0$,
- D è bilineare:

Sia $B = \left[B^1 \middle| \alpha C^1 + \beta C^2 \right]$. Allora:

$$\begin{aligned} D(B) &= \det_2 (AB) = \det_2 \left(A \left(B^1, \alpha C^1 + \beta C^2 \right) \right) = \det_2 (AB^1, AC^1 \alpha) + \\ &+ \det_2 (AB^1, AC^2 \beta) = \alpha \det_2 (AB^1, AC^1) + \beta \det_2 (AB^1, AC^2) = \\ &= \alpha D(B^1, C^1) + \beta D(B^1, C^2), \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

Dunque, se $\lambda = \det_2 A$, si ha:

$$D(B) = \lambda \det_2 B$$

$$\Downarrow$$

$$\det_2 (AB) = \det_2 A \cdot \det_2 B, \text{ c.v.d.}$$

INVARIANZA COMPLETA DEL DETERMINANTE

Intendiamo dimostrare ora l'invarianza completa di $\det_2$.

In base a osservazioni precedenti, sappiamo che:

$$A \text{ non è invertibile} \Rightarrow \det_2 A = 0,$$

dunque per dimostrare l'invarianza completa, ossia:

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det_2 A \neq 0$$

ci resta da dimostrare che:

$$A \text{ è invertibile} \Rightarrow \det_2 A \neq 0$$

Dim.

Consideriamo le matrici $A, A^{-1} \in M(2, \mathbb{K})$, l'una l'inversa dell'altra.

Si ha:

$$\det_2 A \cdot \det_2 A^{-1} = \det_2 (A \cdot A^{-1}) = \det_2 I = 1$$

Ciò implica che né $\det_2 A$, né $\det_2 A^{-1}$ siano nulli, c.v.d.

COROLLARIO

Per quanto detto prima, segue immediatamente che:

$$\det_2 A^{-1} = (\det_2 A)^{-1}$$

Abbiamo dunque dimostrato che il determinante è un invariante completo per matrici invertibili o meno, in $M(2, \mathbb{K})$.

Il determinante è un invariante per similitudine, per matrici 2×2. Se infatti $A \sim B$, ossia $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $PAP^{-1} = B$:

$$\det_2 B = \det_2 (P A P^{-1}) = \det_2 P \det_2 A \det_2 P^{-1} =$$
$$= \det_2 A \det_2 P \det_2 P^{-1} = \det_2 A \det_2 I = \det_2 A, \text{ c.v.d.}$$

Si noti che lo spazio quoziente, però, non ha cardinalità finita. Infatti:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \exists \ A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ t.c. } \det_2 A_\lambda = \lambda$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo una classe di equivalenza. Queste sono infinite, quindi:

ESERCIZI VARI

PREMESSA

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali tali che:

- $\dim V = n$;
- $\dim W = p$.

Siano:

- $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V;
- $\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_p\}$ una base di W.

Si ha che la seguente applicazione:

$$\alpha = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\ ) : Hom(V, W) \longrightarrow M(p, n, \mathbb{K})$$
$$f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$$

è un isomorfismo. Dunque, ad esempio, $\dim Hom(V, W) = pn$.

Dunque, se E è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, W)$ con determinate caratteristiche, dato che:

$$\alpha|_E : E \longrightarrow \alpha(E)$$

è un isomorfismo, allora:

$$\dim E = \dim \alpha(E).$$

Ex Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali tali che:

- $\dim V = n$;
- $\dim W = p$.

Siano U e Z sottospazi vettoriali di V e W rispettivamente, tali che:

- $\dim U = h \leq n$;
- $\dim Z = k \leq p$.

Sia $E = \{f \in Hom(V, W) \mid Ker f \supseteq U, Im f \subseteq Z\}$

Si calcoli $\dim E$.

Innanzitutto, dimostriamo che E è un sottospazio vettoriale di E:

- Consideriamo $f = 0$. Si ha che $Ker f = V \supseteq U$, $Im f = 0 \subseteq Z$ per definizione di sottospazio. Perciò: $f = 0 \in E$;

• $f, g \in E$. Allora:

• $\operatorname{Ker} f \supseteq U$
• $\operatorname{Ker} g \supseteq U$ $\Rightarrow U \subseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(f+g)$;

• $\operatorname{Imm} f \subseteq Z$
• $\operatorname{Imm} g \subseteq Z$ $\Rightarrow \forall\, v \in \operatorname{Imm}(f+g)\ \exists\, x \in V$ t.c. $v = (f+g)(x) =$
$= f(x) + g(x)$

$f(x) \in Z,\ g(x) \in Z \Rightarrow (f+g)(x) \in Z \Rightarrow \operatorname{Imm}(f+g) \subseteq Z$.

Dunque $(f+g) \in E$.

• $f \in E$. Fissato un $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha:

• $\operatorname{Ker} f \supseteq U \Rightarrow \operatorname{Ker} \lambda f = \{v \in V \mid (\lambda f)(v) = \lambda(f(v)) = 0\} =$
$= \{v \in V \mid f(v) = 0\} = \operatorname{Ker} f \supseteq U$;

• $\operatorname{Imm} f \subseteq Z \Rightarrow \forall\, v \in \operatorname{Imm} f : v \in Z \Rightarrow \forall\, v \in V : \lambda v \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Imm} \lambda f \subseteq Z$.

Dunque $(\lambda f) \in E$.

Perciò E è un sottospazio vettoriale.

Per calcolare la dimensione di E, calcolo quella di $\alpha(E)$:

$$\alpha(E) = \{ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) \mid f \in E \}$$

Le basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{D}$ di W sono da scegliere in modo opportuno.

Siano:
• $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2 \dots u_h\}$ una base di U;
• $\mathcal{D}^* = \{z_1, z_2 \dots z_k\}$ una base di Z.

Si completino a basi di V e W rispettivamente:
• $\mathcal{B} = \{u_1, u_2 \dots u_h, v_{h+1} \dots v_n\}$ base di V;
• $\mathcal{D} = \{z_1, z_2 \dots z_k, w_{k+1} \dots w_p\}$ base di W.

Allora, presa $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, si avrà che:

$$\alpha(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{array}{c} \quad\quad n-h \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} k \\ \end{array}, \quad M \in \mathcal{M}(k, n-h, \mathbb{K}).$$

Poichè $f(u_1) \dots f(u_h) = 0$, e poichè ogni vettore è esprimibile come combinazione lineare di $z_1, \dots z_k$.

Abbiamo dunque dimostrato che:

$$d(E) \subseteq \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \;\middle|\; M \in M(k, n-h, \mathbb{K}) \right\}$$

Vale l'altra implicazione?

Sì, poichè, se M è di quella forma, allora:

- $\operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Span}(u_1, u_2 \dots u_h) = U$;
- $\operatorname{Imm} f \subseteq \operatorname{Span}(z_1, z_2 \dots z_k) = Z$.

Dunque:

$$d(E) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \;\middle|\; M \in M(k, n-h, \mathbb{K}) \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim E = \dim d(E) = k(n-h).$$

Es. Si consideri lo spazio vettoriale $M(n, \mathbb{K})$, e i suoi due sottospazi $S(n, \mathbb{K})$ delle matrici simmetriche e $A(n, \mathbb{K})$ di quelle antisimmetriche.

Si dimostri che:

$$M(n, \mathbb{K}) = S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K})$$

Prima di tutto, occorre verificare l'esistenza della somma diretta:

$$M \in S(n, \mathbb{K}) \cap A(n, \mathbb{K}) \Rightarrow M = M^t = -M \Rightarrow M = -M \Rightarrow M = 0$$

Si può dunque parlare di somma diretta.

Per concludere, si noti che:

- certamente $M(n, \mathbb{K}) \supseteq S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K})$
- $\dim M(n, \mathbb{K}) = n^2$;
- $\dim S(n, \mathbb{K}) + \dim A(n, \mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$.

Se due spazi vettoriali hanno stessa dimensione, e uno dei due è contenuto nell'altro, allora sono uguali:

$$M(n, \mathbb{K}) = S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K}), \text{ c.v.d.}$$

Analogamente:

$\forall M \in M(n, \mathbb{K})\ \exists S \in S(n, \mathbb{K})$ e $\exists A \in A(n, \mathbb{K})$ t.c. $M = S + A$.

Infatti, si può effettuare quello che viene chiamato SPEZZAMENTO nelle parti simmetrica e antisimmetrica:

$$M = \frac{M + M^t}{2} + \frac{M - M^t}{2}$$

Si ha:

- $\left(\frac{M + M^t}{2}\right)^t = \frac{M^t + (M^t)^t}{2} = \frac{M^t + M}{2} = \frac{M + M^t}{2} \Rightarrow \frac{M + M^t}{2} \in S(n, \mathbb{K})$;
- $\left(\frac{M - M^t}{2}\right)^t = \frac{M^t - (M^t)^t}{2} = \frac{M^t - M}{2} = -\left(\frac{M - M^t}{2}\right) \Rightarrow \frac{M - M^t}{2} \in A(n, \mathbb{K})$.

Dunque:

$$M(n, \mathbb{K}) \subseteq S(n, \mathbb{K}) + A(n, \mathbb{K})$$

L'altra inclusione è ovvia, dunque si è l'uguaglianza:

$$M(n, \mathbb{K}) = S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K}), \text{ c.v.d.}$$

Ex. Sia $f \in End(V)$ un' INVOLUZIONE, ovvero un endomorfismo tale che $f^2 = Id$.

(Ad esempio:

- V generico: le applicazioni Id e $-Id$ sono involuzioni, poiché $Id \circ Id = Id$, $-Id \circ -Id = Id$;
- $V = \mathbb{R}^2$: le simmetrie rispetto ad una retta sono involuzioni, poiché un punto simmetrizzato due volte torna sempre in sé stesso;
- $V = M(n, \mathbb{K})$: la trasposizione è un'involuzione, poiché $(A^t)^t = A$.)

Siano $V(1) = \{v \in V \mid f(v) = v\} = Ker(f - Id)$ e $V(-1) = \{v \in V \mid f(v) = -v\} = Ker(f + Id)$.

È chiaro che

$v \in Ker(f + Id) \cap Ker(f - Id) \Rightarrow f(v) = v = -v \Rightarrow v = 0$.

Si dimostri che:

$$V = V(1) \oplus V(-1)$$

Ancora una volta si può effettuare uno spezzamento:

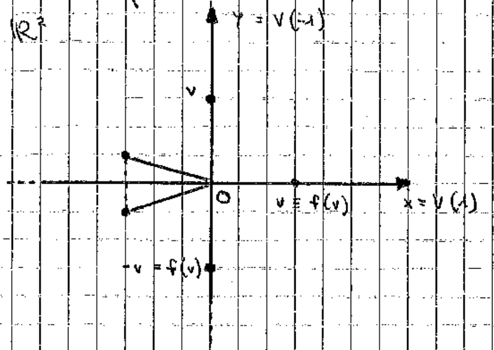
$$\forall\, v \in V:\ v = \frac{v + f(v)}{2} + \frac{v - f(v)}{2}$$

Si ha

- $f\left(\frac{v + f(v)}{2}\right) = \frac{f(v) + f^2(v)}{2} = \frac{f(v) + v}{2} = \frac{v + f(v)}{2} \Rightarrow \frac{v + f(v)}{2} \in V(1)$;
- $f\left(\frac{v - f(v)}{2}\right) = \frac{f(v) - f^2(v)}{2} = \frac{f(v) - v}{2} = -\left(\frac{v - f(v)}{2}\right) \Rightarrow \frac{v - f(v)}{2} \in V(-1)$.

Ad esempio:

$V = \mathbb{R}^2$



Si noti che:

- $V(1)$ rispetto alla simmetria rispetto all'asse x è l'asse x;
- $V(-1)$, in questo caso, è l'asse y;
- $V = \mathbb{R}^2 = V(1) \oplus V(-1)$.

OSSERVAZIONE

Dato che:

$$V = V(1) \oplus V(-1),$$

allora, se:

- $\mathcal{B}$ è una base di $V(1)$;
- $\mathcal{D}$ è una base di $V(-1)$,

allora $\mathcal{G} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ è una base di V.

Dunque si ha:

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array}\right]$$

Alcuni esempi:

- $V = \mathbb{R}^2$, f: riflessione rispetto all'asse x

$$\begin{rcases} \mathcal{B} = \{(1,0)\} \text{ base di } V(1) \\ \mathcal{D} = \{(0,1)\} \text{ base di } V(-1) \end{rcases} \Rightarrow \mathcal{G} = \{(1,0),(0,1)\} \text{ base di } \mathbb{R}^2$$

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$$

- $M(n,\mathbb{K}) = \underset{V(1)}{\underset{\shortparallel}{S(n,\mathbb{K})}} \oplus \underset{V(-1)}{\underset{\shortparallel}{A(n,\mathbb{K})}}$, f = trasposizione

Si ha:

- $\mathcal{S}$ base di $V(1)$, tale che $|\mathcal{S}| = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\mathcal{C}$ base di $V(-1)$, tale che $|\mathcal{C}| = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ base di $M(n,\mathbb{K})$, tale che $|\mathcal{G}| = |\mathcal{S}|+|\mathcal{C}| = n^2$

Infatti:

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \hline 0 & -I_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}\right]$$

Ex. Sia $f \in End(V)$ un PROIETTORE, ovvero un endomorfismo tale che $f^2 = f$.

(Ad esempio:

- $f = 0$: l'applicazione nulla è sempre un proiettore;
- $f = Id$: in effetti $Id^2 = Id \circ Id = Id$;
- $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ la funzione:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x,0)$$

è un proiettore;

- $V = M(n,\mathbb{K}) \Rightarrow$ la funzione:

$$f: M(n,\mathbb{K}) \to M(n,\mathbb{K})$$
$$M \mapsto \frac{M + {}^tM}{2} \text{ (parte simmetrica)}$$

è un proiettore, poiché se la matrice è già simmetrica, l'immagine è la matrice stessa. Dunque in ogni caso $f^2 = f$.)

Si noti che queste applicazioni non sono iniettive:

- nel terzo esempio, si ha che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{asse} y$;
- nell'ultimo esempio si ha che $\operatorname{Ker} f = A(n)$.

Si dimostri che, se f è un proiettore, allora:

$$V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Imm} f$$

Al solito, è necessario verificare l'esistenza della somma diretta.

Dim.

Sia $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Imm} f$. Allora:

- $f(v) = 0$
- $\exists\, w \in V \ni' f(w) = v$

Dunque:

$$v = f(w) = f(f(w)) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$v = 0 \text{, c.v.d.}$$

Dunque si può parlare di somma diretta.

Ora:

$\forall\, v \in V : v = v - f(v) + f(v)$

Si noti che:

- $f(v) \in \operatorname{Imm} f$;
- $f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0 \Rightarrow (v - f(v)) \in \operatorname{Ker} f.$

Dunque:

$$V \supseteq \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Imm} f$$

Per la formula delle dimensioni:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f$$

Dunque l'uguaglianza:

$$V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Imm} f \text{, c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Per questo tipo di applicazioni lineari, si ha:

- $f|_{\operatorname{Ker} f} = 0$;
- $f|_{\operatorname{Imm} f} = \mathrm{Id}_{\operatorname{Imm} f}$, poiché $f|_{\operatorname{Imm} f} : f(v) \longrightarrow f^2(v) = f(v).$

Inoltre:

- $\mathcal{B}$ base di $\operatorname{Imm} f$
- $\mathcal{D}$ base di $\operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ base di V

Infine:

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

RIEPILOGO SUGLI SPAZI DUALI

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato, tale che $\dim V = n$.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V.

Si definisce SPAZIO DUALE di V (si indica con V^*) l'insieme degli omomorfismi da V in $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

A proposito di V^*, si può definire la base duale di $\mathcal{B}$, ossia la base di V^*, in questo modo:

$$\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$$

$$\forall\, v_i^* \in \mathcal{B}^*,\ \forall\, v_j \in V : v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Analizziamo ora gli elementi di V^*.

Si voglia calcolare, $\forall\, f \in V^* : [f]_{\mathcal{B}^*}$.
Si ha:

$$f = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^* \quad \text{(in modo unico)}$$

$$\forall\, v_i \in \mathcal{B} : f(v_i) = (a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*)(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j^*(v_i) =$$
$$= a_i v_i^*(v_i) = a_i$$

Dunque:

$$\forall\, f \in V^* : [f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{bmatrix}$$

Analogamente a quanto fatto per il duale, si può definire lo SPAZIO BIDUALE di V:

$$V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$$

Si analizzi dunque il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\Phi"'] & V^*_{\mathcal{B}^*} \arrow[r] & V^{**}_{\mathcal{B}^{**}} \end{tikzcd}$$

$$\forall\, v \in V : \Phi_v : V^* \to \mathbb{K}, \text{ ove } \forall\, f \in V^* : \Phi_v(f) \overset{\text{def}}{=} f(v)$$

La funzione Φ individua un isomorfismo canonico da V a V^{**}, che dunque non dipende dalla scelta delle basi: è un fatto di rilievo, visto che si sta parlando di spazi astratti.

Se $A \subset V$ (è sufficiente che sia un sottoinsieme, non è necessario che sia un sottospazio vettoriale), si definisce "ANNULLATORE" di A il sottospazio vettoriale di V^* dei funzionali che si annullano in ogni elemento di A:

$$\mathrm{Ann}\, A = \{ f \in V^* \mid f|_A = 0 \} =$$
$$= \{ f \in V^* \mid f(a) = 0 \ \forall a \in A \}$$

Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora:

$$\dim \mathrm{Ann}\, W = \dim V - \dim W$$

PROPRIETÀ DELL'ANNULLATORE

- $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Ann}\, A \supset \mathrm{Ann}\, B$

Dim.

È ovvio che:

$$f \in \mathrm{Ann}\, B \Rightarrow f(b) = 0 \ \forall b \in B \Rightarrow f(a) = 0 \ \forall a \in A \Rightarrow f \in \mathrm{Ann}\, A$$
$$\mathrm{Ann}\, B \subset \mathrm{Ann}\, A, \text{ c.v.d.}$$

- Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora:

$$\mathrm{Ann}\, \mathrm{Ann}\, W = \Phi(W)$$

(Talvolta, con abuso di notazione, dato che W e $\Phi(W)$ sono canonicamente isomorfi, si usa W al posto di $\Phi(W)$: si tenga presente però che il primo è formato da vettori, il secondo da funzionali. I due insiemi sono isomorfi, ma non uguali)

La dimostrazione verrà vista più avanti.

RIEPILOGO SUL DETERMINANTE

Dato $M(2,\mathbb{K})$, si definisce la funzione $\det_2$:

$$\det_2 : M(2,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

- $\det_2 I = 1$
- $\det_2(X, X) = 0$
- $\det_2$ è bilineare.

PROPRIETÀ DERIVATE

- $\det_2(X, Y) = -\det_2(Y, X)$
- $\det_2$ è l'unica funzione che verifica le tre proprietà fondamentali. Più in generale, $D_\lambda = \lambda \det_2$ è l'unica funzione che verifica le proprietà 2 e 3, tale che $D_\lambda I = \lambda$.
- $\det_2(A \cdot B) = \det_2 A \cdot \det_2 B$
- $A \sim B \Rightarrow B = PAP^{-1}$, $P \in GL(M(2,\mathbb{K})) \Rightarrow \det_2 A = \det_2 B$

Se definiamo l'insieme Λ:

$$\Lambda = \{ D : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K} \text{ bilineari e tali che } D(X,X) = 0 \}$$

si ha

$$\dim \Lambda(\mathbb{K}^2) = 1$$
$$\{\det_2\} \text{ base di } \Lambda$$

Λ è dunque un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

Infine:

$\dim V = 2$, $f \in \operatorname{End} V$

$$\det_2 f = \det_2 M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

La funzione è ben definita, infatti non dipende dalla scelta di $\mathcal{B}$, dato che per ogni $\mathcal{B}'$:

$\exists\ B = PAP^{-1}$ simile ad A t.c. $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \sim A$

DUE DIMOSTRAZIONI INTERESSANTI

- Se W è un sottospazio di V, allora:

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W)) = \Phi(W)$$

Dim.

Dimostriamo la prima inclusione:

$\forall f \in \mathrm{Ann}\, W : \Phi_x(f) \overset{\text{def}}{=} f(x) = 0 \Rightarrow \Phi(W) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, W)$

Per concludere, notiamo che i due sottospazi hanno la stessa dimensione, dunque sono uguali:

- $\dim \Phi(W) = \dim W = k$;
- $\dim W = k \Rightarrow \dim \mathrm{Ann}\, W = n - k \Rightarrow \dim \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W)) =$
$= n - (n - k) = \cancel{n} - \cancel{n} + k = k$, c.v.d.

- Sia $f \in V^*$. Si consideri il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & V^* & \longrightarrow & V^{**} \\ \mathrm{Ker}\, f & & f & & \mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f)) \end{array}$$

Si ha:

$$\Phi(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ann}(f)$$

Dim.

Sia $\Phi(x) \in V^{**}$, $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Allora:

$$\Phi(x)(f) \overset{\text{def}}{=} f(x) = 0 \text{ , poiché } x \in \mathrm{Ker}\, f$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi(x) \in \mathrm{Ann}(f)$$
$$\Phi(\mathrm{Ker}\, f) \subseteq \mathrm{Ann}\, f$$

Ora:

$\forall\, \Phi_x \in \mathrm{Ann}\, f$, $x \in V$: $\Phi_x(f) \overset{\text{def}}{=} f(x) = 0$.

Dunque:

$$x \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \Phi(x) \in \Phi(\mathrm{Ker}\, f)$$
$$\mathrm{Ann}\, f \subseteq \Phi(\mathrm{Ker}\, f)$$

Dunque si ha l'uguaglianza:

$$\Phi(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ann}\, f \text{ , c.v.d.}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI $\det_2$

Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Consideriamo $A \in M(2, \mathbb{R})$:

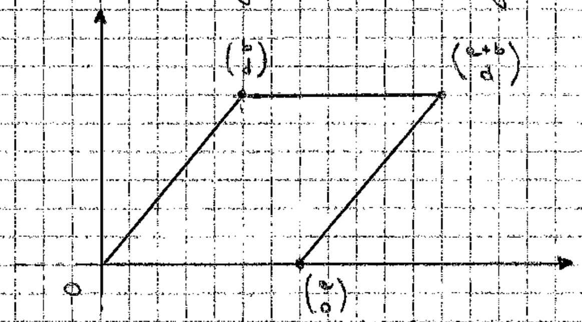
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

Supponiamo di avere zero $c = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Allora $\det_2(A) = ad$.

Si analizzi ora il seguente disegno:



Si ha che $\det_2(A) = \mathcal{A}(P(A))$, ove $P(A)$ è il parallelogramma che ha per vertici:

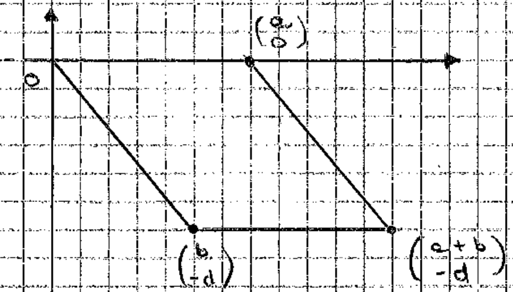
$$P(A) = \{(0,0), X, Y, X+Y\},$$

ove X e Y sono la prima e la seconda colonna della matrice.

L'unità di misura è quella tale che:

$$\mathcal{A}(P(I)) = \det_2 I = 1$$

Si analizzi ora quest'altra rappresentazione:



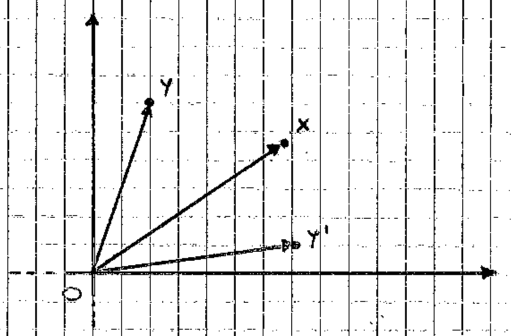
Si ha $\det_2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -d \end{pmatrix} = -ad.$

Dunque occorre introdurre il concetto di AREA ORIENTATA:

- $P(X, Y)$ è orientato positivamente, perché Y è "a sinistra" di X;
- $P(X, Y')$ è orientato negativamente, perché Y' è "a destra" di X.

Più precisamente:

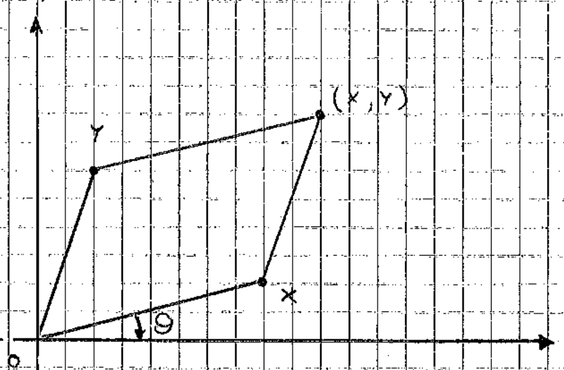
- $P(X, Y)$ è orientato positivamente perché l'angolo viene percorso in senso antiorario;
- $P(X, Y)$ è orientato negativamente perché l'angolo viene percorso in senso orario.



Si ha che:

- $\det_2(X, Y) > 0 \iff P(X, Y)$ è orientato positivamente;
- $\det_2(X, Y) < 0 \iff P(X, Y)$ è orientato negativamente.

Si analizzi ora questa figura:



Esiste una rotazione (dunque un isomorfismo) R_θ tale che:

$$(R_\theta X, R_\theta Y) \text{ è tale che } c = 0$$

Ora:

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A}(R_\theta X, R_\theta Y)$$

$$\det_2 A = \det_2 R_\theta A = \det_2 R_\theta \det_2 A$$

Infatti, se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, si ha $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Se X, Y sono linearmente dipendenti, l'area orientata è nulla: d'altronde, $\det_2(X, \lambda X) = \lambda \det_2(X, X) = 0$.

Se l'unità di misura cambia, l'area viene solo riscalata, ma il resto rimane invariato.

GRUPPO SIMMETRICO S_n

Sia $X = \{1 \dots n\}$. Si definisce GRUPPO SIMMETRICO S_n:

$$S_n = \{\sigma : X \to X \text{ invertibili}\}$$

Si ha che:

- $(S_n, \circ)$ è un gruppo in genere NON ABELIANO,
- $|S_n| = n!$

Ci sono principalmente due modi di rappresentare gli elementi di un gruppo simmetrico.

- RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE TABELLE

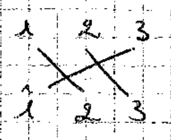
Ex. $n = 3$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (si legge: l'1 nel 2, il 2 nel 3, il 3 nell'1)

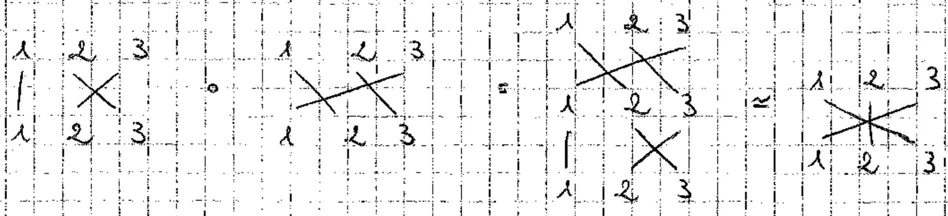
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

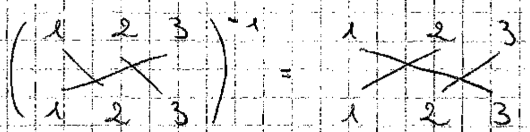
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE DIAGRAMMI

Ex. $n = 3$







CICLI DI LUNGHEZZA ℓ IN S_n

Sia, ancora una volta, $X = \{1, 2 \dots n\}$. Posso scrivere:

$$X = S \amalg J$$

NOTAZIONE

Il simbolo $\amalg$ si legge "UNIONE DISGIUNTA": in questo caso, ci indica che $S \cap J = \emptyset$.

In particolare S è definito SUPPORTO DEL CICLO

Si ha che:

- $\forall j \in J : c(j) = j$
- è possibile riordinare gli elementi di S in modo tale da ottenere la seguente configurazione:

$$S = \{i_1, i_2 \dots i_\ell\}$$

$$i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{\ell-1} \to i_\ell$$

Ex. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

In questo caso

- $S = \{1, 2, 3\}$
- $J = \emptyset$

Si ha:

$$1 \to 2 \to 3$$

Il ciclo è dunque di lunghezza 3.

Ex. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

In questo caso:

- $S = \{2, 3\}$
- $J = \{1\}$

Si ha:

$$2 \to 3$$

Il ciclo è dunque di lunghezza 2.

OSSERVAZIONE

Due cicli C_1 e C_2 in S_n sono DISGIUNTI se e solo se:

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset .$$

Se C_1 e C_2 sono cicli disgiunti allora $C_1 \circ C_2 = C_2 \circ C_1$: altrimenti, in generale non è vero.

PROPOSIZIONE

Ogni $\alpha \in S_n$ si può scrivere come composizione di cicli disgiunti in modo unico, a meno di composizioni.

$$\alpha = C_1 \circ C_2 \circ C_3 \circ \dots \circ C_k$$

Ex. $n = 7$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$C_1 = 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$

$C_2 = 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2$

$C_3 = 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6$

$$\alpha = C_1 \circ C_2 \circ C_3$$

Ex. $n = 4$

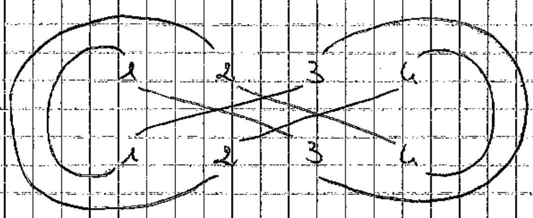
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_1 = 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$

$C_2 = 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2$

$$\alpha = C_1 \circ C_2$$

Per rappresentare i cicli possiamo "chiudere i circuiti":



TRASPOSIZIONI

Ogni ciclo ha una sua lunghezza:

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma = & C_1 & \circ & C_2 & \circ & C_3 \dots & C_k \\ & l_1 & & l_2 & & l_3 & l_k \end{array}$$

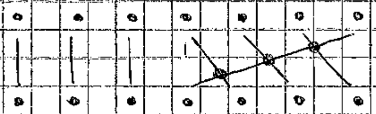
Per definizione, un ciclo di lunghezza 2 si chiama TRASPOSIZIONE:

Ex $n = 5$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ | & | & & & | \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE

Ogni ciclo di lunghezza $l \geq 2$ si può scrivere come composizione di $l-1$ trasposizioni.

A LIVELLO GRAFICO

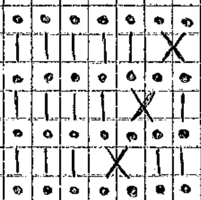


$l = 4$

$l - 1 = 3$ incroci $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 trasposizioni

Infatti:



Se quindi ogni σ è composizione di cicli disgiunti e ogni ciclo è composto da $(l-1)$ trasposizioni si può affermare che ogni σ si può scrivere come composizione di $S(\sigma)$ trasposizioni, ove:

$$S(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} (l_j - 1)$$

DETERMINANTE SU $M(n, \mathbb{K})$

Una FUNZIONE DETERMINANTE su $M(n, \mathbb{K}) = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}}$:

$$D : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K},$$

data $A = (X^1, X^2 \ldots X^n)$, ne assegna il suo determinante.
Questa funzione deve avere le tre proprietà fondamentali:

- $D(I) = 1$;
- $D(\ldots X, X \ldots) = 0$;
- D è n-lineare.

Supponiamo che D esista. Allora avrebbe anche le seguenti proprietà derivate:

- $D(\ldots X, Y \ldots) = -D(\ldots Y, X \ldots)$

Dim.

$0 = D(X+Y, X+Y) = D(X,X) + D(X,Y) + D(Y,X) + D(Y,Y) =$
$= D(X,Y) + D(Y,X) \Rightarrow D(\ldots X, Y \ldots) = -D(\ldots Y, X \ldots)$, c.v.d.

- $D(\ldots X \ldots X \ldots) = 0$

Dim.

Scambiando più volte le colonne, il determinante cambia solo di segno ogni volta, ma non di modulo. Dunque avrei:
$$D(\ldots X \ldots X \ldots) = \pm D(\ldots X, X \ldots) = 0 \Rightarrow D(\ldots X \ldots X \ldots) = 0, \text{ c.v.d.}$$

- Se A non è invertibile, allora $D(A) = 0$.

Dim.

Non è restrittivo pensare che A sia della forma:
$$A = \left(X^1, \ldots X^{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} a_j X^j \right),$$
poiché scambiando le righe cambia solo il segno del determinante. Per la multilinearità:

$D(A) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j D(X^1, X^2 \ldots X^j)$, e sappiamo che questa è una somma di zeri, per la seconda proprietà derivata.
Allora $D(A) = 0$, c.v.d.

• D è unica

Ammesso che esista, quindi, creiamo una formula chiusa per la funzione D:

$$D(A) = D\left(a_{11}e^1 + \dots + a_{m1}e^m, \dots, a_{1m}e^1 + \dots + a_{mm}e^m\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} D\left(e^{\sigma_1} \dots e^{\sigma_m}\right)\left[a_1 \dots a_m\right] =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{s(\sigma)}\left[a_{1\sigma_1} \dots a_{m\sigma_m}\right]$$

Ex. $M(2, \mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$D(A) = a_{11}a_{22}\, D\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12}a_{21}\, D\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ex. $M(3, \mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc} S_3 = \{ & \mathrm{Id}, & (12), & (13), & (23), & (123), & (132) & \} \\ & e=0 & e=1 & e=1 & e=1 & e=2 & e=2 & \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} +$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

A questo punto possiamo considerare:

$$D = \det_m$$

Se $\det_m : M(m, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ esiste, allora è univocamente definita dalla formula chiusa:

$$\det_m(A) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{s(\sigma)}\left(a_{1\sigma_1} \dots a_{m\sigma_m}\right)$$

UNICITÀ GENERALIZZATA DI $\det_n$

Più in generale, se $\det_n$, allora:

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \det_n$ è l'unica funzione che verifica le proprietà fondamentali 2) e 3), e tale che $\det_n I = \lambda$
- $\forall A, B \in M(n, \mathbb{K})$: $\det_n (AB) = \det_n A \cdot \det_n B$
- $A \sim B \Rightarrow \det_n (A) = \det_n (B)$

ESISTENZA DI $\det_n$:
COSTRUZIONE PER RICORRENZA, $n \geq 1$

Al posto di dimostrare che la formula chiusa del determinante verifica le tre proprietà, costruiamola per ricorrenza, e mostriamo che verifica le tre proprietà.

CASO INIZIALE : $n \geq 1$

Definiamo, per una matrice $A \in M(1, \mathbb{K})$, la seguente funzione:

$$\det_1 A = \det_1 [a_{11}] = a_{11}$$

Questa funzione verifica tutte le proprietà:

- $\det_1 [1] = \det_1 I = 1$;
- $\det_1$ è lineare;
- la seconda proprietà è necessariamente verificata.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Supponiamo di aver definito una funzione per il caso $(n-1)$, mostriamo come crearla per il caso n.

La formula è:

$$\det_n A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A_{ij}) (-1)^{i+j},$$

ove l'i-esima riga è una riga fissata in precedenza, e con A_{ij} si intende la matrice A privata della riga i-esima e della colonna j-esima.

Ad esempio, nel caso 2×2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

si ha:

$$\det_2 A = \sum_{j=1} a_{1j} (A_{1j}) (-1)^{1+j} = a_{11}\, a_{22} (+1) + a_{12}\, a_{21} (-1) =$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

LEMMA

Comunque scegliamo l'indice di riga i, la funzione così definita verifica le tre proprietà.

PROPRIETÀ 1

Per ipotesi induttiva, $\det_{n-1} A = 1$.

Considero I_n:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ O & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$$

Scelgo una qualsiasi riga: ci sono $(n-1)$ termini nulli, e un termine, a_{ii} che vale 1. Se considero A_{ii}, ho che:

$$A_{ii} = I_{n-1},$$

dunque $\det_{n-1} I_{n-1} = 1$.

Quindi:

$$\det_n I_n = a_{ii} \det_{n-1} A_{ii} = 1 \cdot \det_{n-1} I_{n-1} = 1, \text{ c.v.d.}$$

PROPRIETÀ 2

$\det_n (\ldots X, X \ldots) = 0$

Affianco le due colonne uguali, conscio del fatto che il determinante ogni volta cambia di segno ma non di modulo.

Considero A:

$$\begin{array}{cc} A = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} & i \\ \quad\quad\; j_0 \; j_0+1 & \end{array}$$

Considerata una generica riga i, ho che:

- se $j \neq j_0, j_0+1$ la matrice ridotta presenta due colonne uguali, dunque $\det_{n-1} A_{ij} = 0$;
- se $j = j_0$ o $j = j_0+1$, ho che:

$$A_{ij_0} = A_{ij_0+1}$$
$$a_{ij_0} = a_{ij_0+1}$$
$$\Downarrow$$
$$a_{ij_0} A_{ij_0} = a_{ij_0+1} A_{ij_0+1}$$

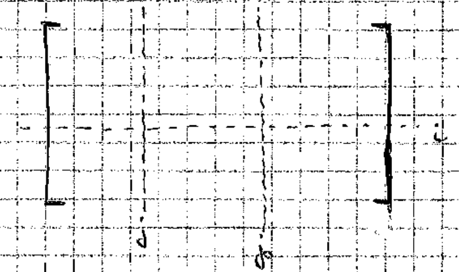
Ma nella formula compare anche $(-1)^{i+j}$: se j_0 è pari, j_0+1

è dispari, e viceversa. Dunque quel fattore una volta è $(+1)$ e l'altra è (-1). Dunque i termini si elidono a vicenda, quindi la tesi:

$$\det_n(\ldots x, x \ldots) = 0 \text{, c.v.d.}$$

PROPRIETÀ 3

Consideriamo una matrice A, fissiamo a piacere una riga i e una colonna j_0, e procediamo con la formula applicata sulle colonne:



Ho due possibilità:

- $j \neq j_0$;
- $j = j_0$.

Nel primo caso, facendo variare la colonna j, la funzione:

$$(-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det_{n-1}(A_{ij_0})$$

presenta due termini costanti, $(-1)^{j_0+i}$ e a_{ij_0}, e un termine multilineare, $\det_{n-1}(A_{ij_0})$.

Se invece $j = j_0$ la funzione:

$$(-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det_{n-1}(A_{ij_0})$$

presenta due termini costanti, $(-1)^{i+j_0}$ e $\det_{n-1}(A_{ij_0})$, e uno lineare, a_{ij_0}.

Dunque la funzione determinante, essendo somma di funzioni multilineari, è multilineare rispetto alle colonne, c.v.d.

APPLICAZIONE AI SISTEMI LINEARI

Considerata $A \in M(n, \mathbb{K})$, si consideri il seguente sistema lineare:

$$AX = B$$

Sia X_0 una soluzione del sistema:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x^0_1 \\ \vdots \\ x^0_n \end{bmatrix}$$

Allora vale la seguente relazione, detta DI CRAMER:

$$A \begin{bmatrix} x^0_1 \\ \vdots \\ x^0_n \end{bmatrix} = B \iff B = x^0_1 A^1 + \dots + x^0_n A^n$$

$$\det A_j = x^0_j \det A,$$

ove con A_j si indica la matrice A, dove è stata sostituita la colonna A^j con la colonna B dei termini noti.
Per la multilinearità della funzione, ciò è ovvio.

Se $\det A \neq 0$, ossia se A è invertibile, si ha:

$$x^0_j = \det A_j (\det A)^{-1}$$

Se A è invertibile, consideriamo A^{-1}. Si ha:

$$A^{-1} \cdot A = A^{-1}(X^1, \dots X^n) = I \Rightarrow \begin{cases} AX^1 = E^1 \\ \vdots \\ AX^n = E^n \end{cases}$$

Se $A^{-1} = \{x_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$, si ha:

$$x_{ij} = \det A_{ij} (\det A)^{-1}$$
$$x_{ij} = \det (A^1 \dots A^{i-1} E^j A^{i+1} \dots A^n)(\det A)^{-1},$$

ove con A_{ij} si intende la matrice cui è stata sostituita la colonna A^i con la colonna E^j.

ESERCIZI VARI

Ex. Siano U e W sottospazi vettoriali di V.

Si ha:

- $\mathrm{Ann}(U+W) = \mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W$
- $\mathrm{Ann}(U \cap W) = \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W$

Dim.

1) Dimostriamo la prima inclusione.

$$\left.\begin{array}{l} U \subseteq U+W \Rightarrow \mathrm{Ann}\,U \supseteq \mathrm{Ann}(U+W) \\ W \subseteq U+W \Rightarrow \mathrm{Ann}\,W \supseteq \mathrm{Ann}(U+W) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ann}(U+W) \subseteq \mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W$$

Ora, dimostriamo la seconda, supposto che $f \in \mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W$:

$\forall\ t \in U+W\ \exists\ u \in U\ \ w \in W \ni t = u + w$

Dunque:

$$f(t) = f(u+w) = f(u) + f(w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f \in \mathrm{Ann}(U+W)$$

Perciò:

$$\mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W \subseteq \mathrm{Ann}(U+W)$$

Quindi l'uguaglianza:

$$\mathrm{Ann}(U+W) = \mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W, \text{ c.v.d.}$$

2) Dimostriamo la prima inclusione.

$$\left.\begin{array}{l} U \cap W \subseteq U \Rightarrow \mathrm{Ann}(U \cap W) \supseteq \mathrm{Ann}\,U \\ U \cap W \subseteq U \Rightarrow \mathrm{Ann}(U \cap W) \supseteq \mathrm{Ann}\,W \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W \subseteq \mathrm{Ann}(U \cap W)$$

Ora:

$$\mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W = \{ f \in V^* \mid f = u + w,\ u \in \mathrm{Ann}\,U,\ w \in \mathrm{Ann}\,W \}$$

Se $x \in U \cap W$, $\forall\ f \in \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W$:

$$f(x) = u(x) + w(x) = 0 + 0 = 0$$

Dunque

$$\mathrm{Ann}(U \cap W) \subseteq \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W$$

Quindi l'uguaglianza

$$\mathrm{Ann}(U \cap W) = \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Si considerino $A = \mathrm{Ann}\, U$ e $B = \mathrm{Ann}\, W$. Per la prima proposizione, abbiamo:

$$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W\right) = \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, W$$

Dunque:

- $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U \cong U$
- $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, W \cong W$

$\Rightarrow \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W\right) = U \cap W$

Quindi:

$$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W\right)\right) = \mathrm{Ann}\left(U \cap W\right)$$

$$\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W = \mathrm{Ann}\left(U \cap W\right),$$

ovvero la seconda proposizione.

INVERSA DESTRA E INVERSA SINISTRA

Data una matrice $A \in GL(n, \mathbb{K})$, cerchiamo di determinarne l'inversa destra, ovvero $X \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che:

$$A \cdot X = I_n$$

Allora:

$$A \left(X^1 \middle| X^2 \dots X^n \right) = \left(I^1 \middle| I^2 \middle| \dots I^n \right) = \left(AX^1 \middle| AX^2 \dots AX^n \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} AX^1 = I^1 \rightsquigarrow (A \mid I^1) \\ AX^2 = I^2 \rightsquigarrow (A \mid I^2) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ AX^n = I^n \rightsquigarrow (A \mid I^n) \end{cases}$$

Questi n sistemi lineari hanno tutti una risoluzione simile, dunque posso "condensarli" in un unico sistema:

$$AX = I \rightsquigarrow (A \mid I)$$

Tramite l'algoritmo raffinato di Gauss, ottengo:

$$(A \mid I) \rightsquigarrow (I \mid B)$$

$$(I \mid B) = \left(I \middle| B^1 \middle| B^2 \dots B^n \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} I X^1 = B^1 \\ I X^2 = B^2 \\ \vdots \\ I X^n = B^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^1 = B^1 \\ X^2 = B^2 \\ \vdots \\ X^n = B^n \end{cases} \Rightarrow \forall i = 1 \dots n : X^i = B^i$$

Dunque:

$$X = B,$$

ossia la matrice B ottenuta è l'inversa di A.

Ogni matrice inversa destra è anche inversa sinistra: se con M indico il prodotto delle matrici elementari associate, ho:

$$(I \mid B) = M \cdot (A \mid I) = (MA \mid MI)$$

$$MA = I, \quad MI = B \Rightarrow MA = I, \quad M = B \Rightarrow BA = I, \text{ c.v.d.}$$

CALCOLO DEL DETERMINANTE MEDIANTE ALGORITMO DI GAUSS

Riepiloghiamo le cose già note:

- A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$;
- A non è invertibile $\Leftrightarrow \det A = 0$;
- $A \rightsquigarrow I \Rightarrow I \rightsquigarrow E_k \dots E_2 E_1 = A^{-1}$;
- $\det A = (\det A^{-1})^{-1}$.

Si può quindi considerare uguali i calcoli di $\det A$ e $\det A^{-1}$.
Dunque, consideriamo l'algoritmo raffinato di Gauss effettuato sulle colonne:

$$A \longrightarrow I$$

$$E_k \dots E_2 E_1 = A^{-1},$$

ove $E_1, E_2 \dots E_k$ sono matrici elementari sulle colonne.
Inoltre, per la formula del prodotto di Binet:

$$\det A^{-1} = \det E_1 \cdot \det E_2 \dots \det E_k$$

calcolare il determinante per mezzo di matrici elementari per colonne è più facile.

Infatti, si sa che $\det I = 1$. Allora:

- se effettuo un'operazione del primo tipo sulle colonne, scambio due colonne, dunque:

$$\det E = -\det I = -1$$

- se effettuo un'operazione del secondo tipo, il determinante è sempre individuato dal prodotto dei termini sulla diagonale. Se moltiplico per $c \in \mathbb{K}$ una colonna, ottengo che $\det E = 1 \cdot 1 \dots c \dots 1 = c = c \det I$. Dunque:

$$\det E = c \det I = c$$

- se effettuo un'operazione del terzo tipo, ottengo una matrice triangolare superiore (o inferiore), con la stessa diagonale della matrice identità. E dato che in questo caso il determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale, si ha:

$$\det E = \det I = 1$$

A livello di calcolo del determinante, è utile in particolare notare che:

- le operazioni di primo tipo cambiano il segno del determinante,
- le operazioni di terzo tipo lasciano tutto invariato.

Ex. calcolare il determinante di:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

METODO CLASSICO

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

METODO DI GAUSS

Considero la trasposta e uso l'algoritmo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A livello di matrici elementari, ho:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$(\det A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \det A = -3.$

COROLLARIO

Si ha che:

$$\det A = \det A^t.$$

Dim.

Innanzitutto:

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = I^t = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Quindi:

$\det[(A^t)^{-1}] = \det[(A^{-1})^t] = (\det E_1 \cdot \ldots \cdot \det E_k)^t = \det E_k^t \cdot \ldots \cdot \det E_1^t =$

$= \det E_k \cdot \ldots \cdot \det E_1 = \det A^{-1}$

Passando agli inversi:

$$(\det A^{-1})^{-1} = (\det (A^t)^{-1})^{-1}$$
$$\det A = \det A^t \text{, c.v.d.}$$

RICERCA DI ALTRI INVARIANTI

Riepiloghiamo la situazione attuale, supposto che $\dim V = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{End}(V) / \text{CONIUGAZIONE} \qquad \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) / \text{ESSERE SIMILI}$$

INVARIANTI

- $\dim \mathrm{Imm}\, f$ $\longleftrightarrow$ • rango;
- $\det f \overset{\text{def}}{=} \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$, $\longleftrightarrow$ • determinante.

ove $\mathcal{B}$ è una base di V.

In particolare, il determinante di f:

- è ben definito, poiché:

$\forall\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \sim M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \Rightarrow \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \det M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$;

- è invariante:

$g \sim f \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow \forall\, \mathcal{B}$ base di V:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h^{-1})$$
$$\Downarrow$$
$$\det(g) = \det(h) \cdot \det(f) \cdot \det(h^{-1}) =$$
$$= \cancel{\det(h)} \cdot \det(f)\,(\cancel{\det h})^{-1} = \det f$$

$$\det g = \det f$$

Allora, ricapitolando, gli invarianti trovati finora sono:

- $\dim \mathrm{Imm}\, f$;
- $\det f$.

Ma non è abbastanza.

Esistono infatti matrici non simili, ma aventi stesso rango e stesso determinante.

Ex. Siano A, B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 2$;
- $\det A = \det B = 1$.

... ma $A \not\sim B$.

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, AUTOSPAZI

Sia $f \in End(V)$, e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora la funzione
$$(\lambda Id - f)$$
appartiene a $End(V)$.
Analizziamo $Ker(\lambda Id - f)$. Può avvenire che
- per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$: $\dim Ker(\lambda Id - f) = 0$;
- per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$: $\dim Ker(\lambda Id - f) > 0$.

Per definizione, λ è un AUTOVALORE di f se
$$\dim Ker(\lambda Id - f) > 0,$$
ossia equivalentemente, se:
$\exists\, v \in V,\ v \neq 0 \ \ni'\ f(v) = \lambda v.$

Un tale $v \in V,\ v \neq 0 \ \ni'\ f(v) = \lambda v$ si definisce AUTOVETTORE di f relativo all'autovalore λ.
In altre parole, si ha:
$$f(Span(v)) \subseteq Span(v)$$

Se λ è un autovalore, si definisce AUTOSPAZIO dell'autovalore λ:
$$V_\lambda = V_\lambda(f) = Ker(\lambda Id - f)$$
Chiaramente, $\dim V_\lambda > 0$.
Si noti che:
$$V_\lambda = (V_\lambda \setminus \{0\}) \cup \{0\}$$

L'insieme $(V_\lambda \setminus \{0\})$ è l'insieme degli autovettori relativi all'autovalore λ.

SPETTRO DI UN ENDOMORFISMO

Data $f \in End(V)$ si definisce SPETTRO di f:

$$Sp\ f = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ è un autovalore di } f \}$$

Si ha che:

$\forall \lambda \in Sp\ f$, λ ha un autospazio associato $V_\lambda(f)$.

PROPOSIZIONE

1) $f \sim g \Rightarrow Sp\ f \sim Sp\ g$

2) $\forall \lambda \in$ Spettro comune : $\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(g)$

Dim.

1) Per ipotesi:

$g \sim f \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow g \circ h = h \circ f$

Sia ora $\lambda \in Sp\ f$, $v \neq 0$ autovettore di f. Allora $v \in V_\lambda(f)$.
Inoltre:

$$g(h(v)) = h(f(v))$$
$$g(h(v)) = \lambda h(v)$$

Si pensi ora ad $h(v)$. Esso è non nullo, poiché $v \neq 0$ e h è invertibile. Allora $h(v)$ è un autovettore di g rispetto a λ:

$$\lambda \in Sp\ g$$

Dunque $Sp\ f \subseteq Sp\ g$.

Analogamente, usando la proprietà simmetrica della coniugazione:

$f \sim g \Rightarrow f = h \circ g \circ h^{-1} \Rightarrow f \circ h = h \circ g$

Sia $\lambda \in Sp\ G$, $v \neq 0$ autovettore di g. Allora $v \in V_\lambda\ g$. Inoltre:

$$f(h(v)) = h(g(v))$$
$$f(h(v)) = \lambda h(v)$$
$$\Downarrow$$
$$h(v) \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda \in Sp\ g$$
$$Sp\ g \subseteq Sp\ f$$

Dunque c'è uguaglianza: $Sp\ f = Sp\ g$, c.v.d.

2) Dal punto precedente:

$$h(V_\lambda(f)) = V_\lambda(g), \text{ con } h \text{ invertibile}$$

Dato che h è invertibile:

$$\dim h(V_\lambda(f)) = \dim V_\lambda(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(g), \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di V. Sia W un sottospazio di V.

Si dice che W è f-INVARIANTE se $f(W) \subseteq W$.

Possiamo subito notare che, per ogni autovalore λ di f, l'autospazio V_λ è f-invariante:

$$f|_{V_\lambda}: V_\lambda \to V_\lambda$$

$$f|_{V_\lambda} = \lambda \, Id_{V_\lambda}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

Negli spazi standard, consideriamo $A \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$X \longrightarrow AX$$

In questo caso:

$$Sp\ A = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid Ker\ (\lambda I - A) \neq \{0\}\},$$

cioè:

$$Sp\ A = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\ X \neq 0 \ni (\lambda I - A) X = 0\}$$
$$Sp\ A = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det (\lambda I - A) = 0\}$$

Prima conclusione: $(\lambda I - A)$ è necessariamente NON INVERTIBILE.

Consideriamo quindi il $\det(xI - A)$, ove x è un valore indeterminato. Si ha che:

$$\det(xI - A) \in \mathbb{K}[x] = P_A(x)$$

Si definisce POLINOMIO CARATTERISTICO di A:

$$P_A(x) = \det(xI - A) \in \mathbb{K}[x]$$

Questo polinomio, ovviamente, ha un certo grado n.
Si ha:

$$\lambda \in Sp\ A \Leftrightarrow \lambda \text{ è radice di } P_A(x) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$$

Ogni autovalore λ ha una MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA m_λ, in quanto radice del polinomio $P_A(x)$.
Se $P_A(x)$ è di grado n, allora lo spettro ha al più n elementi.

A volte il polinomio caratteristico non ammette soluzioni.

Ex. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(xI - A) = P_A(x) = \det \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$

$$Sp\ A = \emptyset$$

PROPOSIZIONE

Siano $A \sim B \in M(n, \mathbb{K})$. Allora:

$$p_A(x) = p_B(x)$$

Dim.

$B = P A P^{-1}$, $P \in GL(n, \mathbb{K})$

$p_B(x) = \det(xI - B) = \det(x P I P^{-1} - P A P^{-1}) = \det(P(xI)P^{-1} + - P A P^{-1}) = \det(P(xI - A)P^{-1}) = \det(xI - A) = p_A(x)$, c.v.d.

Volendo esprimere $p_A(x)$ diversamente, esso è somma di diversi addendi, tra cui alcuni di maggior rilievo:

$$p_A(x) = (-1)^n x^n \pm \text{traccia}(A)x^{n-1} \pm \ldots \pm \det A$$

Dunque, se $f \in \text{End}(V)$, il polinomio caratteristico:

$$p_f(x) = p_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(x)$$

è ben definito, perché non dipende dalla scelta della base, ed è invariante per matrici simili.

Dunque, gli invarianti finora trovati sono:

- $\dim \text{Imm} f$;
- $Sp\ f$;
- $p_f(x)$;
- $\forall \lambda \in Sp$: $\dim V_\lambda(f)$.

Sono sufficienti?

Ancora no.

NOTAZIONE

Riguardo allo spettro di un endomorfismo, verranno usate le seguenti due notazioni:

$$Sp\ f = \{\lambda_1 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_k\}$$
$$Sp\ f = \{\mu_1 \ldots \mu_i \ldots \mu_k\}$$

Nel primo caso, si parla di autovalori DISTINTI; nel caso seguente, invece, un autovalore con molteplicità algebrica > 1 può essere ripetuto.

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

Ex. Calcolare l'inversa, se esiste, di:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Un primo metodo può fare uso dell'algoritmo di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Prima osservazione: il rango è massimo, dunque A è invertibile.

Seconda osservazione: dato che sono state compiute solo operazioni del terzo tipo, si ha:

$$\det A = \det \hat{A},$$

con la differenza che calcolare il determinante di una matrice diagonale è molto più facile, poiché occorre solamente calcolare il prodotto dei termini sulla diagonale.

Dunque:

$$\det A = \det \hat{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Continuando con l'algoritmo raffinato di Gauss, si ottiene A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -10 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 9 & -7 \\ -5 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo fa uso della nozione di SOTTOMATRICE, che verrà spiegata più avanti.

La formula è:

$$\left[A^{-1}\right]_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \left(\det A^{-1}\right) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \left(\det A\right)^{-1}$$

Ad esempio:

- $\left[A\right]_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} \left(\det A^{-1}\right) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot 1 = -10$;
- $\left[A\right]_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{32} \left(\det A^{-1}\right) = (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot 1 = -3$.

SOTTOMATRICI E MINORI

Si definisce SOTTOMATRICE di una matrice A assegnata una matrice formata dagli elementi che appartengono a righe e colonne da noi arbitrariamente selezionate.

Ex. Sia $A \in M(3, 4, \mathbb{K})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Le matrici:

$$(A_2, A_3 \mid A^1, A^3) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A_3 \mid A^2, A^3) = [-1, 5]$$

sono sottomatrici di A.

Una sottomatrice quadrata si definisce MINORE. La notazione però non è universale: alcuni definiscono minore il DETERMINANTE della sottomatrice quadrata considerata.

PROPOSIZIONE
Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.
Sia $B \in M(p, q, \mathbb{K})$ una sottomatrice di A.
Allora $\text{rk}\, A \geq \text{rk}\, B$.

Dim.
Considero B in questa maniera:

$$B = (A_{i_1} \dots A_{i_p} \mid A^{j_1} \dots A^{j_q})$$

A questo punto sfrutto in sequenza le nozioni di rango per righe e rango per colonne.

Considero C in questa maniera:

$$C = (A_{i_1} \dots A_{i_p} \mid A^1, A^2 \dots A^n) \in M(p, n, \mathbb{K})$$

Si ha:

$$\text{rk}\, A \geq \text{rk}\, C \geq \text{rk}\, B$$

$$\text{rk}\, A \geq \text{rk}\, B, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$. Sia $B \in M(p, \mathbb{K})$ un minore di A, con B invertibile.

Allora le righe e le colonne di A che concorrono a formare B sono linearmente indipendenti.

Dim.

Allora:

$$B = \left(A_{i_1} \dots A_{i_p} \middle| A^{j_1} \dots A^{j_p} \right)$$

Consideriamo la seguente combinazione lineare:

$$\alpha_1 A_{i_1} + \alpha_2 A_{i_2} + \dots + \alpha_p A_{i_p} = 0$$

Certamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ è una soluzione. Se ve ne fosse un'altra, certamente dovrebbe verificare la seguente relazione:

$$\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_p B_p = 0$$

Ma B è invertibile dunque le righe sono linearmente indipendenti. Perciò quella trovata sopra è l'unica soluzione: le righe sono quindi linearmente indipendenti.

Per le colonne la dimostrazione è identica, c.v.d.

TEOREMA

Il rango di $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ è il massimo degli ordini di minori invertibili.

Dim.

Denoto con:

- r il rango di A;
- ρ il massimo degli ordini dei minori invertibili.

Dunque:

$\exists\ B \in M(\rho, \mathbb{K})$ minore di A, t.c. B è invertibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A contiene almeno ρ righe linearmente indipendenti.

Allora:

$$r \geq \rho$$

Ma se $rk\, A = r$:

$\exists\, A_{i_1}, \dots A_{i_r} \in A$ linearmente indipendenti

Sia dunque C la seguente matrice:

$$C = \left(A_{i_1} \dots A_{i_r} \,\middle|\, A^1, A^2 \dots A^m \right) \in M(r, m, \mathbb{K})$$

Il rango per righe, uguale al rango per colonne, è r: dunque
$\exists\, A_{i_1} \dots A_{i_r} \in A$ linearmente indipendenti;
$\exists\, A^{j_1} \dots A^{j_r} \in A$ linearmente indipendenti.

Allora:

$$B = \left(A_{i_1} \dots A_{i_r} \,\middle|\, A^{j_1} \dots A^{j_r} \right) \in M(r, \mathbb{K})$$

è invertibile, ed è un minore di A.
Dunque:

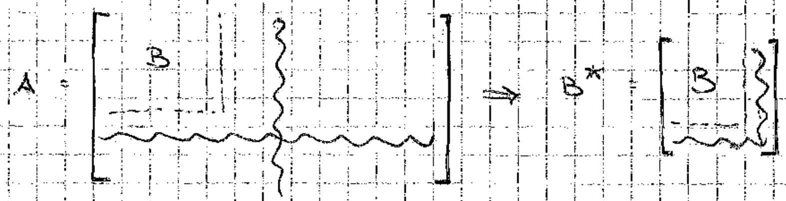
$$\rho \geq r$$

Dunque l'uguaglianza:

$$r = \rho \text{, c.v.d.}$$

MINORE ORLATO

Si definisce MINORE ORLATO di B la matrice ottenuta scegliendo un'altra riga e un'altra colonna da affiancare a B:



CRITERIO DEI MINORI ORLATI

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, sia $B \in M(r, \mathbb{K})$ un minore di A tale che $\det A \neq 0$. Allora, se tutti i minori orlati di B hanno determinante nullo, si ha:

$$\text{rk } A = r.$$

Dim.

Supponiamo $B = (A_{i_1} \dots A_{i_r} \mid A^{j_1} \dots A^{j_r})$. Per ipotesi $\det B \neq 0$, dunque:

- $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ sono linearmente indipendenti;
- $A^{j_1} \dots A^{j_r}$ sono linearmente indipendenti.

In particolare, $\text{rk } A \geq r$, poiché per ipotesi esiste un minore invertibile di ordine r.

Resta quindi da provare che:

$\forall\, h = (r+1) \dots m : A_{i_h} \in \text{Span}(A_{i_1} \dots A_{i_r})$

$\forall\, k = (r+1) \dots n : A^{j_k} \in \text{Span}(A^{j_1} \dots A^{j_r})$

Considero $M = (A_{i_1} \dots A_{i_r}, A_{i_h} \mid A^1, A^2 \dots A^n) \in M(r+1, n, \mathbb{K})$.
Si noti che B è minore di M.

Considero ora P minore orlato di B:

$$P = (A_{i_1} \dots A_{i_r}, A_{i_h} \mid A^{j_1} \dots A^{j_r}, A^{j_k}) \in M(r+1, \mathbb{K})$$

Per ipotesi, $\det P = 0$. Dunque:

$$A^{j_k} \in \text{Span}(A^{j_1} \dots A^{j_r})$$

Se rango per colonne uguale a quello delle righe, è r:

$$A_{i_h} \in \text{Span}(A_{i_1} \dots A_{i_r}), \text{ c.v.d.}$$

DISCUSSIONE DI SISTEMI E MATRICI

Ex. Discutere la risolubilità della seguente matrice:

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & 4\alpha-1 & 1 \\ 2\alpha & 1+2\alpha & 4\alpha-3 & 0 \\ 6\alpha & 10\alpha+1 & -3 & \beta \end{array}\right] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Sia A la matrice priva della colonna dei termini noti.
Per il teorema di Rouché Capelli, si ha che:

la matrice è risolubile $\Leftrightarrow$ $rk\, A = rk\, A'$

Analizziamo il determinante di A:

$$\det A = (2\alpha+1)(2\alpha+1)(-3) + (2\alpha+2)(4\alpha-3)(6\alpha) + (4\alpha-1)(2\alpha)(10\alpha+1) +$$
$$- (4\alpha-1)(1+2\alpha)(6\alpha) - (2\alpha+2)(2\alpha)(-3) - (2\alpha+1)(4\alpha-3)(10\alpha+1) =$$
$$= -12\alpha^2 - 12\alpha - 3 + 48\alpha^3 + 12\alpha^2 - 36\alpha + 80\alpha^3 - 12\alpha^2 - 2\alpha - 48\alpha^3 +$$
$$+ 6\alpha - 12\alpha^2 + 12\alpha^2 + 12\alpha - 80\alpha^3 - 80\alpha^3 - 12\alpha^2 + 32\alpha + 3 =$$
$$= (\cancel{48} + \cancel{80} - (\cancel{48} + \cancel{80}))\alpha^3 + (-\cancel{12} + \cancel{12} - \cancel{12} - \cancel{12} + \cancel{12} + \cancel{12})\alpha^2 +$$
$$+ (-\cancel{12} - \cancel{36} - \cancel{2} + \cancel{6} + \cancel{12} + \cancel{32})\alpha + (-\cancel{3} + \cancel{3}) = 0$$

Dunque:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : rk\, A \leq 2$

Il rango di A è effettivamente 2. Si noti infatti presa B:

$$B = (A_1, A_2 \mid A^1, A^2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & 2\alpha+1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\det B = (2\alpha+1)(2\alpha+1) - (2\alpha+2)(2\alpha) = \cancel{4\alpha^2} + \cancel{4\alpha} + 1 - \cancel{4\alpha^2} - \cancel{4\alpha} = 1$$

Perciò:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \det B = 1 \neq 0 \Rightarrow rk\, A = 2$

Dunque, affinché il sistema sia risolubile, è necessario e sufficiente che il determinante dell'unico minore orlato rimasto sia nullo:

$$B^* = \begin{bmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & 1 \\ 2\alpha & 1+2\alpha & 0 \\ 6\alpha & 10\alpha+1 & \beta \end{bmatrix}$$

Dunque, impongo $\det B^* = 0$:

$$\det B^* = (2\alpha+1)(2\alpha+1)\beta + 2\alpha(10\alpha+1) - (2\alpha+2)(2\alpha)\beta - (1+2\alpha)(6\alpha)$$
$$= (4\alpha^2+4\alpha+1)\beta - (4\alpha^2+4\alpha)\beta + (20\alpha^2+2\alpha) - 6\alpha - 12\alpha^2 =$$
$$= \beta + 8\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

Dunque, se α e β sono tali che:

$$\beta + 8\alpha^2 + 4\alpha = 0,$$

il sistema ammette soluzioni; altrimenti no.

SPAZI NON FINITAMENTE GENERATI

Si prende in considerazione lo spazio vettoriale non finitamente generato:

$$V = \mathbb{K}[x]$$

La base canonica di $\mathbb{K}[x]$:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2 \dots x^n \dots\} \text{ base di } \mathbb{K}[x]$$

è di cardinalità infinita, ma è NUMERABILE.
In altre parole, esiste una bigezione:

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$s \longrightarrow x^s$$

TEOREMA
Sia V uno spazio vettoriale non finitamente generato su $\mathbb{K}$, che ammette una base numerabile:

$$\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots v_n \dots\}$$

Sia $Z \subseteq V$ un insieme infinito di vettori linearmente indipendenti.
Allora:
$\exists\ \varphi$ bigettiva, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow Z$. In altre parole, Z è numerabile.
$$s \longrightarrow z^s$$
Se una base è numerabile, allora lo sono tutte.

Dim.
$\forall s \in \mathbb{N} : V_s = \mathrm{Span}(v_0 \dots v_{s-1}) \subseteq V$; $\dim V_s = s$

Innanzitutto: $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \dots \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \dots$
E ho:

$$V = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i$$

Considero $Z_s = Z \cap V_s$. Allora:

$$Z = \bigcup_{s=1}^{+\infty} Z_s$$

Dato che ogni V_s è numerabile, ogni Z_s è numerabile, dunque Z è numerabile, c.v.d.

Restringiamoci dunque alla classe (ben definita) degli spazi non finitamente generati a base numerabile.
Ognuno di questi è isomorfo a $\mathbb{K}[x]$.

Dim.
Siano:
- $\mathcal{B} = \{v_0 \dots, v_n, \dots\}$ base di V;
- $\mathcal{C} = \{1, x \dots x^n \dots\}$ base canonica di $\mathbb{K}[x]$.

Allora esiste il seguente isomorfismo tra V e $\mathbb{K}[x]$:

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{K}[x] \\ v_n &\longrightarrow x^n \\ \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{C} \end{aligned}$$

, c.v.d.

Dunque, consideriamo le basi canonica di $\mathbb{K}[x]$ e duale di $\mathbb{K}^*[x]$:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2 \dots x^n \dots\}$$
$$\mathcal{C}^* = \{p_0^*, p_1^* \dots p_n^* \dots\},$$

tale che $v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$.

Allora i vettori di $\mathcal{C}^*$ sono linearmente indipendenti.

Dim.
Sia $\varphi \in \mathbb{K}^*[x]$, $\varphi = 0 = a_0 p_0^* + \dots + a_m p_m^*$. Allora:
$\forall j = 1 \dots m : 0 = 0\, x^j = (a_0 p_0^* + \dots a_m p_m^*)(x^j) = a_j p_j^*(x^j) = a_j$, c.v.d.

Dimostriamo ora però che $\mathrm{Span}\, \mathcal{C}^* \subsetneq V^*$.

Dim. Sia $t \in \mathbb{R} - \{0\}$: consideriamo il seguente funzionale:

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x^k &\longrightarrow t^k \end{aligned}$$

Si ha:
- $\forall k \in \mathbb{N} : \varphi_t(x^k) = t^k \neq 0$;
- $\forall \psi \in \mathrm{Span}\, \mathcal{C}^* : \psi = a_0 p_0^* + \dots + a_m p_m^*, a_i \in \mathbb{R}, p_i^* \in \mathcal{C}^* \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\psi(x^k) = (a_0 p_0^* + \dots + a_m p_m^*)(x^k) = 0$

Allora:

$$\varphi_t \notin \mathrm{Span}\, \mathcal{C}^* \Rightarrow \mathrm{Span}\, \mathcal{C}^* \subsetneq V^*, \text{ c.v.d.}$$

Per spazi non finitamente generati dunque, V non è isomorfo a V^*. La dimensione dello spazio duale, come vedremo tra poco, può avere cardinalità continua, a differenza dello spazio di partenza che ha cardinalità numerabile.

Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio (a cardinalità numerabile) dei polinomi a coefficienti reali. Abbiamo dimostrato che:

$$\mathbb{R}[x] \not\cong \mathbb{R}^*[x]$$

Dimostriamo ora che esiste un insieme di funzionali linearmente indipendenti della stessa cardinalità di $\mathbb{R}$ (cardinalità continua).

Per dimostrare ciò, dimostriamo che $X = \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è formato da elementi linearmente indipendenti.

~~Dim~~ Ricordiamo che la funzione φ_t, $t \in \mathbb{R}$ è così definita:

$$\varphi_t : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) \longrightarrow p(t)$$

Siano $t_1, t_2 \dots t_m \in \mathbb{R}$, $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$.

Sia:

$$\varphi = a_1 \varphi_{t_1} + \dots + a_m \varphi_{t_m} = 0$$

una combinazione nulla.

Considero ora il seguente polinomio "test":

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_m) \in \mathbb{R}[x]$$

Per ogni $i = 1 \dots m$, il polinomio "test" associato a t_i sarà:

$$P_i(x) = (x - t_1) \dots \widehat{(x - t_i)} \dots (x - t_m)$$
$$= (x - t_1) \dots (x - t_{i-1})(x - t_{i+1}) \dots (x - t_m)$$

Si ha, se effettuiamo il test per t_1:

$$\varphi(p(x)) = a_1 (t_1 - t_2) \dots (t_1 - t_m) + \cancel{a_2 (t_2 - t_2) \dots (t_2 - t_m)} + \dots +$$
$$+ \cancel{a_m (t_m - t_2) \dots (t_m - t_m)} = a_1 (t_1 - t_2) \dots (t_1 - t_m) = 0$$

Per ipotesi $[(t_1 - t_2) \dots (t_1 - t_m)] \neq 0$, dunque $a_1 = 0$.

Effettuando il test per $t_2 \dots t_m$, ottengo la tesi:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0, \text{ c.v.d.}$$

ESERCIZIO SUGLI SPAZI DUALI

Ex. Siano $f_1, \dots f_k \in V^*$. Sia $g \in V^*$. Allora:

$$g \in \text{Span}(f_1 \dots f_k) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker } f_i \subseteq \text{Ker } g$$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per ipotesi:

$$g = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$$

Allora, sia $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker } f_i$. Allora:

$$g(x) = a_1 f_1(x) + \dots + a_k f_k(x) = 0 + \dots + 0 = 0,$$

dunque $x \in \text{Ker } g$. Ma allora:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker } f_i \subseteq \text{Ker } g$$

Dimostriamo la seconda implicazione. Per ipotesi:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker } f_i \subseteq \text{Ker } g$$

Allora, considerando l'isomorfismo canonico Φ

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker } f_i\right) \subseteq \Phi(\text{Ker } g)$$

Dato che Φ è un isomorfismo:

$$\bigcap_{i=1}^{k} (\Phi \text{ Ker } f_i) \subseteq \Phi(\text{Ker } g) = \text{Ann } g$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} \text{Ann } f_i \subseteq \text{Ann } g$$

$$\text{Ann}(\text{Span } f_1 + \dots + \text{Span } f_k) \subseteq \text{Ann } g$$

$$\text{Ann}(\text{Span}(f_1, f_2, \dots f_k)) \subseteq \text{Ann } g$$

Passo all'annullatore e ottengo la tesi:

$$\text{Ann Ann Span}(f_1 \dots f_k) \supseteq \text{Ann Ann } g$$

$$\text{Span}(f_1 \dots f_k) \supseteq g,$$

ossia $g = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$ c.v.d.

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

Data una famiglia di sottospazi $W_1, \dots, W_k$ di uno spazio vettoriale V finitamente generato, si può parlare di SOMMA DIRETTA:

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_{k-1} \oplus W_k$$

Quando:

- $W_1 + W_2 + \dots + W_k = \text{Span}\left(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k\right)$;
- $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_k = 0$

Inoltre, vale la seguente relazione:

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_k = \dim\left(W_1 \oplus \dots \oplus W_k\right)$$

ovvia:

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} W_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$$

AUTOSPAZI IN SOMMA DIRETTA

Sia $f \in End(V)$, con V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale tale che $\dim V = n$. Siano $\lambda_1 \dots \lambda_k$ gli autovalori distinti di f. Allora:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k},$$

ossia gli autospazi sono in somma diretta. Dunque:

- $\dim (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i}$;
- $v_1 + v_2 + \dots v_k = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$;
- Se $\forall V_{\lambda_j}$ generiamo una base $\mathcal{B}_{\lambda_j}$, allora $\{\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_k}\}$ è una base di $(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k})$.

La dimostrazione farà uso del principio di induzione.

Dim.

CASO INIZIALE

$k = 1$

Un autospazio è in somma diretta "con sé stesso", c'è poco da dire: la proposizione è evidentemente vera.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Suppongo vero che $v_1 + \dots + v_{k-1} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = 0$

Per ipotesi:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k = 0$$

Allora effettuo queste due operazioni:

- applico f (omomorfismo), e ottengo: $f(v_1 + v_2 + \dots v_k) = 0 \Rightarrow f(v_1) + \dots$
 $\dots + f(v_k) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k = 0$;
- moltiplico tutto per λ_k, e ottengo: $\lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$.

Sottraendo la seconda alla prima:

$$(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} + \cancel{(\lambda_k - \lambda_k) v_k} = 0$$

Gli autovalori sono distinti; dunque, sfruttando l'ipotesi induttiva:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = 0 \Rightarrow v_k = 0,$$

ossia gli autospazi sono in somma diretta, c.v.d.

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA

Sia $\lambda \in Sp\, f$ un autovalore di f. Allora sappiamo che ad esso sono correlati due valori naturali:

- la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $\mu_a(\lambda)$, con $1 \leq \mu_a(\lambda) \leq n$;
- la MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $\mu_g(\lambda) = \dim V_\lambda$, con $1 \leq \mu_g(\lambda) \leq n$.

In realtà, è vera la seguente relazione:

$\forall \lambda \in Sp\, f : \mu_a(\lambda) \geq \mu_g(\lambda)$

$$1 \leq \mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda) \leq n$$

Dim.

Supponiamo che $\dim V_\lambda = \mu_g(\lambda) = k$. Allora sia:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_k\}$$

una base di V_λ.

Estendiamola ad una base di V:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$$

Allora:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \lambda & & P \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & Q \end{array}\right],$$

ove $B = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \in M(k,k)$ è un minore di A

Calcoliamo ora il polinomio caratteristico di f:

$$P_f(x) = P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(x) = P_A(x)$$

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

Allora:

$$P_A(x) = \det \left[\begin{array}{ccc|c} x-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & P \\ 0 & & x-\lambda & \\ \hline & 0 & & I_{n-k} - Q \end{array}\right] =$$

$$= (x-\lambda)^k \det(I_{n-k} - Q)$$

Dunque:

$$\mu_a(\lambda) \geq k = \mu_g(\lambda), \text{ c.v.d.}$$

ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI

Consideriamo lo spettro di f:

$$Sp\, f = \{ \lambda_1 \dots \lambda_k \}$$

Sappiamo già che:

- $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$;
- $\forall\, \lambda_j \in Sp\, f : \mu_a(\lambda_j) \geq \mu_g(\lambda_j) = \dim V_{\lambda_j}$.

Per definizione, un endomorfismo $f \in End(V)$ si dice DIAGONALIZZABILE se e solo se:
$\exists\, \mathcal{B} = \{ v_1 \dots v_k \}$ di V t.c. $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di f.

LEMMA

Vale la seguente implicazione:

$$f \text{ è diagonalizzabile} \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{B} \text{ di } V \text{ t.c. } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D \text{ diagonale}$$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione.
Se f è diagonalizzabile, esiste una base composta da soli autovettori:

$$\mathcal{B} = \{ v_1, \dots v_k \}$$

allora:

$$\forall\, i = 1 \dots k \quad [f(v_i)]_{\mathcal{B}} = [\mu_j v_j]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mu_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ripetendo l'operazione per tutti i vettori della base, otteniamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 \ddots & \\ 0 & & \mu_k \end{bmatrix} = D \text{ diagonale}$$

Al contrario, se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora:
$\forall\, v_j \in \mathcal{B} : f(v_j) = \mu_j v_j$,
ossia $\mathcal{B}$ è formata da soli autovettori. Dunque, per definizione, è diagonalizzabile, c.v.d.

LEMMA

Essere o non essere diagonalizzabili è una proprietà invariante per endomorfismi coniugati.

Dim.

Sia f un endomorfismo diagonalizzabile, e sia $g \sim f$. Allora: $\exists\, h \in GL(V)$ t.c. $g = h \circ f \circ h^{-1}$

Allora:

$$g \circ h = h \circ f \circ \cancel{h^{-1}} \circ \cancel{h}$$
$$g \circ h = h \circ f$$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_k\}$ una base di autovettori per f. Allora:
$\forall\, i = 1 \dots k \; : \; g(h(v_i)) = h(f(v_i)) = h(\mu_i v_i) = \mu_i (h(v_i))$

Dunque:

$$\mathcal{D} = \{h(v_1), \dots h(v_k)\}$$

è un'altra base, fatta questa volta di autovettori per g. Dunque g è diagonalizzabile, c.v.d.

STUDIO DI $\mathrm{Diag}(V)/_\sim$

Definiamo:

$$\mathrm{Diag}(V) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ è diagonalizzabile} \}$$

Studiamo ora $\mathrm{Diag}(V)/_\sim$.

TEOREMA

I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

- f è diagonalizzabile;
- lo spazio V è la somma diretta degli autospazi;
  $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$; $Sp\, f = \{\lambda_1 \ldots \lambda_k\}$
- $P_f(x)$ è completamente fattorizzabile, cioè:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_a(\lambda_j) = \deg P_f(x) = n$$

$$P_f(x) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{\mu_a(\lambda_j)},$$

e in più:

$\forall\ \lambda_j \in Sp\, f : \mu_a(\lambda_j) = \mu_g(\lambda_j)$.

Dim.

- 2) ⇒ 1). Si noti che:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \}$$

è una base di V composta, per costruzione, da autovettori per f.

- 2) ⇒ 3). Sia:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \}.$$

Allora:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{m_k} \end{bmatrix}$$

Allora:

$$P_f(x) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{\mu_g(\lambda_i)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i) = n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\ \lambda_i : \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$$

• 3) ⇒ 2). Sicuramente:

$$V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$$

Ma, per ipotesi, le dimensioni sono uguali:

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots + \dim V_{\lambda_k} =$$
$$= \mu_g(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2) + \ldots + \mu_g(\lambda_k) =$$
$$= \mu_a(\lambda_1) + \mu_a(\lambda_2) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) =$$
$$= n = \dim V$$

Dunque:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$$

• Per concludere, 1) ⇒ 2). Sia:

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{v_1 \ldots v_k}_{\mathcal{B}_1} \ldots \underbrace{v_j \ldots v_n}_{\mathcal{B}_k} \}$$

una base di autovettori per f. Allora:

$$V = \operatorname{Span} \mathcal{B}_1 \oplus \operatorname{Span} \mathcal{B}_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Span} \mathcal{B}_k$$

Ma

$$\forall\, i = 1 \ldots k : \operatorname{Span} \mathcal{B}_i \subseteq V_{\lambda_i}$$

Inoltre:

$$V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V.$$

Allora:

$$V = \operatorname{Span} \mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Span} \mathcal{B}_k \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Dato che:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$$
$$v_1 + \ldots + v_k = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0,$$

autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. D'altronde abbiamo dimostrato che:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \ldots \mathcal{B}_k \}$$

INVARIANTE COMPLETO

Siano $f, g \in Diag(V)$. Allora:

$$f \sim g \Leftrightarrow p_f(x) = p_g(x)$$

In altre parole, il polinomio caratteristico è un INVARIANTE COMPLETO per $Diag(V)/_\sim$.

Dim.

La prima implicazione è valida per una coppia qualsiasi di endomorfismi coniugati, dunque a maggior ragione è valida per endomorfismi diagonalizzabili coniugati.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Per ipotesi, $p_f(x) = p_g(x)$. Dunque:

$$Sp\ f = Sp\ g = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$$

Allora:

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus V_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(f)$$
$$V = V_{\lambda_1}(g) \oplus V_{\lambda_2}(g) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(g)$$

Allora:

$$\mathcal{B}_f = \{\mathcal{B}_{f_1}, \mathcal{B}_{f_2} \dots \mathcal{B}_{f_k}\}$$
$$\mathcal{B}_g = \{\mathcal{B}_{g_1}, \mathcal{B}_{g_2} \dots \mathcal{B}_{g_k}\}$$

Per concludere, si ha:

$$M^{\mathcal{B}_f}_{\mathcal{B}_f}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mu a(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{\mu a(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k I_{\mu a(\lambda_k)} \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}_g}_{\mathcal{B}_g}(g),$$

quindi $f \sim g$, c.v.d.

SISTEMI LINEARI E MINORI

Dato un sistema lineare non omogeneo:

$$AX = B \quad , \quad A \in M(p, n, \mathbb{K}),$$

sappiamo che il sistema è risolubile se e solo se:

$$rk\, A = rk\, A' = (A|B)$$

Inoltre, se ad esempio si ha:

$$rk\, A = r,$$

allora esiste un minore M di A di ordine r invertibile, ossia tale che $\det M \neq 0$. Supponiamo che sia posizionato in alto a sinistra:

$$\left[\begin{array}{cc|c} M & A & B \end{array}\right]$$

Supponiamo $rk\, A' = r$: se fosse $(r+1)$ ci si fermerebbe a priori, essendo il sistema non risolubile.
Il sistema $AX = B$ è equivalente a quello ottenuto "cancellando" le equazioni che non riguardano M:

$$\left[\begin{array}{cc|c} M & & B \end{array}\right]$$

A questo punto posso "spostare" le colonne che non riguardano M dalla parte dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{c|cc} M & \cdots & B \end{array}\right]$$

Ex. Discutere la risolubilità del seguente sistema, al variare di a e b in $\mathbb{R}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2a & a & 1 \\ 2+a & 4-a & 2 & 0 \\ 2+a & 6 & 3 & b-1 \end{array}\right]$$

Mediante alcune operazioni elementari, possiamo facilitare il calcolo di det A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2a & a & 1 \\ 2+a & 4-a & 2 & 0 \\ 2+a & 6 & 3 & b-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2a & a & 1 \\ 2+a & 4-a & 2 & 0 \\ 0 & 2+a & 1 & b-1 \end{array}\right]$$

A questo punto, calcoliamo il determinante usando la prima colonna:

$$\det A = a(\cancel{4}-a-\cancel{4}-2a) - (2+a)(\cancel{2a}-\cancel{2a}-a^2) =$$
$$= -3a^2 + 2a + a^3 = a^2(a-1)$$

Dunque:

- $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rk\, A = rk\, A' = 3 \Rightarrow$ il sistema ammette soluzioni $\forall\, b \in \mathbb{R}$;

- $a = 0$. La matrice diventa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & b-1 \end{array}\right]$$

Guardando anche solamente la prima riga, ci si rende conto che il sistema non ammette soluzioni $\forall\, b \in \mathbb{R}$;

- $a = 1$. La matrice diventa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & b-1 \end{array}\right]$$

Il rango della matrice non è 3, ma un minore invertibile di ordine 2 esiste, e l'abbiamo evidenziato. Chiamata M quella matrice, si ha:

$$\det M = 3 - 6 = -3$$

Dunque $rk\, A = 2$. L'ultima colonna dev'essere quindi combinazione lineare delle precedenti. Ora si noti che:

$$A_3 = 3A_1$$

Dunque, se il sistema dev'essere risolubile, necessariamente:

$$b - 1 = 3 \Rightarrow b = 4$$

Ammettiamo che $b = 4$. Allora il sistema totale è equivalente al seguente, ottenuto cancellando la terza riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 - z \\ 3 & 3 & -2z \end{array}\right]$$

Applichiamo dunque il criterio di Cramer:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 1-z & 2 \\ -2z & 3 \end{bmatrix}}{\det M} = \frac{3 - 3z + 4z}{-3} = -1 - \frac{z}{3}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1-z \\ 3 & -2z \end{bmatrix}}{\det M} = \frac{-2z - 3 + 3z}{-3} = 1 - \frac{z}{3}$$

TEOREMI SUL DETERMINANTE

TEOREMA

Sia $A \in A(2k+1, \mathbb{K})$. Allora $\det A = 0$.

Dim.

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{2k+1} \det A = -\det A$$

$$\det A = -\det A$$

$$\det A = 0 \text{, c.v.d.}$$

TEOREMA

Consideriamo la seguente matrice $P \in M(n, \mathbb{K})$:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right],$$

con:

- $A \in M(p, \mathbb{K})$;
- $C \in M(n-p, \mathbb{K})$.

Allora:

$$\det P = \det A \cdot \det C$$

Dim.

Possiamo scrivere

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Per il teorema del prodotto di Binet:

$$\det P = \det \left[\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

e infine tramite lo sviluppo di Laplace:

$$\det P = \det A \cdot \det C \text{, c.v.d.}$$

ENDOMORFISMI E SOMME DIRETTE

Consideriamo $f \in End(V)$. In particolare, consideriamo:

- le INVOLUZIONI, ovvero gli $f \in End(V)$ t.c. $f^2 = Id$;
- i PROIETTORI, ovvero gli $f \in End(V)$ t.c. $f^2 = f$.

Si ha:

- nel primo caso:
$$V = \{v \mid f(v) = v\} \oplus \{v \mid f(v) = -v\} = V_1 \oplus V_{-1};$$
- nel secondo caso:
$$V = \{v \mid f(v) = 0\} \oplus \{v \mid f(v) = v\} = V_0 \oplus V_1.$$

Ex. Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(x) = (3-x)^2(2-x)$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\mu_a(3) = 2 \qquad \mu_a(2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \mu_g(3) \leq 2 \qquad \mu_g(2) = 1$$

Occorre che:

$$\mu_g(3) = 2$$

$$\dim Ker(A - 3I) = 3 - rk(A - 3I)$$

Valutiamo $rk(A - 3I)$

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ k & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

- $k = 0 \Rightarrow rk(A - 3I) = 1 \Rightarrow \mu_g(3) = 2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile;
- $k \neq 0 \Rightarrow rk(A - 3I) = 2 \Rightarrow \mu_g(3) = 1 \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

RIEPILOGO SULLA DIAGONALIZZAZIONE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato, di dimensione n. Consideriamo:

$$Diag(V) = \{ f \in End(V) \mid f \text{ è diagonalizzabile} \}$$

Per definizione, f è un endomorfismo diagonalizzabile se e solo se $\exists\ \mathcal{B}$ di V t.c. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale.

I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

- f è diagonalizzabile;
- $\exists\ \mathcal{B}$ di V costituita da autovettori di f;
- Dato $Sp\ f = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$, allora $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, ossia:
$$\mu_a(\lambda_1) + \dots \mu_a(\lambda_k) = n = \deg P_f(x) = \dim V$$
$$\forall\ \lambda_i \in Sp\ f : \mu_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = \mu_a(\lambda_i);$$
- $P_f(x)$ è completamente fattorizzabile, e $\forall\ \lambda_i \in Sp\ f : \mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$

Inoltre, essere o non essere diagonalizzabile è una proprietà invariante per coniugazione.

Infine, se $f, g \in Diag(V)$, allora il polinomio caratteristico rappresenta un invariante COMPLETO:

$$f \sim g \iff P_f(x) = P_g(x)$$

Ciò non è vero se f e g non sono entrambi diagonalizzabili.

Ex. Si prendano in considerazione le matrici:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$P_A(x) = P_I(x) = (1-x)^2$$

ma:

$$I \not\sim A$$

Dunque A non è diagonalizzabile.

D'altronde:

$$\mu_g(1) = \dim V_1(A) = \dim \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \right] = 2 - rk(A - I) =$$
$$= 2 - 1 = 1 < 2 = \mu_a(1)$$

ENDOMORFISMI TRIANGOLABILI

Supponiamo che, dato $f \in End(V)$, $P_f(x)$ sia completamente fattorizzabile.

Per definizione, $f \in End(V)$ si dice TRIANGOLABILE se e solo se:

$\exists\, \mathcal{B}$ base di V t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = T$ triangolare superiore

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}(V) = \{ f \in End(V) \mid f \text{ è triangolabile} \}$$

Come prima osservazione, dato che una matrice diagonale è una particolare matrice triangolare superiore:

$$Diag(V) \subseteq \mathcal{T}(V)$$

BANDIERA ASSOCIATA AD UNA BASE

Sia:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$

una qualsiasi base di V.

Si definisce BANDIERA o VENTAGLIO di sottospazi associato alla base $\mathcal{B}$:

$$0 \subset \text{Span}(v_1) \subset \text{Span}(v_1, v_2) \subset \dots \subset \text{Span}(v_1, v_2 \dots v_n) = V$$

Si dice che la bandiera di $\mathcal{B}$ è f-invariante se e solo se ogni spazio della bandiera è f-invariante.

TEOREMA

I seguenti fatti sono equivalenti:

- $\exists\, \mathcal{B}$ di V con bandiera f-invariante;
- f è triangolabile.

Dim.

Se la base $\mathcal{B}$ genera una bandiera f-invariante, allora:

$$\begin{cases} v_1 \longrightarrow \mu_1 v_1 \\ v_2 \longrightarrow * v_1 + \mu_2 v_2 \\ v_3 \longrightarrow * v_1 + * v_2 + \mu_3 v_3 \\ \dots \\ v_n \longrightarrow * v_1 + \dots + * v_{n-1} + \mu_n v_n \end{cases}$$

Allora:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \mu_1 & * & & * \\ 0 & \mu_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \in T(n, \mathbb{R})$$

Viceversa, sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in T(n, \mathbb{R})$. Allora:

$$\begin{cases} f(\text{Span}(v_1)) \subseteq \text{Span}(v_1) \\ f(\text{Span}(v_1, v_2)) \subseteq \text{Span}(v_1, v_2) \\ \vdots \\ f(V) \subseteq V, \end{cases}$$

ossia la bandiera è f-invariante, c.v.d.

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in T(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{la bandiera di } \mathcal{B} \text{ è } f\text{-invariante}$$

TEOREMA

I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

- f è triangolabile,
- $P_f(x)$ è completamente fattorizzabile.

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione.

Per ipotesi, f è triangolabile. Allora:

$\exists\ \mathcal{B}$ di V t.c. $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Allora:

$$P_f(x) \overset{def}{=} P_A(x) = \det(tI - A)$$

$$P_f(x) = \prod_{j=1}^{n}(t - \mu_j) = \prod_{j=1}^{k}(t - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

Dunque $P_f(x)$ è completamente fattorizzabile.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Per ipotesi $P_f(x)$ è completamente fattorizzabile.

Ragioniamo per induzione sulla dimensione n di V.

CASO INIZIALE

$n = 1 \qquad f: V \to V \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = [\mu_1]$

Questa matrice ha il polinomio caratteristico completamente fattorizzabile, ed è triangolare superiore, dunque f è triangolabile.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Supponiamo che la regola valga per $f: V \to V$, $\dim V = n-1$.

Consideriamo $f: V \to V$, $\dim V = n$, con $P_f(x)$ completamente fattorizzabile:

$$P_f(x) = \prod_{j=1}^{n}(t - \mu_j)$$

Considero un autovalore μ_1 e un suo autovettore:

$$v_1 \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad f(v_1) = \mu_1 v_1$$

Costruiamo allora una base con quei vettori:

$$\mathcal{B} = \{v_1, w_2, \dots, w_m\} \text{ base di } V$$

Si ha:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

Dunque:

$$P_A(x) = (t - \mu_1) \cdot P_B(x) \text{ completamente fattorizzabile} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_B(x) \text{ completamente fattorizzabile}:$$

$$P_B(x) = \prod_{j=2}^{m} (t - \mu_j)$$

Per ipotesi induttiva, B è triangolare superiore, dunque lo è, per come è stata costruita, anche A.

Dunque f è triangolabile, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Cosa rappresenta B rispetto a f?

Ricordiamo che:

$$\mathcal{B} = \{v_1, w_2 \dots w_m\}$$

Consideriamo:

$$W = \operatorname{Span}\{w_2 \dots w_m\}$$

Notiamo che:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f|_W"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & V = \operatorname{Span} v_1 \oplus W \arrow[r, "p_W"] & W \end{tikzcd}$$

$$g = p_W \circ f|_W$$

Si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} & * \\ \hline & B \end{array}\right]$$

Quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = B$$

D'altronde, si sa che:

- $\exists\ \mathcal{D}$ di W t.c. $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(g) = T$ triangolare superiore;
- $v_1 \notin \mathcal{D}$ autovettore per f,

allora:

$$(\mathcal{B} = \{v_1 \cup \mathcal{D}\}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{bmatrix}, \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (ad esempio $\mathbb{C}$), allora:

$$\mathcal{T}(V) = \mathrm{End}(V),$$

poiché ogni polinomio caratteristico è completamente fatt. risolubile.

OSSERVAZIONE

Essere o non essere triangolabili è una proprietà invariante per endomorfismi coniugati.

Dim.

Siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$, $f \sim g$, $f \in \mathcal{T}(V)$.

Allora:

$$p_f(x) = p_g(x)$$

$$p_f(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \mu_j)$$

$$\Updownarrow$$

$$p_g(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \mu_j)$$

Dunque $g \in \mathcal{T}(V)$.

SPECIALIZZAZIONE AL CASO $M(n, \mathbb{K})$

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Allora:

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$X \longrightarrow AX$$

Se:

$$P_A(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \mu_j),$$

allora:

$\exists\ P \in GL(M(n, \mathbb{K}))$ t.c.:

$$P\,A\,P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

Analogamente, sia $B \in M(n-1, \mathbb{K})$. Allora, se:

$$P_B(x) = \prod_{j=1}^{n-1} (x - \mu_j),$$

allora:

$\exists\ Q \in GL(M(n-1, \mathbb{K}))$ t.c.

$$Q\,B\,Q^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Posso costruire $\hat{Q} \in M(n, \mathbb{K})$, partendo da Q, in questa maniera:

$$\hat{Q} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

Si ha:

$$\hat{Q}\,P\,A\,P^{-1}\hat{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & * \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

STUDIO DI $\tau(V)/_\sim$

Volendo analizzare $\tau(V)/_\sim$, gli invarianti finora noti sono:

- $Sp\, f$;
- $P_f(x)$;
- $\forall \lambda \in Sp\, f$: $\mu_a(\lambda)$, $\mu_g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Questi costituiscono un invariante completo per $\tau(V)/_\sim$?
Purtroppo no.

CONTROESEMPIO

Siano $A, B \in M(4, \mathbb{K})$ triangolabili.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha:

- $P_A(x) = P_B(x) = x^4$;
- $Sp\, A = Sp\, B = \{0\}$;
- $\mu_a(0) = 4$ in entrambi i casi;
- $rk\, A = rk\, B = 2 \Rightarrow \dim V_0 = \mu_g(0) = 4 - 2 = 2$ in entrambi i casi.

Ma A e B sono simili?
Se lo fossero:

$$A \sim B \Rightarrow B = PAP^{-1} \Rightarrow B^2 = PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^2P^{-1} \ldots$$

In sostanza:

$$A \sim B \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : A^m \sim B^m$$

Ma:

$$\begin{array}{cccc} I & A & A^2 & A^3 \\ e_1 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \\ e_2 \longrightarrow & e_1 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \\ e_3 \longrightarrow & e_2 \longrightarrow & e_1 \longrightarrow & 0 \\ e_4 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & B & B^2 \\ e_1 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \\ e_2 \longrightarrow & e_1 \longrightarrow & 0 \\ e_3 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \\ e_4 \longrightarrow & e_3 \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$A^2 \not\sim B^2$$
$$\Downarrow$$
$$A \not\sim B, \text{ c.v.d.}$$

POLINOMI ED ENDOMORFISMI CONIUGATI

Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Sia $f \in End(V)$.

Definiamo allora $p(f)$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$
$$p(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + \dots + a_k f^k,$$

ove

- $f^0 = Id$;
- $f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}$

LEMMA

Se $g \sim f$, allora:

$\forall\, p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(f) \sim p(g)$

Dim.

Per ipotesi:

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$

Allora, preso $p(x) \in \mathbb{K}[x]$:

$$\begin{aligned} p(g) &= a_0 g^0 + a_1 g + \dots + a_k g^k = \\ &= a_0 + a_1 (h \circ f \circ h^{-1}) + \dots + a_k (h \circ f \circ h)^k = \\ &= a_0 + a_1 (h \circ f \circ h^{-1}) + \dots + a_k (h \circ f \circ \cancel{h^{-1}} \circ \cancel{h} \circ f \dots \circ h^{-1}) = \\ &= a_0 + a_1 (h \circ f \circ h^{-1}) + \dots + a_k (h \circ f^k \circ h^{-1}) = \\ &= h \circ p(f) \circ h^{-1}, \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

IDEALE DI UN ENDOMORFISMO

Dato $f \in End(V)$, si definisce IDEALE di f il seguente INVARIANTE:

$$I(f) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid p(f) = 0 \} =$$
$$= \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid \forall v \in V : p(f)(v) = 0 \}$$

Si ha che $I(f)$ verifica alcune proprietà, che si riassumono dicendo che $I(f)$ è l'ideale dell'anello $\mathbb{K}[x]$:

- $I(f)$ è chiuso rispetto alla somma:
  $p(f), q(f) \in I(f) \Rightarrow (p+q)(f) \stackrel{def}{=} p(f) + q(f) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (p+q)(f) \in I(f)$;
- In particolare, $(I(f), +)$ è un gruppo Abeliano;
- Se $q(x) \in I(f)$, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, allora:
  $$q(f)p(f) = 0 \cdot p(f) = 0 \Rightarrow p(x)q(x) \in I(f)$$

MATRICI DIAGONALIZZABILI

Ex. Discutere la diagonalizzabilità di A al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a & 0 \\ -1 & a & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{bmatrix}$$

Sappiamo che:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mu_a(\lambda_i) = 4 \\ \forall\, i : \mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i) \end{cases}$$

Allora:

$$P_A(x) = \det(A - xI) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} -x & -a & -a & 0 \\ -1 & a-x & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 1-x & a \\ 0 & 1 & 1 & -x \end{bmatrix} =$$

$$\Big\downarrow\ C_3 = C_3 - C_2$$

$$= \det \begin{bmatrix} -x & -a & 0 & 0 \\ -1 & a-x & x-1 & -a \\ 1 & 0 & 1-x & a \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix} =$$

$$\Big\downarrow\ R_2 = R_2 + R_3$$

$$= \det \begin{bmatrix} -x & -a & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & a \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

$$\det A = (1-x)(-x)(-x)(a-x)$$
$$= x^2 (1-x)(a-x)$$

Dunque:

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = a$

CASO 1

$a \neq 0$, $a \neq 1$

$$\mu_a(0) = 2 \qquad \mu_a(1) = 1 \qquad \mu_a(a) = 1$$

$$0 < \mu_g(0) \leq 2 \qquad 0 < \mu_g(1) \leq 1 \qquad 0 < \mu_g(a) \leq 1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\mu_g(1) = 1 \qquad \mu_a(a) = 1$$

Occorre che $\mu_g(0) = \dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} A = 4 - \operatorname{rk} A$ sia 2.
Dunque occorre che $\operatorname{rk} A$ sia 2.
Calcoliamolo.

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} 0 & -a & -a & 0 \\ -1 & a & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} -1 & a & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Si noti che al primo passaggio la prima e la quarta riga sono direttamente proporzionali, e al secondo passaggio si ha $R_2 = R_4 - R_3$)

Il rango di quella matrice (peraltro già ridotta a scalini) è 2, qualsiasi sia il valore di a. Dunque A è diagonalizzabile:

$$\mathbb{R}^4 = V(0) \oplus V(1) \oplus V(a)$$

Volendo determinare $\operatorname{Ker} A$, le equazioni necessarie sono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -z-at \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -z - at \\ y = -z \end{cases}$$

Dunque:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} -z-at \\ -z \\ z \\ t \end{bmatrix} \middle| \, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

CASO 2

$a = 0$

Si avrebbe:

$$\mu_a(0) = 3 \qquad \mu_a(1) = 1$$
$$\mu_g(0) = 2 \qquad \mu_g(1) = 1,$$

dato che $\dim \operatorname{Ker} A = 2 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

La matrice quindi non è diagonalizzabile.

CASO 3

$a = 1$

Si avrebbe:

$$\mu_a(0) = 2 \qquad \mu_a = 2$$
$$\mu_g(0) = 2 \qquad 0 < \mu_g(1) \leq 2$$

Valutiamo quindi la $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 4 - rk(A - I)$.

Valutiamo $rk(A - I)$:

$$rk \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = rk \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \operatorname{Ker}(A - I) = 1$$

A, quindi, non è diagonalizzabile.

Ex. Il seguente insieme:

$$E = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ è diagonalizzabile}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$?

Se lo fosse, dovrebbe essere chiuso rispetto alla somma.

Dunque, siano $A, B \in E$:

$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $M A M^{-1} = D_1$ diagonale

$\exists\, N \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $N B N^{-1} = D_2$ diagonale

Se $M = N$, allora:

$$D_1 + D_2 = M A M^{-1} + M B M^{-1} = M(A + B)M^{-1} = D \text{ diagonale}$$

ma in generale $M \neq N$, dunque la regola non è rispettata.

CONTROESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Consideriamo:

$$f_A : M(n, \mathbb{K}) \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$$
$$X \longrightarrow AX$$

So già che:

- f_A è lineare;
- $\dim \operatorname{Ker} f_A = n \cdot \dim \operatorname{Ker} A$:

$$AX = A \left[X^1 \middle| \dots \middle| X^n \right] = \left[AX^1 \middle| \dots \middle| AX^n \right]$$

$$\forall v \in \operatorname{Ker} A \; \exists : \left[v \middle| \dots 0 \right], \left[0 \middle| v \middle| \dots 0 \right], \dots \left[0 \dots \middle| v \right] \in \operatorname{Ker} f_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f_A = n \cdot \dim \operatorname{Ker} A$$

- λ è autovalore di $A \Leftrightarrow \lambda$ è autovalore per f_A:

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione.

Possiamo dire che:

$\exists \; v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0 \; \ni' \; Av = \lambda v$. Allora:

$$f_A \left[v \middle| 0 \dots 0 \right] = A \left[v \middle| \dots 0 \right] = \left[\lambda v \middle| 0 \dots 0 \right] = \lambda \left[v \middle| \dots 0 \right],$$

ossia λ è un autovalore per f_A.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Possiamo dire che:

$\exists \; X \in M(n, \mathbb{K}), X \neq 0 \; \ni' \; f_A(X) = \lambda X$

$$f_A X = f_A \left[X^1 \middle| X^2 \middle| \dots X^n \right] = \left[AX^1 \middle| \dots AX^n \right] = \left[\lambda X^1 \middle| \dots \lambda X^n \right]$$

Dato che $X = X^1, X^2 \dots X^n \neq 0$:

$\exists \; 1 \leq i \leq n \; \ni' \; X^i \neq 0 \; \wedge \; AX^i = \lambda X^i$

Quindi esiste un autovettore relativo a λ per A, dunque λ è un autovalore per A.

- A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow f_A$ è diagonalizzabile

Dimostriamo la prima implicazione. Sia:

$$\{v_1, \dots v_n\}$$

una base di autovettori per A, con $v_1 \dots v_n \in \mathbb{K}^n$.

Allora il seguente insieme di vettori di $M(m,\mathbb{K})$ è una base di autovettori per f_A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} v_1 \,|\, 0 \ldots 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \,|\, v_1 \,|\, 0 \ldots 0 \end{bmatrix}, \ldots \ldots \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \,|\, v_1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\ldots$$

$$\left. \begin{bmatrix} v_m \,|\, 0 \ldots 0 \end{bmatrix}, \ldots \ldots \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \,|\, v_m \end{bmatrix} \right\}$$

È facile dimostrarlo, sfruttando la posizione delle colonne non nulle e il fatto che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una lista di vettori linearmente indipendenti (unita al fatto che le matrici di questo insieme create sono tante quant'è la dimensione di $M(m,\mathbb{K})$).

Dimostriamo la seconda implicazione.

Sia:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix} \right\}$$

una base di autovettori per f_A.

Considero la seguente applicazione lineare:

$$\varphi : M(m,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$M \longmapsto M^1$$

Questa applicazione è ovviamente suriettiva:

$$\operatorname{Imm} \varphi = \mathbb{K}^m$$

Sia quindi $\mathcal{B}$ la base di m^2 autovettori di $M(m,\mathbb{K})$:

$$\mathcal{B} = \{ v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{mm} \}$$

Ho che:

$$\operatorname{Span}(\varphi(v_{11}) \ldots \varphi(v_{mm})) = \operatorname{Imm} \varphi = \mathbb{K}^m,$$

e quindi posso estrarre una base di $\mathbb{K}^m$ costituita, per costruzione, da autovettori per A, c.v.d.

RIEPILOGO SULL'IDEALE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n. Consideriamo la seguente struttura:

$$\operatorname{End}(V)/_{\sim}$$

Allora, sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Posso calcolare $p(f)$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$
$$\Downarrow$$
$$p(f) = a_0 \, Id + a_1 f + \dots + a_k f^k \in \operatorname{End}(V)$$

La funzione così definita:

$$\psi : (\mathbb{K}[x], +, \cdot) \longrightarrow (\operatorname{End}(V), +, \circ)$$
$$p(x) \longrightarrow p(f)$$

è un omomorfismo per anelli, con le operazioni così definite:

- SOMMA:

$$(p(x) + q(x))(f) = p(f) + q(f)$$

- PRODOTTO:

$$(p(x)\, q(x))(f) = p(f) \circ q(f)$$

Inoltre la composizione risulta commutativa, in questo caso:

$$(p(x)\, q(x))(f) = p(f) \circ q(f)$$
$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$
$$(q(x)\, p(x))(f) = q(f) \circ p(f)$$

ES. $(1 + x) \qquad (x^2 + 2x)$

$\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$(Id + f) \qquad (f^2 + 2f)$

$p(f) + q(f) = Id + 3f + f^2$

$(p+q)(f) = (1 + 3x + x^2)(f) = Id + 3f + f^2$

ES. $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2 \longrightarrow a^2 \, Id - f^2$

$\qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$(a\,Id - f)\circ(a\,Id + f) = a^2\, Id \circ Id + a\, Id \circ f - a\, f \circ Id - f^2 = a^2\, Id - f^2$

Inoltre sappiamo (è stato dimostrato) che se $g \sim f$, allora:

$$\forall\, p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(f) \sim p(g)$$

Dunque $p(f) = 0 \iff p(g) = 0$.

Abbiamo poi definito l'IDEALE di un endomorfismo:

$$I(f) = \{ p(t) \mid p(f) = 0 \} = \operatorname{Ker} F,$$

ove F è così definita:

$$F : (\mathbb{K}[x], +, \cdot) \longrightarrow (\operatorname{End}(V), +, \circ)$$
$$p(x) \longrightarrow p(f)$$

$$I(f) = \operatorname{Ker} F$$

Si ha che $(I(f), +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{K}[x], +)$:

$\forall v \in V$: $p(x), q(x) \in I(f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(f)(v) = 0 \\ q(f)(v) = 0 \end{cases} \Rightarrow (p+q)(f)(v) = p(f)(v) + q(f)(v) =$$
$$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow (p+q)(x) \in I(f)$$

Inoltre:

$$p(x) \in I(f)$$
$$q(x) \in \mathbb{K}[x]$$
$$\Downarrow$$

$$\forall v \in V \quad (p(x)q(x))(f) = (q(x)p(x))(f) = (q(f) \circ p(f))(v) =$$
$$= q(f) \circ p(f)(v) = q(f)(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x)q(x) \in I(f)$$

TEOREMA

L'ideale di f, $I(f)$, contiene sicuramente almeno un polinomio non nullo.

Dim.

Dato che $\mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato, e:

$$\dim \operatorname{End}(V) = n^2,$$

allora i vettori seguenti:

$$1 \quad f \quad f^2 \quad \ldots \quad f^k, \qquad k = n^2$$

che sono (n^2+1), sono linearmente dipendenti.

Dunque:

$\exists\, a_0, a_1 \ldots a_k$ non tutti nulli t.c.:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \neq 0$$
$$p(f) = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + \ldots + a_k f^k = 0, \text{ c.v.d.}$$

Quindi $I(f) \subseteq \mathbb{K}[x]$, $I(f) \neq \{0\}$.

POLINOMIO MINIMO

Per definizione un polinomio minimo per f è un polinomio $q_f(x) \in I(f)$, $q_f(x) \neq 0$, ed è un polinomio avente grado minimo tra i polinomi con queste proprietà.

Sia $q_f(x)$ un polinomio minimo. Allora, $\forall\, p(x) \in I(f)$:

$$q_f(x) \mid p(x),$$

ossia $p(x) = a(x)\, q_f(x)$.

In altre parole, $I(f)$ è generato da $q_f(x)$.

Dim.

Sia $p(x) \in I(f)$. Operando la divisione euclidea con $q_f(x)$, si ha:

$$p(x) = a(x)\, q_f(x) + r(x),$$

$$\deg r(x) < \deg q_f(x)$$

Allora:

$$r(x) = -p(x) + a(x)\, q_f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$r(x) \in I(f)$$

Allora, essendo $q_f(x)$ un polinomio minimo, ed avendo $r(x)$ grado strettamente minore, allora (dato che $r(f) = 0$) si ha $r(x) = 0$, ossia:

$$p(x) = a(x)\, q_f(x)$$

$$q_f(x) \mid p(x), \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Siano $q_f(x)$, $q_f'(x)$ due polinomi minimi. Allora:

$$\begin{cases} q_f(x) \mid q_f'(x) \\ q_f'(x) \mid q_f(x) \end{cases} \Rightarrow q_f' = \lambda q_f, \quad \lambda \neq 0$$

COROLLARIO

Esiste un unico polinomio minimo che è anche MONICO: esso è detto "il polinomio minimo".

OSSERVAZIONE

Il polinomio minimo $q_f(x)$ è un polinomio invariante per coniugazione.
Infatti, se $I(f)$ è invariante, allora anche il suo generatore lo è.

Ex. Le matrici seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che (si è dimostrato) hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili, in effetti non hanno lo stesso polinomio minimo:

$$p_A(x) = p_B(x) = x^4, \text{ ma } \quad q_A(x) = x^3; \quad q_B(x) = x^2.$$

POLINOMI CARATTERISTICO E MINIMO

TEOREMA

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato, tale che:

$$\dim V = n$$

Si ha che il polinomio caratteristico di $f \in End(V)$ è un elemento di $I(f)$, ossia

$$q_f(x) \mid P_f(x)$$

Dim.

CASO INIZIALE

Supponiamo f triangolabile. Allora:

$$P_f(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2) \dots (x - \mu_n)$$

Quindi:

$$P_f(f) = (f - \mu_1 Id) \circ (f - \mu_2 Id) \dots \circ (f - \mu_n Id)$$

(Si ricordi che questi fattori, della forma $(f - \mu_i Id)$, possono commutare).

Dato che f è triangolabile, esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ di V tale che la bandiera è f-invariante.

Per dimostrare la tesi, dunque, occorre dimostrare che:

$$\forall\, j = 1 \dots n : P_f(f)(v_j) = 0$$

Ora sfruttiamo il fatto che i fattori possono commutare:

$$P_f(f)(v_1) = (f - \mu_1 Id) \circ (f - \mu_2 Id) \circ \dots \circ (f - \mu_n Id)(v_1) =$$
$$= (f - \mu_2 Id) \circ \dots (f - \mu_n Id) \circ (f - \mu_1 Id)(v_1) =$$
$$= (f - \mu_2 Id) \circ \dots (f - \mu_n Id) \circ (f(v_1) - \mu_1 v_1)$$

Dato che v_1 è il primo vettore della base con bandiera f-invariante, è un autovettore per μ_1:

$$f(v_1) = \mu_1 v_1$$

Dunque:

$$P_f(f)(v_1) = (f - \mu_2 Id) \circ \dots \circ (f - \mu_n Id)(0) = \dots = 0$$

Ora passo a v_2:

$$P_f(f)(v_2) = (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(f-\mu_n Id)\circ(f-\mu_1 Id)\circ(f-\mu_2 Id)(v_2) =$$

Sappiamo che:

$$f(v_2) = * v_1 + \mu_2 v_2$$

Dunque:

$$P_f(f)(v_2) = (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(f-\mu_1 Id)\circ(f(v_2)-\mu_2 v_2) =$$
$$= (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(f-\mu_1 Id)\circ(* v_1 + \cancel{\mu_2 v_2} - \cancel{\mu_2 v_2}) =$$
$$= (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(f-\mu_1 Id)(* v_1) =$$
$$= (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(f(* v_1) - \mu_1 * v_1) =$$
$$= (f-\mu_3 Id)\circ\dots\circ(\cancel{\mu_1 * v_1} - \cancel{\mu_1 * v_1}) = \dots = 0$$

È chiaro che il procedimento può essere ripetuto per ogni vettore.
Dunque il caso delle matrici triangolabili è completamente dimostrato.

CASO GENERALE

Se f non è triangolabile, posso costruire un campo di spezzamento per $P_f(x)$:

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F},$$

ove il polinomio è completamente fattorizzabile.
Mi riconduco quindi al caso di f triangolabile.
Il teorema è dimostrato, c.v.d.

TEOREMA

Sia $\lambda \in Sp\, f$, sia $p(x) \in I(f)$.
Allora:

$$p(\lambda) = 0,$$

e in particolare:

$$q_f(\lambda) = 0.$$

Dim.

Per ipotesi:

$\forall\, v \in V: \quad p_f(v) = 0$

Considero dunque un vettore $v \neq 0$ autovettore per λ.

Ho che:

$$P_f(v) = (a_0 Id + a_1 f + \dots + a_k f^k)(v) = 0$$

E:

$$f(v) = \lambda v \qquad f^2(v) = f(f(v)) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

$$f^k = \lambda^k v$$

Allora:

$$P_f(v) = (a_0 v + a_1 \lambda v + a_2 \lambda^2 v \dots + a_k \lambda^k v) = 0$$

$$P_f(v) = (v)(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_k \lambda^k) = 0$$

$$P_f(v) = (v)(p(\lambda)) = 0$$

Dato che $v \neq 0$:

$$p(\lambda) = 0, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Se f è triangolabile, quindi:

$$P_f(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} \dots (x - \lambda_k)^{\mu_a(\lambda_k)}$$

Ho che:

$$\begin{cases} q_f(x) \mid P_f(x) \\ q_f(\lambda_i) = 0 \quad \forall \lambda_j \end{cases}$$

Dunque:

$$q_f(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k},$$

ove $\forall i = 1 \dots k : 1 \leq r_i \leq \mu_a(\lambda_i)$

TEOREMI SUGLI ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Sia $f \in End(V)$, con $V = A \oplus B$, con A, B sottospazi vettoriali di V entrambi f-invarianti.

Allora:

f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $f|_A$ e $f|_B$ lo sono

Dim.

Dimostriamo prima la seconda implicazione.

Per ipotesi:

$\exists$ $\mathcal{B}$ di A fatta di autovettori per $f|_A$;

$\exists$ $\mathcal{D}$ di B fatta di autovettori per $f|_B$.

Quindi:

$\forall v_i \in \mathcal{B} : f|_A(v_i) = f(v_i) = \mu_i v_i$

$\forall w_j \in \mathcal{D} : f|_B(w_j) = f(w_j) = \mu_j w_j$

Dunque:

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{B}, \mathcal{D}\}$$

è una base di V costituita, per costruzione, da autovettori per f.

Dimostriamo ora la prima implicazione.

Per ipotesi:

$\exists$ $\mathcal{B}$ di V di autovettori per f:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_m\}$$

Dato che $V = A \oplus B$:

$\forall v_i \in \mathcal{B}$ $\exists!$ $a_i \in A$ $\wedge$ $\exists!$ $b_i \in B$ t.c. $v_i = a_i + b_i$

Quindi:

$f(v_i) = f(a_i + b_i) = f(a_i) + f(b_i)$

$f(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i$

$\Rightarrow f(a_i) + f(b_i) = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i$

Dato che $V = A \oplus B$:

$$\begin{cases} f(a_i) = \lambda_i a_i \\ f(b_i) = \lambda_i b_i \end{cases}$$

Considero dunque i seguenti due insiemi, ottenuti mediante la proiezione dei vettori della base di V su A e B:

$$\{a_1 \dots a_i \dots a_m\} \subseteq A$$
$$\{b_1 \dots b_i \dots b_m\} \subseteq B,$$

ove tutti i vettori sono autovettori per $f|_A$ o $f|_B$.

Considero le due funzioni proiettive:

$$\pi_A : V \longrightarrow A \qquad \pi_B : V \longrightarrow B$$
$$\pi_A(v_i) = a_i \qquad \pi_B(v_i) = b_i$$

Ognuna di queste due funzioni è suriettiva, perché:

$\forall\ a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m \in A\ \exists\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \ni' \pi_A(v) = a$;

$\forall\ b = \beta_1 b_1 + \dots \beta_m b_m \in B\ \exists\ v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \ni' \pi_B(v) = b$.

Dunque:

$$A = \operatorname{Imm} \pi_A \qquad B = \operatorname{Imm} \pi_B$$

Quindi quelle due liste di vettori sono costituite, per costruzione, da autovettori di $f|_A$ o $f|_B$, e generano rispettivamente A e B. Dunque posso estrarre due basi. Dunque:

$$\begin{cases} f|_A \text{ è diagonalizzabile} \\ f|_B \text{ è diagonalizzabile, c.v.d.} \end{cases}$$

TEOREMA

Sia $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabile.

Sia W un sottospazio vettoriale di V f-invariante (ossia $f(W) \subseteq W$) (e dunque $f|_W \in \operatorname{End}(W)$).

Considero:

$$f|_W : W \longrightarrow W$$

Si ha che essa è diagonalizzabile.

Dim.

Per ipotesi, siano:

- $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V di autovettori per f;
- $\{z_1 \dots z_p\}$ una base di W.

Dunque, posso usare gli algoritmi di estensione ed estrazione:

$$\{z_1 \dots z_p, v_1 \dots v_n\} \rightsquigarrow \{z_1 \dots z_p, v_{j_1} \dots v_{j_{n-p}}\} \text{ base di } V$$

Considero:

$$U = \operatorname{Span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-p}})$$

Ho che:

- U è f-invariante, così come W;
- $V = W \oplus U$.

Per il Teorema precedente, dato che f è diagonalizzabile, anche $f|_W : W \to W$ lo è, c.v.d.

Ex. Siano:

- $A \in M(n, \mathbb{K})$ con n autovalori distinti;
- $B \in M(n, \mathbb{K})$ tale che $AB = BA$.

Allora B è diagonalizzabile.

CASO PARTICOLARE

Supponiamo che A sia proprio una matrice diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall\, i \neq j$$

Se $BA = AB$, allora:

$$\begin{bmatrix} \\ & B & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & A & \\ \\ \end{bmatrix} = \left[\lambda_1 B^1 \,\middle|\, \lambda_2 B^2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \lambda_n B^n \right]$$

$$\begin{bmatrix} \\ & A & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & B & \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 B_1 \\ \vdots \\ \lambda_n B_n \end{bmatrix}$$

Analizzando gli elementi che non si trovano sulla diagonale, si nota che:

$$\lambda_i [B]_{ij} = \lambda_j [B]_{ij}$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)[B]_{ij} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[B]_{ij} = 0$$

Dunque B è diagonale.

CASO GENERALE

So che:

$\exists\ M \in GL(n, \mathbb{K})\ \ni'\ M^{-1} A M = D$ diagonale

Allora genero $\tilde{B}$ in questa maniera:

$$\tilde{B} = M^{-1} B M$$

Noto che:

$D\tilde{B} = M^{-1} A M M^{-1} B M = M^{-1} A B M = M^{-1} B A M = M^{-1} B M M^{-1} A M =$
$= \tilde{B} D$

Dunque, se D è diagonale, anche $\tilde{B}$ lo è. Allora B simile a $\tilde{B}$, è diagonalizzabile, c.v.d.

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

Nello studio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato, il nostro obiettivo è diventato quello di determinare sottospazi di V che siano f-invarianti, e tali che la restrizione di f sia semplice da studiare.

TEOREMA

Sia $f \in End(V)$. Siano $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che:

- $MCD(p(x), q(x)) = 1$;
- $p(x) \cdot q(x) \in I(f)$.

Allora:

$$V = Ker\, p(f) \oplus Ker\, q(f),$$

ed entrambi gli addendi diretti sono f-invarianti.

Dim.

Consideriamo il seguente insieme:

$$I(p(x), q(x)) = \{a(x)\, p(x) + b(x)\, q(x) \mid a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]\}$$

Si noti ora che:

$$\begin{array}{l} p(x) = 1 \cdot p(x) + 0 \cdot q(x) \\ q(x) = 0 \cdot p(x) + 1 \cdot q(x) \end{array} \Rightarrow p(x), q(x) \in I(p(x), q(x)) \Rightarrow I(p(x), q(x)) \neq 0$$

Allora esiste un unico polinomio minimo e monico $d(t)$ in $I(p(x), q(x))$, e questo polinomio genera $I(p(x), q(x))$.

Sicuramente:

$\forall\, s(x) \in I(f): \ d(x) \mid s(x)$

In particolare, si ha:

$$d(x) = M.C.D.\,(p(x), q(x))$$

Per l'identità di Bezout, quindi:

$$d(x) = a(x)\, p(x) + b(x)\, q(x)$$

In questo caso, calcolo in f:

$$Id = a(f) \circ p(f) + b(f) \circ q(f)$$

Quindi:

$\forall\, v \in V: \ v = a(f) \circ p(f)(v) + b(f) \circ q(f)(v)$

Ora si noti che:

- $q(f) \circ (a(f) \circ p(f))(v) = a(f) \circ (q(f) \circ p(f))(v) =$
  $a(f) \circ (qp)(f)(v) = 0$, poiché $qp \in I(f)$;
- $p(f) \circ (b(f) \circ q(f))(v) = b(f) \circ (p(f) \circ q(f))(v) =$
  $b(f) \circ (pq)(f)(v) = 0$, poiché $pq \in I(f)$.

Dunque:

- $a(f) \circ p(f) \in \operatorname{Ker} q(f)$;
- $b(f) \circ q(f) \in \operatorname{Ker} p(f)$.

$$V = \operatorname{Ker} p(f) + \operatorname{Ker} q(f)$$

I due spazi sono in posizione di somma diretta:

$v \in \operatorname{Ker} p_f \cap \operatorname{Ker} q_f$

$$v = a(f) \circ p(f)(v) + b(f) \circ q(f)(v) =$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Dunque:

$$V = \operatorname{Ker} p(f) \oplus \operatorname{Ker} q(f)$$

Si noti ora che, presi $a(f) \in \operatorname{Ker} p(f)$ e $b(f) \in \operatorname{Ker} q(f)$, si ha:

- $f(a(f)) = f \circ a(f)$
- $f(b(f)) = f \circ b(f)$

Ora:

- $p(f \circ a(f)) = p(f(a(f))) = f(p(a(f))) = f(0) = 0$,
- $q(f \circ b(f)) = q(f(b(f))) = f(q(b(f))) = f(0) = 0$.

Dunque entrambi gli addendi sono f-invarianti:

- $f \circ a(f) \in \operatorname{Ker} p(f)$;
- $f \circ b(f) \in \operatorname{Ker} q(f)$.

DECOMPOSIZIONI PER ENDOMORFISMI TRIANGOLABILI

Supponiamo che $f \in End(V)$ sia un endomorfismo triangolabile.
È già noto che:

$$p_f(x) = \pm \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

$$q_f(x) = \pm \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{r_j},$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$; $\sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = n = \dim V$; $\forall j = 1 \dots k$: $1 \leq r_j \leq \mu_a(\lambda_j)$.

Applicando ripetutamente il Teorema di decomposizione primaria, si ha:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(f - \lambda_i Id\right)^{\mu_a(\lambda_i)}$$

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker\left(f - \lambda_j Id\right)^{r_j}$$

LEMMA

È la stessa decomposizione:

$$\forall j = 1 \dots k : Ker\left(f - \lambda_j Id\right)^{\mu_a(\lambda_j)} = Ker\left(f - \lambda_j Id\right)^{r_j}$$

Dim.

Dato un generico endomorfismo $g: W \to W$, in generale si ha:

$$Ker\, g \subseteq Ker\, g^2 \subseteq Ker\, g^3 \dots \subseteq Ker\, g^n \subseteq Ker\, g^{n+1} \subseteq \dots$$

In particolare, è stato dimostrato che le inclusioni sono sempre strette, e quando si presenta la prima uguaglianza, le altre sono tutte uguaglianze:

$$Ker\, g^r \subseteq Ker\, g^{r+1} \subseteq Ker\, g^{r+2}$$

Supponiamo $Ker\, g^r = Ker\, g^{r+1}$, sia $v \in Ker\, g^{r+2}$. Allora:

$$g^{r+2}(v) = g^{r+1}(g(v)) = 0 \Rightarrow g(v) \in Ker\, g^{r+1} \Rightarrow g(v) \in Ker\, g^r$$

$$g^r(g(v)) = g^{r+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker\, g^{r+1}.$$

Dunque:

$$Ker\, g^r = Ker\, g^{r+1} \Rightarrow Ker\, g^{r+1} = Ker\, g^{r+2}$$

Ritornando al nostro caso, ovviamente si ha:

$$Ker\left(f - \lambda_j Id\right)^{r_j} \subseteq Ker\left(f - \lambda_j Id\right)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

Ma un'immediata conseguenza del Teorema di decomposizione primaria ci suggerisce che, se $\dim V = n$:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(f - \lambda_j \, Id)^{\mu_a(\lambda_j)} = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(f - \lambda \, Id)^{\varepsilon_j},$$

dunque necessariamente:

$\forall \, j = 1, \dots, k : \operatorname{Ker}(f - \lambda_j Id)^{\varepsilon_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j \, Id)^{\mu_a(\lambda_j)}$, c.v.d.

Sempre per il Teorema di decomposizione primaria, si ha che ogni addendo diretto è f-invariante.

Analizziamo quindi la restrizione dell'endomorfismo triangolabile f ad ogni addendo diretto.

Per comodità, indichiamo con $W_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \, Id)^{\mu_a(\lambda)}$

Si ha innanzitutto che

$\forall \, v \in V_\lambda : v \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id) \subseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)^{\mu_a(\lambda)} = W_\lambda$

$\forall \, v \in V_\lambda : v \in W_\lambda$

Inoltre:

$$Sp\left(f|_{W_\lambda}\right) = Sp\left(f|_{\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)^{\mu_a(\lambda)}}\right) = \{\lambda\}$$

Dunque, come conseguenza immediata:

$$p_{f|_{W_\lambda}}(x) = \pm(x - \lambda)^{\mu_a(\lambda)} \qquad q_{f|_{W_\lambda}}(x) = \pm(x - \lambda)^{\varepsilon_\lambda}$$

Dunque, dato che:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} W_{\lambda_j}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{\lambda_1}, \mathcal{B}_{\lambda_2} \dots \mathcal{B}_{\lambda_k}\}$$

Si ha:

$$B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \lambda_1 \; * \\ 0 \; \ddots \end{array} & & O \\ & \begin{array}{c} \lambda_2 \; * \\ 0 \; \ddots \end{array} & \\ O & & \ddots \\ & & \begin{array}{c} \lambda_k \; * \\ 0 \; \ddots \end{array} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con $L_1, L_2 \dots L_k$ i "blocchi" di cui è composta $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, si ha:

$$P_f(x) = \prod_{j=1}^{k} P_{L_j}(x),$$

per ipotesi completamente fattorizzabile.

Ci siamo dunque ridotti a studiare degli endomorfismi "particolari":

$$g : W_\lambda \to W_\lambda \qquad \dim W_\lambda = m,$$

tali che:

$$P_g(x) = \pm(x-\lambda)^{\mu_a(\lambda)} \qquad q_g(x) = \pm(x-\lambda)^{r} \quad 1 \le r \le m,$$

ove in particolare $\mu_a(\lambda) = m = \dim W_\lambda$.

Inoltre, per quanto appena visto:

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$$

$$W_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)^{m} = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)^{r}$$

Abbiamo quindi la seguente "stringa":

$$\dim V_\lambda(g) = d_1 < d_2 < \dots < d_r = \dim W_\lambda = m$$

ESERCIZI VARI

Ex. Sia:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \{ A \in M(2, \mathbb{K}) \mid AM = MA \}$$

Costruire, se esiste, $f \in End(V)$ tale che:

- $rk\ f = 2$;
- H è un autospazio;
- $f \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$;
- f non è diagonalizzabile.

Innanzitutto, individuiamo H:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - 2b & a \\ 2c - 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -2a & -2b \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\begin{cases} \cancel{2a} - 2b = \cancel{2a} + c \\ a = 2b + d \\ 2c - 2d = -2a \\ -2b = c \end{cases} \quad \begin{cases} -2b = c \\ a = 2b + c + a \\ 2d = 2c + 2a \\ -2b = c \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\cancel{c} + \cancel{c} + a \\ c = -2b \\ 2d = 2c + 2a \end{cases} \quad \begin{cases} c = -2b \\ d = -2b + a \end{cases}$$

$$H = Span\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -2b & -2b + a \end{bmatrix}\right) = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

Per comodità, notiamo che:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$H = Span(M, I)$$
$$\dim H = 2$$

Ora guardo alla terza richiesta. Per semplicità, si può cercare di creare una base che contenga le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Possiamo perciò valutare se le matrici M, I, A, B formano una base di $M(2, \mathbb{K})$. Per valutare ciò, usiamo un isomorfismo canonico

$$\varphi : M(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Dunque, valutiamo la seguente matrice:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Se $\operatorname{rk} V = 4$, ossia $\det V \neq 0$, allora:

$$\{M, I, A, B\} \text{ base di } M(2, \mathbb{K})$$

Calcoliamo il determinante:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \blacktriangleright (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \blacktriangleright (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \blacktriangleright$$

$$\blacktriangleright (-1)(4) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = (-1)(4)(2) = -8 \neq 0.$$

Dunque abbiamo individuato una base.

Usiamo le seguenti notazioni:

$$M = v_1 \qquad I = v_2 \qquad A = v_3 \qquad B = v_4$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ base di } M(2, \mathbb{K})$$

Per costruire l'endomorfismo richiesto, imponiamo le condizioni sulle immagini dei vettori della base. Per le condizioni 1 e 3 si ha:

$$v_1 \to \lambda v_1 \qquad v_2 \to \lambda v_2$$

$$v_3 \to v_4 \qquad v_4 \to *$$

In generale, $\operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}(\lambda v_1, \lambda v_2, v_4, *)$. Se fosse $\lambda \neq 0$, si avrebbe $\dim \operatorname{Imm} f \geq 3$, contro le richieste. Dunque necessariamente $\lambda = 0$.

Rianalizziamo la situazione:

$$v_1 \to 0 \qquad v_2 \to 0$$
$$v \to v_4 \qquad v_4 \to *$$

Affinché rk $f = 2$, $*$ dev'essere un vettore linearmente indipendente da v_4.

Rappresentiamo la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora imporre le questa condizione. Sfruttiamo la presenza di questi zeri per effettuare un tentativo. Supponiamo $a = b = 0$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

Si ha:

$$P_f(x) = x^2 (x(x-d) - c)$$

Se poniamo $c = -1$, $d = 1$:

$$P_f(x) = x^2 (x(x-1) + 1) =$$
$$= x^2 (x^2 - x + 1)$$

non è completamente fattorizzabile, dunque f non è diagonalizzabile.

OSSERVAZIONE

Siano $A \sim B$ due matrici simili. Allora:

$$\forall p \in \mathbb{N} : A^p \sim B^p$$

Dim.

$$B = GAG^{-1} \Rightarrow B^p = GA\cancel{G^{-1}}\,\cancel{G}A\cancel{G^{-1}} \dots \cancel{G}AG^{-1} = GA^pG^{-1} \Rightarrow B^p \sim A^p$$

Il viceversa non vale.

CONTROESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 \sim B^2, \text{ ma } A \nsim B$$

OSSERVAZIONE

Se λ è autovalore per A:

$\forall\, p \in \mathbb{N}$: λ^p è autovalore di A^p

Dim.

$$A^2 v = A(A(v)) = A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda \lambda v = \lambda^2 v$$

In generale, se per ipotesi induttiva la proprietà vale per A^{p-1}, allora:

$$A^p(v) = A(A^{p-1} v) = A(\lambda^{p-1} v) = \lambda^{p-1} A v = \lambda^{p-1} \lambda v = \lambda^p v, \text{ c.v.d.}$$

Es. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, tali che $A^2 = B^2 = I$.

Se $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, allora $A \sim B$.

Dim.

A e B rappresentano delle involuzioni. Dunque:

$$A^2 = I \Rightarrow A \sim \left[\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-h} \end{array}\right], \quad \operatorname{tr} A = 2h - n$$

$$B^2 = I \Rightarrow B \sim \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right], \quad \operatorname{tr} B = 2k - n$$

Ora:

$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \Rightarrow h = k$. Perciò:

$$A \sim \left[\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-h} \end{array}\right] \sim B, \text{ e per la transitività, } A \sim B, \text{ c.v.d.}$$

Ex. Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

troviamo una base a bandiera f-invariante per A.

Innanzitutto studiamo la matrice dal punto di vista della triangolabilità e della diagonalizzabilità:

$$P_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} = (2-x)\left((3-x)(1-x)+1\right) =$$

$$= (2-x)(3+x^2-4x+1) = (2-x)(2-x)^2 = (2-x)^3$$

Dunque esiste un solo autovalore:

$$\lambda = 2 \qquad \mu_a(\lambda) = 3$$

La matrice è quindi triangolabile, visto che il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile.
Essa però non è diagonalizzabile, infatti:

$$\mu_g(\lambda) = \operatorname{Ker}(A-2I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$$

Abbiamo dimostrato, comunque, che la ricerca di una base di $\mathbb{R}^3$ f-invariante per A ha senso.
La matrice rispetto a questa base sarà del tipo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} 2 & & * \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il primo vettore, dunque, sarà un autovettore rispetto all'autovalore 2:

$$v_1 \in V_2 \Rightarrow v_1 \in \operatorname{Ker}(A-2I)$$

Consideriamo $(A-2I)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

È immediato che, dato che la seconda colonna e la terza sono identiche:

$$v_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \in V_2$$

Dato che $\dim V_2 = 1$, quel vettore rappresenta una base di V_2:

$$V_2 = Span\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = Span\,(e_2 - e_3)$$

Completo a piacere a base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{e_2 - e_3,\ e_1,\ e_2\}$$

Ora:

- $A(e_2 - e_3) = 2(e_2 - e_3)$
- $A(e_1) = 2e_1 + e_2 = 2v_2 + v_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$
- $A(e_2) = 3e_2 - e_3 = v_1 + 2v_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

Allora:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Consideriamo ora:

$$W = Span\,(v_2, v_3) = Span\,(e_1, e_2)$$

Si ha che:

$$\mathbb{R}^3 = Span\, v_1 \oplus Span\,(v_2, v_3) = V_2 \oplus W$$

Dunque, in generale:

$$A|_W : W \to \mathbb{R}^3$$

Ma proiettando su W si ottiene un endomorfismo:

$$\pi_W \circ A|_W : W \to \mathbb{R}^3 \to W \Rightarrow \pi_W \circ A|_W \in End(W)$$

Sia:

$$\mathcal{G} = \{v_2, v_3\} = \{e_1, e_2\}$$

una base di A. Si ha:

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(\pi_W \circ A|_W) = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = B$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P_A(x) = (2-x)\, P_B(x) = (2-x)^3 \Rightarrow P_B(x) = (2-x)^2$$

Consideriamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (B - 2I)$$

Sicuramente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(B - 2I)$$

Ma $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è la proiezione su W di v_3, che quindi risulta un autovettore per $\pi_W \circ A_{|W}$.

Completo a piacere a base di W:

$$S = \{ \bar{v}_3 , \bar{v}_2 \} \text{ base di } W$$

Dunque:

$$\mathcal{B} = \{ v_1 , v_3 , v_2 \} = \{ e_2 - e_3 , e_2 , e_1 \}$$

è la base che cercavamo.

Effettuiamo le verifiche:

- $A(e_2 - e_3) = 2(e_2 - e_3)$
- $A(e_2) = 3e_2 - e_3 = (e_2 - e_3) + 2e_2$
- $A(e_1) = 2e_1 + e_2$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRICI SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZABILI

Consideriamo due matrici quadrate dello stesso formato, diagonalizzabili:

$$A, B \in \mathrm{Diag}(M(n, \mathbb{K}))$$

A e B si dicono SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZABILI se e solo se esiste una base comune di autovettori, ossia:
$\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $M^{-1} A M = D_1$ diagonale e $M^{-1} B M = D_2$ diagonale.

Si ha che:

A e B sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow AB = BA$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per ipotesi:
$\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $M^{-1} A M = D_1$ e $M^{-1} A M = D_2$

Dato che le matrici diagonali commutano:
$AB = M D_1 M^{-1} M D_2 M^{-1} = M D_1 D_2 M^{-1} = M D_2 D_1 M^{-1} = M D_2 M^{-1} M D_1 M^{-1} =$
$= BA \Rightarrow AB = BA$

Dimostriamo la seconda implicazione.
Per ipotesi:
- $AB = BA$;
- A e B sono entrambi diagonalizzabili.

Dato che A è diagonalizzabile:

$$\mathbb{K}^n = V(\lambda_1, A) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p, A)$$

Inoltre, sfruttando il fatto che $AB = BA$, ogni autospazio di A risulta B-invariante:
$\forall i = 1 \dots p : B(V(\lambda_i, A)) \subseteq V(\lambda_i, A)$
$\forall v \in V(\lambda_i, A) : Bv \in V(\lambda_i, A)$
Infatti:
$A(B(v)) = B(A(v)) = B(\lambda_i v) = \lambda_i (B(v))$

Inoltre, visto che B è diagonalizzabile:
$\forall i = 1 \dots p : B|_{V(\lambda_i, A)}$ è diagonalizzabile

Allora in $V(\lambda_i, A)$ esiste una base di autovettori sia per B che per A. Quindi:

$$\{ \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p \}$$

è la base di autovettori comuni che cercavamo: A e B, quindi, sono simultaneamente diagonalizzabili, c.v.d.

MATRICI SIMULTANEAMENTE TRIANGOLABILI

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ due matrici triangolabili.
Avendo dimostrato che, per quelle diagonalizzabili, vale:

A e B sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow AB = BA$,

ci chiediamo se qualcuna di queste relazioni vale:
- A, B sono simultaneamente triangolabili $\Rightarrow AB = BA$;
- $AB = BA \Rightarrow A, B$ sono simultaneamente triangolabili.

La risposta alla prima domanda è negativa.

CONTROESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La risposta alla seconda domanda è positiva.

Dim.

Per ipotesi:
- A e B sono triangolabili;
- $AB = BA$.

Innanzitutto:

$\exists\ \lambda$ autovalore per A

Considero allora l'autospazio associato $V(\lambda, A)$. Si vede che:

$AB = BA \Rightarrow B(V(\lambda, A)) \subseteq V(\lambda, A)$

Infatti:

$\forall\ v \in V(\lambda, A) : B(v) \in V(\lambda, A)$,

dato che:

$A(B(v)) = B(A(v)) = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$

Dunque:

$$B|_{V(\lambda, A)} \in \mathrm{End}(V(\lambda, A))$$

Considero quindi una base $\mathcal{F}$ di $V(\lambda, A)$, e la completo a $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ base di $\mathbb{K}^n$. Si ha allora:

$$M^{\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}_{\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}(B) = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline 0 & M_3 \end{array}\right],$$

ove $M_1 = M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}\left(B|_{V(\lambda, A)}\right)$

Ora, per ipotesi, $P_B(x)$ è completamente fattorizzabile, visto che B è triangolabile. Allora:

$$P_B(x) = P_M(x) = P_{M_1}(x)\, P_{M_3}(x) \Rightarrow P_{M_1}(x) \text{ è completamente fattorizzabile}$$

Allora $B|_{V(\lambda, A)}$ è triangolabile.

Ma allora $V(\lambda, A)$ contiene un autovettore v_1 sia per B che per A:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$
$$B v_1 = \mu_1 v_1$$

Posso quindi usare il principio di induzione su n.

CASO INIZIALE

$n = 1$

Non c'è nulla da dimostrare: le matrici 1×1 commutano tutte rispetto alla moltiplicazione, e sono tutte simultaneamente diagonalizzabili, quindi a maggior ragione simultaneamente triangolabili.

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Sia v_1 un autovettore comune ad A e B. Completo a base di $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ base di } \mathbb{K}^n$$

Si ha:

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right]; \quad Q = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(B) = \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 & Q_1 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right]$$

Dato che $AB = BA$, si ha anche $PQ = QP$. Infatti:

$$PQ = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(B) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(AB) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(BA) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(B)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = QP$$

Inoltre $P_2 Q_2 = Q_2 P_2$. Infatti:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mu_1 & Q_1 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1\mu_1 & * \\ \hline & P_2Q_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1\mu_1 & * \\ \hline 0 & Q_2P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 & Q_1 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right]$$

$$P_2 Q_2 = Q_2 P_2$$

Inoltre

- $p_A(x)$, $p_B(x)$ completamente fattorizzabili;
- $p_A(x) = (x - \lambda_1)\, p_{P_2}(x)$, $p_B(x) = (x - \mu_1)\, p_{Q_2}(x)$.

Dunque:

- P_2 è triangolabile;
- Q_2 è triangolabile.

Sono nelle condizioni di applicare l'ipotesi induttiva:

$$\exists\, C \in GL(n-1, \mathbb{K}) \ni \begin{array}{l} C^{-1} P_2 C = T_1 \in \mathcal{T}(n-1, \mathbb{K}) \\ C^{-1} Q_2 C = T_2 \in \mathcal{T}(n-1, \mathbb{K}) \end{array}$$

Considero allora:

$$N = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \in GL(n, \mathbb{K})$$

Con questa matrice si ha quanto voluto:

- $N^{-1} A N = \overline{T}_1 \in \mathcal{T}(n, \mathbb{K})$
- $N^{-1} B N = \overline{\overline{T}}_2 \in \mathcal{T}(n, \mathbb{K})$

A e B sono quindi simultaneamente triangolabili, ossia ammettono una base a bandiera comune.

POLINOMI CARATTERISTICI E MATRICI COMPAGNE

Dato un polinomio $P_f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, esiste sempre una matrice, detta MATRICE COMPAGNA, così costituita:

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

ha il polinomio caratteristico:

$$P_{C_f}(x) = (-1)^n P_f(x)$$

Uso il principio di induzione.

CASO INIZIALE

$n = 2$ $\qquad f(x) = x^2 + a_1 x + a_0$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$P_{C_f}(x) = \det \begin{bmatrix} -t & -a_0 \\ 1 & -a_1 - t \end{bmatrix} = t^2 + a_1 t + a_0 \quad \text{OK}$$

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Analizziamo la seguente matrice:

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

si ha:

$$P_{C_f}(x) = \det \begin{bmatrix} -x & & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = (-x) \det \begin{bmatrix} -x & & 0 & -a_1 \\ 1 & -x & & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -x-a_{n-1} \end{bmatrix} + (-1)^n a_0$$

Per ipotesi induttiva:

$$P_{C_f}(x) = (-x)(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1)(-1)^{n-1} + (-1)^n a_0 =$$
$$= (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0). \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Si consideri $A \in M(n, \mathbb{K})$ e la sua trasposta $A^t \in M(n, \mathbb{K})$.
Sappiamo già che:

$$\det A = \det A^t$$

Un'immediata conseguenza è:

$$P_A(x) = \det(A - xI) = \det(A^t - xI) = P_{A^t}(x)$$

$$P_A(x) = P_{A^t}(x)$$

Dunque A e A^t hanno gli stessi autovalori, con la stessa molteplicità algebrica.

Una conseguenza è che:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff A^t \text{ è diagonalizzabile}$$

Dim.

A è diagonalizzabile $\iff M^{-1}AM = \Delta$, $M \in GL(n, \mathbb{K}) \iff$
$\iff M^t A^t (M^{-1})^t = \Delta^t = \Delta$, $M^t \in GL(n, \mathbb{K}) \iff M^t A^t (M^t)^{-1} = \Delta$,
$M^t \in GL(n, \mathbb{K}) \iff A^t$ è diagonalizzabile, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Consideriamo le seguenti due applicazioni lineari:

$$f : V \longrightarrow W$$

$$f^t : W^*_{\mathcal{B}^*} \longrightarrow V^*_{\mathcal{B}^*},$$

ove $\forall g \in W^* : f^t(g) = g \circ f$.

Si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A \qquad M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{B}^*}(f^t) = A^t$$

Se consideriamo $f \in End(V)$, in particolare:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A \qquad M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{B}^*}(f^t) = A^t$$

Il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è quello di A; l'altro è quello di A^t. Ma $P_A(x) = P_{A^t}(x)$, cosicché:

$$f \text{ è diagonalizzabile} \iff f^t \text{ è diagonalizzabile}$$

$$f \text{ è triangolabile} \iff f^t \text{ è triangolabile}$$

Es. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$. Dimostrare che esiste sempre un piano f-invariante.

Il polinomio caratteristico di f in $\mathbb{R}[x]$ ha grado 3:

$$P_f(x) \in \mathbb{R}[x], \ \deg P_f(x) = 3$$

Vi sono due alternative:

- $P_f(x)$ ha tre radici reali. Allora f è triangolabile:
  $\exists \ \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3 \ni'$:
  $$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right]$$
  Dunque $H = Span(v_1, v_2)$ è un piano f-invariante.
- $P_f(x)$ ha una radice reale e due complesse coniugate.
  Consideriamo $f^t \in \mathbb{R}^{3*}$, che ha lo stesso polinomio caratteristico. Allora:
  $\exists \ \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore per $f^t \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists \ g \in \mathbb{R}^{3*}, \ g \neq 0, \ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ni' \ g \circ f = f^t(g) = \lambda g$

Notiamo che:

$$Imm\ g = \mathbb{R} \Rightarrow \dim Imm\ g = 1 \Rightarrow \dim Ker\ g = 2$$

Dimostriamo quindi che $Ker\ g$ è un piano f-invariante.

Sia $x \in Ker\ g$. Allora:

$$g(f(x)) = \lambda g(x) = 0$$

Quindi:

$$x \in Ker\ g \Rightarrow f(x) \in Ker\ g$$
$$f(Ker\ g) \subseteq Ker\ g$$

e $Ker\ g$ è f-invariante, c.v.d.

DETERMINANTE DI VANDERMONDE

Consideriamo la seguente matrice, detta di VANDERMONDE $n \times n$:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & & a_n^2 \\ & & \dots & & \\ a_1^{n-1} & \dots & & & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \in M(n, K)$$

Dimostriamo che:

$$\det V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i),$$

usando il principio di induzione.

CASO INIZIALE

Facoltativamente, mostriamo due casi iniziali:

$n = 2$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det V_2 = a_2 - a_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (a_j - a_i) \quad \text{OK}$$

$n = 3$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\det V_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{bmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \prod_{1 \le i < j \le 3} (a_j - a_i) \quad \text{OK}$$

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Considero:

$$\det V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \dots & (a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{bmatrix},$$

ottenuta applicando $(n-1)$ l'algoritmo $R_n - a_1 R_{n-1}$

A questo punto sfruttiamo la colonna di 0 che si è formata:

$$\det V_n = \det \begin{bmatrix} (a_2 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{bmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Applicando l'ipotesi induttiva, si ha:

$$\det V_n = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i), \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Un immediato corollario è il seguente: la matrice è invertibile se e solo se $\forall i \neq j : a_i \neq a_j$, altrimenti uno dei fattori della produttoria sarebbe 0, dunque il determinante sarebbe nullo.

Ex. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n, si consideri un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ avente n autovalori distinti:

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{n-1} \quad \lambda_n$$

Si dimostri allora che:

$\exists\, v \in V \ni' \{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ è una base di V

Dim.

$\forall i = 1 \ldots n \ \exists\, v_i \neq 0 \ni' f(v_i) = \lambda_i v_i$.

Consideriamo $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Allora, dato che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \text{ base di } V$$

Inoltre:

$f(v) = f(v_1 + \ldots + v_n) = f(v_1) + \ldots + f(v_n) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$,

e di conseguenza:

$\forall j = 1 \ldots (n-1) : f^j(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j v_i$

Dunque, chiamato $S = \{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$, dato che gli elementi di questo insieme sono n, basta dimostrare che i vettori sono linearmente indipendenti:

Rappresentiamo dunque i vettori secondo la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = A$$

Questa è una matrice di Vandermonde, dunque:

$$\det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i),$$

e dato che gli autovalori sono tutti distinti (e quindi $\det A \neq 0$) si ha che $\mathcal{B}$ è una base di V, c.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Si considerino, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ 2+\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 2 \\ 4+\lambda \end{bmatrix}\right) \quad W_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 1-\lambda \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

1) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare $\dim W_1$ e $\dim W_2$.

2) Dire per quali valori di λ il vettore:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

appartiene a $W_1 + W_2$.

1) Consideriamo W_1. Certamente i vettori sono entrambi non nulli, perciò $\dim W_1 > 0$. In più sono 2, dunque $\dim W_1 \leq 2$. Dunque:

$$1 \leq \dim W_1 \leq 2$$

Il caso $\dim W_1 = 1$ si ha se e solo se un vettore è multiplo dell'altro. Dato che $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$, il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} 1-\lambda = \frac{1}{2}(2+\lambda) \\ 2+\lambda = \frac{1}{2}(4+\lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2} - 2\lambda = \cancel{2} + \lambda \\ \cancel{4} + 2\lambda = \cancel{4} + \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Dunque:

- $\lambda = 0 \Rightarrow \dim W_1 = 1$;
- $\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim W_1 = 2$.

Consideriamo ora W_2. Con un discorso del tutto analogo:

$$1 \leq \dim W_2 \leq 2$$

In questo caso si ha $-2 = -\frac{1}{2} \cdot (4)$, dunque:

$$\begin{cases} 1-\lambda = -\frac{1}{2}(\lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} 2-2\lambda = -\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 2 \end{cases}$$

Dunque
- $\lambda = 2 \Rightarrow \dim W_2 = 1$;
- $\lambda \neq 2 \Rightarrow \dim W_2 = 2$.

Concludendo:
- $\lambda = 0 \Rightarrow \dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$;
- $\lambda = 2 \Rightarrow \dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$;
- $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ altrimenti.

2) Valutiamo $W_1 + W_2$:

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ 2+\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 2 \\ 4+\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 1-\lambda \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

Certamente:

$$1 \leq \dim(W_1 + W_2) \leq 3,$$

dunque cerchiamo di eliminare uno dei quattro vettori, e comunque di studiare $\dim(W_1 + W_2)$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 2+\lambda & 4+\lambda & -2 & 4 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & 2+\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 2+\lambda & 4+\lambda & -2 & 4 \end{bmatrix} \blacktriangleright$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 3\lambda & \lambda(1-\lambda) & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2-2\lambda+4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo $\lambda \neq 0$. Il caso $\lambda = 0$ verrà studiato singolarmente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2-2\lambda+4 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & -\lambda & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2-2\lambda+4 \end{bmatrix} \blacktriangleright$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda^2+4\lambda-12}{3} & \frac{4}{3}\lambda^2-2\lambda+4 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\lambda^2+\frac{4}{3}\lambda-4 & \frac{4}{3}\lambda^2-2\lambda+4 \end{bmatrix}$$

Il termine $\frac{4}{3}\lambda^2 - 2\lambda + 4$ è sempre strettamente positivo.

Dunque, se $\lambda \neq 0$:

$$\dim(W_1 + W_2) = 3$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3,$$

dunque $v \in W_1 + W_2$.

Se $\lambda = 0$,

$$W_1 + W_2 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

Si noti che $\frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2 = v$. Dunque $v \in W_1 + W_2$ anche in questo caso.

2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x+3y-z,\ y-z,\ 2x+4z)$$

1) Determinare Ker f e Imm f

2) Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango 1 tale che $f+g$ sia un isomorfismo di traccia uguale a 2.

1) Costruiamo la matrice associata ad f, nella base canonica:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y-z \\ y-z \\ 2x+4z \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = M_e^e(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dunque:

- $\text{Ker } f = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0 \}$

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ y-z=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ y=z \\ 2x+4y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ x=-2y \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

- $\text{Imm } f = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists B \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } AB = X \}$

Sappiamo che:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Imm } f$$

$$3 = 1 + \dim \text{Imm } f$$

$$\dim \text{Imm } f = \text{rk } A = 2$$

Dunque, calcoliamo Ae_1 e Ae_2, e constatiamo che le immagini formano una base di Imm f:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Ae_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Imm } f = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

2) Sia $B = M^e_e(g)$ la seguente matrice:

$$B = M^e_e(g) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \text{ non tutti nulli}$$

Allora:

$$f + g \to \begin{bmatrix} 1+a & 3+b & -1+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dato che $Tr(f+g) = 2$:

$$1 + a + 1 + 4 = 2$$

$$a = -4$$

Se $f+g$ dev essere un isomorfismo, allora:

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 3+b & -1+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

Si ha:

$$\det(M) = -3(1 \cdot 4 + 1 \cdot 0) + 2(-3 - b + 1 - c) = -3 \cdot 4 + 2(-2-b-c)$$

Se $b = c = 0$, si ha:

$$\det M = -12 + 2(-3+1) = -12 - 4 = -16 \neq 0.$$

Dunque l'applicazione:

$$g(x, y, z) = (-4x, 0, 0)$$

soddisfa le condizioni richieste.

3. Data $A \in M(n, \mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici in $M(2n, \mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

1) Detto $a = \operatorname{rk} A$, determinare $\operatorname{rk} B$, $\operatorname{rk} C$.

2) Supponiamo che A sia diagonalizzabile. È vero che B è diagonalizzabile? È vero che C è diagonalizzabile?

3) Supponiamo che A sia triangolabile. È vero che B è triangolabile? È vero che C è triangolabile?

1) Se $a = \operatorname{rk} A$, allora la ridotta a scalini di A, $\hat{A}$, avrà a "pivot".
Dato che $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$, è logico pensare che la ridotta a scalini di B, $\hat{B}$, sarà $\begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}$.
Perciò:

$$\operatorname{rk} B = 2a$$

Discorso simile per C:

$$\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{A} \\ 0 & A \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{A} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Dunque:

$$\operatorname{rk} C = 2a$$

2) Supponiamo che:
$\exists\, Q \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $QAQ^{-1} = D \in \mathcal{D}(n, \mathbb{R})$

Allora:

- è vero che B è diagonalizzabile. Infatti:
$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{Q} B \tilde{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} QAQ^{-1} & 0 \\ 0 & QAQ^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \tilde{D} \in \mathcal{D}(n, \mathbb{R})$$

- non è vero che C è diagonalizzabile. Infatti, ad esempio:
$$A = [1] \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_C(x) = (1 - x)^2, \text{ ma } \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$
dunque $\mu_g(1) < \mu_a(1)$, e C non è diagonalizzabile.

3) La risposta è affermativa in entrambi i casi:

- Supponiamo che:

$\exists\ T \in GL(n,\mathbb{R}) \ni' TAT^{-1} = M \in T(n,\mathbb{R})$

Allora:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & 0 \\ 0 & TAT^{-1} \end{bmatrix} \in T(n,\mathbb{R})$$

- Supponiamo che il polinomio caratteristico di A sia completamente fattorizzabile. Allora:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right] = \det A \cdot \det A,$$

e il polinomio è il quadrato di un polinomio completamente fattorizzabile, dunque anche esso lo è.

Supposta A triangolabile, dunque, anche B e C lo sono

4. Si costruisca, se esiste, un'applicazione lineare $f \in End(\mathbb{R}^4)$ che verifichi tutte le seguenti proprietà:

1) $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$ è f-invariante, e $f|_H$ è diagonalizzabile;
2) $f(1,0,0,-1) = (0,-1,1,0)$
3) $Imm\, f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z=0\}$
4) f non è diagonalizzabile

Valutiamo Imm f:

$$Imm\, f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z=0\} =$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y=z\} =$$
$$= \{(x,y,-y,t) \in \mathbb{R}^4\}$$
$$Imm\, f = Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Valutiamo ora H:

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\} =$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t=-x-y-z\} =$$
$$= \{(x,y,z,-x-y-z) \in \mathbb{R}^4\}$$
$$H = Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$$
$$H = Span\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Riscriviamo in questa maniera i due sottospazi:

$$Imm\, f = Span\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$H = Span\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Estendiamo ora la base di H a base di $\mathbb{R}^4$ a piacere:

$$\mathbb{R}^4 = Span\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Impongo ora che:

$$f(v_1) = -v_1 \qquad f(v_2) = v_2 \qquad f(v_3) = 0 \qquad f(v_4) = -v_4 - v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$A = M_B^B(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Effettuiamo il "collaudo":

- $f|_H$ è diagonalizzabile, visto che $f(v_1) = -v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = 0$;
- $f(1,0,0,-1) = f\left(\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2\right) = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2) = (0,-1,1,0)$;
- $\operatorname{Imm} A = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_4 - v_3) = \operatorname{Imm} f$;
- A non è diagonalizzabile. Infatti:

  $$\det(A - x\,Id) = -x(-1-x)^2(1-x),$$

  ma:

  $$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \dim V_{-1} = 1 \neq 2.$$

5. Data la matrice A, con $a, b \in \mathbb{R}$, dimostrare che lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ non ha mai dimensione 2:

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a & 2a-b \\ b & a & a-b \\ a+2b & b+a & 3a-2b \end{bmatrix}.$$

Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} A$, ossia se $AX = 0$, allora:

$$\begin{cases} (a+b)x + ay + (2a-b)z = 0 \\ bx + ay + (a-b)z = 0 \\ (a+2b)x + (b+a)y + (3a-2b)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + az = 0 \\ bx + ay + (a-b)z = 0 \\ bx + by + (a-b)z = 0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto può essere diviso in più sottocasi. Dalla prima equazione, si ha:

- $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} bx - bz = 0 \\ bx + by - bz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} by = 0 \\ bx - bz = 0 \end{cases}$

Se $b = 0$, la matrice è la matrice nulla, e $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} A$, dunque $\dim \operatorname{Ker} A = 3$.

Se $b \neq 0$, si ha $y = 0$ e $x = z$, da cui:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = 1$$

- $a \neq 0 \Rightarrow x = -z$. Allora:

$$\begin{cases} bx + ay + (a-b)(-x) = 0 \\ bx + by + (a-b)(-x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} bx + ay - (a-b)x = 0 \\ (a-b)y = 0 \end{cases}$$

Se $a \neq b$, $y = 0$, da cui:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = 1$$

Se $a = b$, invece:

$$bx + by = b(x+y) = 0$$

Escludendo il caso $a = b = 0$, già discusso prima, si ha:

$$x = y \quad , \quad x = -z$$

Dunque:

$$\text{Ker } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\dim \text{Ker } A = 1$$

In nessun caso, dunque, $\dim \text{Ker } A = 2$.

6. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi reali di grado ≤ 3. Siano

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \ \ni' \ p(x) = a + ax + bx^2 + bx^3\}$$

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Span}(2x + 2x^2 + 2x^3, -1, 3 - x - x^2 - x^3)$$

1) Verificare che U è un sottospazio vettoriale di V e determinare $\dim U$ e $\dim \mathcal{Z}$.

2) Costruire $f \in \mathrm{End}(V)$ tale che:

$$\mathrm{Ker}\, f = U \cap \mathcal{Z} \qquad \mathrm{Imm}\, f = U + \mathcal{Z}$$

3) Calcolare $f(x + x^2)$.

1) • $0(x) = 0 \in U$, dato che $\exists\, 0, 0 \in \mathbb{R} \ \ni' \ 0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$;

• $a(x), b(x) \in U \Rightarrow \exists\, m, n, p, q \in \mathbb{R} \ \ni' \ a(x) = m + mx + nx^2 + nx^3$, $b(x) = p + px + qx^2 + qx^3 \Rightarrow (a+b)(x) = a(x) + b(x) = (m+p) + (m+p)x + (n+q)x^2 + (n+q)x^3 \Rightarrow \exists\, m+p, n+q \in \mathbb{R} \ \ni'$ $(a+b)(x) = (m+p) + (m+p)x + (n+q)x^2 + (n+q)x^3 \Rightarrow (a+b)(x) \in U$;

• $a(x) \in U \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{R} \ \ni' \ a(x) = m + mx + nx^2 + nx^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow (\lambda a)(x) = (\lambda m) + (\lambda m)x + (\lambda n)x^2 + (\lambda n)x^3 \Rightarrow \exists\, \lambda m, \lambda n \in \mathbb{R}$ $\ni' \ (\lambda a)(x) = (\lambda m) + (\lambda m)x + (\lambda n)x^2 + (\lambda n)x^3 \Rightarrow (\lambda a)(x) \in U$

Si ha:

$$U = \mathrm{Span}(1 + x, x^2 + x^3) \Rightarrow \dim U = 2$$

Analizzando $\mathcal{Z}$, si nota che:

$$1 \leq \dim \mathcal{Z} \leq 3$$

Ma:

$$-\frac{1}{2}(2x + 2x^2 + 2x^3) + (-3)(-1) = 3 - x - x^2 - x^3$$

I primi due vettori sono palesemente linearmente indipendenti, dunque

$$\dim \mathcal{Z} = 2$$

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Span}(1, x + x^2 + x^3)$$

2) Usando un isomorfismo $\psi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ di passaggio alle coordinate, si ha:

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$Z = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Ora:

$$q(x) \in U \cap Z \iff q(x) = a + ax + bx^2 + bx^3 = c + dx + dx^2 + dx^3 \Rightarrow b = d = a = c$$

$$U \cap Z = \mathrm{Span}(1 + x + x^2 + x^3)$$

Dunque $U + Z$ ha dimensione 3. Basta notare che:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

sono vettori linearmente indipendenti, per affermare che quella è una base di $U + Z$.

Dunque, dato $f \in \mathrm{End}(V)$, si ha:

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \mathrm{Imm}\, f = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Imm}\, f = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid \exists\, a, b, c \ni' p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3\}$$

Analizziamo $f \in \mathrm{End}(V)$:

$$P = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\\B\\C\\C\end{bmatrix}$$

Risulta evidente che la terza e la quarta riga dovranno essere identiche: in più la somma delle colonne dev'essere nulla. Infine, $\mathrm{rk}\, P = 3$.

Questa matrice soddisfa tutte le proprietà:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Dunque:

$$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \longrightarrow (a-d) + (b-d)x + (c-d)x^2 + (c-d)x^3$$

Si prova facilmente che:

$$q(x) \in \ker f \Leftrightarrow a = b = c = d \Leftrightarrow q(x) \in U \cap Z$$

$$\dim \operatorname{im} f = U + Z$$

3) Si ha:

$$f(x + x^2) = f(0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3) =$$

$$= 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 =$$

$$= x + x^2 + x^3$$

7. Risolvere con l'algoritmo di Gauss al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ 2x + 3\alpha y + 2\beta = 2 \\ \beta x + \alpha(2+\beta) y + (\alpha + \beta + \beta^2) z = 2\beta \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 2 & 3\alpha & 2\beta & 2 \\ \beta & \alpha(2+\beta) & \alpha+\beta+\beta^2 & 2\beta \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha+\beta & \beta \end{array}\right]$$

- Se $\alpha \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha+\beta & \beta \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta & \beta \end{array}\right]$$

  - $\alpha = -\beta$: il sistema non ha soluzioni;
  - $\alpha \neq -\beta$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha+\beta} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

- $\alpha = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  - $\beta \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \beta \\ z = 1 \end{cases}$$

  - $\beta = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \{ x = 1$$

8. Al variare dei parametri reali β, λ si considerino:

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad A_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ -2 & 2\lambda & 3+\lambda & 1 \end{bmatrix} \in M(3,4,\mathbb{R})$$

1) Dire per quali valori di $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $A_\lambda X = B_\beta$ ha soluzione.

2) Sia $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z+t=0,\ y+3z-2t=0\}$. Determinare, se esistono, i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\mathbb{R}^4 = T \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda$.

1)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & \lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda & \beta \\ -2 & 2\lambda & 3+\lambda & 1 & 2\beta \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda & \beta \\ -2 & 2\lambda & 3+\lambda & 1 & 2\beta \end{array}\right] \blacktriangleright$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda & \beta \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -1 & 2\beta-3 \end{array}\right]$$

- $\lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2\beta-3 \end{array}\right]$$: il sistema ha sempre soluzione.

- $\lambda \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{\lambda}+1 & -1 & \frac{\beta}{\lambda} \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -1 & 2\beta-3 \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{\lambda}+1 & -1 & \frac{\beta}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & \beta-3 \end{array}\right]$$

- $\lambda \neq 1$: il sistema ha sicuramente soluzione.
- $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-3 \end{array}\right]$$

  - $\beta = 3$: il sistema ha soluzione;
  - $\beta \neq 3$: il sistema non ha soluzione.

2) Analizziamo T:

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0 \quad y + 3z - 2t = 0\}$$

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - t = 3z - 3t \\ y = -3z + 2t \end{cases}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 3z - 3t \\ -3z + 2t \\ z \\ t \end{bmatrix} \middle| \, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dim T = 2$$

Dunque è necessario che $\dim \mathrm{Ker}\, A_\lambda = 2$, ossia $\mathrm{rk}\, A_\lambda = 2$. I valori per cui ciò accade non devono essere poi così tanti:

$$\begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ -2 & 2\lambda & 3+\lambda & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}\, A_\lambda = 3$$

- $\lambda \neq 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -2 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 2+\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}\, A_\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

C'è da analizzare un solo caso: $\lambda = 1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 3z - t - z - 2t = 2z - 3t \\ y = -3z + t \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\, A_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} 2z - 3t \\ -3z + t \\ z \\ t \end{bmatrix} \middle| \, z, t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Per sapere se $\mathbb{R}^4 = T \oplus \mathrm{Ker}\, A_\lambda$, valutiamo il determinante della seguente matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det M = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \det \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 9 + \cancel{3} - \cancel{9} + \cancel{9} - 4 + \cancel{6} - \cancel{9} = -11 \neq 0$$

Dunque :

$$\mathbb{R}^4 = T \oplus \mathrm{Ker}\, A_\lambda \iff \lambda = 1$$

7. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 3 a coefficienti reali e sia:

$$Z = \{ p \in V \mid p(-2) + p(2) = 0 \}$$

1) Verificare che Z è un sottospazio vettoriale di V e calcolarne la dimensione.

2) Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $f: V \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim f(Z) = 2$ e $\operatorname{Imm} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$

1) Sia $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Allora:

$$p(2) = a + 2b + 4c + 8d$$
$$p(-2) = a - 2b + 4c - 8d$$

Se $p(x) \in Z$, allora:

$$p(2) + p(-2) = 2a + 8c = 0$$
$$a = -4c$$

$$Z = \{ -4c + bx + cx^2 + dx^3 \mid b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$Z = \operatorname{Span}(x, x^3, x^2 - 4)$$

$$\dim Z = 3$$

Dimenticavo...

- $0(x) \in Z$ poiché $0(2) + 0(-2) = 0 + 0 = 0$;
- $a(x), b(x) \in Z \Rightarrow a(2) + a(-2) + b(2) + b(-2) =$
  $= (a+b)(2) + (a+b)(-2) = 0 \Rightarrow (a+b)(x) \in Z$;
- $a(x) \in Z \Rightarrow (\lambda a)(2) + (\lambda a)(-2) = \lambda(a(2) + a(-2)) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (\lambda a)(x) \in Z$.

2) Dunque:

$$\operatorname{Imm} f = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$Z = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Completiamo a base di $\mathbb{R}^4$ la base di Z trovata:

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Pongo:

$$f(v_1) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad f(v_2) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad f(v_3) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad f(v_4) = 0$$

Dunque:

$$f(e_1) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{bmatrix}4\\0\\0\\4\end{bmatrix} \qquad f(e_4) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Allora:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}$:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + 4c,\ b,\ d,\ a - b + 4c + d)$$

10. Per ogni matrice $B \in M(n, \mathbb{R})$ si consideri l'insieme:

$$V(B) = \{ M \in M(n, \mathbb{R}) \mid MB = BM \}$$

1) Si verifichi che $V(B)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{R})$ e che $\dim V(B) \geq 1$ per ogni $B \in M(n, \mathbb{R})$.

2) Posto $n = 2$ e:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

si determini una base di $V(B)$ e una base di un supplementare di $V(B)$ in $M(2, \mathbb{R})$.

1) • $0 \in V(B)$, dato che $0 \cdot B = B \cdot 0 = 0$;

• $A, C \in V(B) \Rightarrow (\lambda A + \mu C) B = \lambda A B + \mu C B =$
$= \lambda B A + \mu B C = B \lambda A + B \mu C = B(\lambda A + \mu C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda A + \mu C) \in V(B)$

Certamente $I_n \cdot B = B \cdot I_n = B \quad \forall B \in M(n, \mathbb{R})$.

Perciò:

$$\operatorname{Span} I_n \subseteq V(B) \quad \forall B \in M(n, \mathbb{R}),$$

dunque:

$\forall B \in M(n, \mathbb{R}) : \dim V(B) \geq 1$.

2) Effettuiamo ed eguagliamo i due prodotti:

• $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a - b = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c - d = -a + c \\ 2c + d = -b + d \end{cases} \quad \begin{cases} -b = 2c \\ a = d \\ d = a \\ 2c = -b \end{cases} \quad \begin{cases} a = d \\ b = -2c \end{cases}$$

$$V(B) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Un supplementare di $V(B)$ in $M(2, \mathbb{R})$ può essere il seguente:

$$S_{V(B)} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

11. Costruire un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e avente $p(x) = x^3(x-2)$ come polinomio caratteristico.
Calcolare inoltre $\dim \operatorname{Ker} f^2$ e $\dim \operatorname{Ker} (f - 2Id)^2$.

Analizziamo la seguente matrice:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Si nota immediatamente che:

$$\dim \operatorname{Imm} f = 2$$
$$\dim \operatorname{Ker} f = 2$$

Inoltre:

$$p_f(x) = \det \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 0 & 2-x \end{bmatrix} = x^2 \cdot (-x)(2-x) = x^3(x-2)$$

Dunque la seguente applicazione:

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z, t) \longrightarrow (0, x, 0, 2z)$$

soddisfa i requisiti richiesti.

Ora:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f^2 = 3$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} (f - 2Id)^2 = 1$$

12. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$ e $f^2 = Id$.

1) Si provi che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata ad f è la matrice a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix},$$

dove I_2 denota la matrice identica di ordine 2.

2) Si calcoli il polinomio caratteristico di A.

3) Si provi che esistono due sottospazi vettoriali distinti L_1, L_2 di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$, che sono f-invarianti.

4) Si dica se esiste una base S di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata ad f è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di U. Allora:

$$\mathcal{D} = \{f(v_1), f(v_2)\}$$

è una base di W, visto che $f(U) = W$.

Dato che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$:

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{D} = \{v_1, v_2, f(v_1), f(v_2)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$.

Infine:

$$f(f(v_1)) = v_1 \qquad f(f(v_2)) = v_2$$

Allora la matrice associata a questa base dell'endomorfismo è proprio quella richiesta

$$M^{\mathcal{B}\cup\mathcal{D}}_{\mathcal{B}\cup\mathcal{D}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Si ha:

$$\det \begin{bmatrix} -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix} = (-x) \det \begin{bmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{bmatrix} =$$

$$= (-x)(-x)\det\begin{bmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2(x^2-1) - 1(x^2-1) =$$

$$= (x^2-1)^2.$$

3) Analizziamo $\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$.

È intuitivo constatare che:

$$L_1 = \mathrm{Span}(v_1, f(v_1))$$
$$L_2 = \mathrm{Span}(v_2, f(v_2))$$

sono due sottospazi vettoriali distinti di $\mathbb{R}^4$, di dimensione 2 e f-invarianti.

4) Una tale base non può esistere. Infatti, secondo questa base, $f(v_2) = v_2$: assurdo, perché $v_2 \in U \Leftrightarrow f(v_2) = v_2 \in W$ oppure $v_2 \in W \Leftrightarrow f(v_2) = v_2 \in U$.

In entrambi i casi $v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_2 = 0$. Ciò è assurdo.

13. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

Determinare tutte le matrici reali 3×3 della forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

che hanno v_1, v_2, v_3 come autovettori.

Analizziamo il prodotto della matrice con i vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a - b \\ 2d - e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3a - c \\ 3d - f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ a + b + c \\ d + e + f \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 3a - c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \\ 6a = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2d - e = 0 \\ 3d - f = 0 \\ d + e + f = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} e = 2d \\ f = 3d \\ 6d = 6 \end{cases}$$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \qquad d = 1 \quad e = 2 \quad f = 3$

Dunque l'unica matrice accettabile è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Sia B una matrice reale $n \times n$, con $n \geq 2$, e sia:

$$V_B = \{ M \in M(n, \mathbb{R}) \mid MB = BM \}$$

1) Dimostrare che V_B è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{R})$.
2) Dimostrare che $\dim V_B \geq 2$.
3) Determinare $\dim V_B$ nel caso in cui B è la matrice elementare avente l'elemento di posto $(1,1)$ uguale a 1 e tutti gli altri elementi nulli.

1) $0 \in V_B$, dato che $0 \cdot B = B \cdot 0 = 0$.

$A, A' \in V_B \Rightarrow (\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B = \lambda BA + \mu BA' =$
$= B\lambda A + B\mu A' = B(\lambda A + \mu A') \Rightarrow (\lambda A + \mu A') \in V_B$.

2) Se $B \neq \lambda I_n$, allora:

$$\mathrm{Span}(B, I_n) \subseteq V_B,$$

dunque $\dim V_B \geq 2$.

Se $B = \lambda I_n$, essa commuta con tutte, dunque (posto $n \geq 2$):

$$\dim V_B = n^2 \geq 2$$

3) Se una matrice è del tipo:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right],$$

con Q matrice qualunque, allora:

$$PQ = QP = \left[\begin{array}{cc} a & \\ & 0 \end{array}\right], \text{ dunque } P \in V_B$$

Se P non è di quel tipo, allora:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline * & Q \end{array}\right]$$

Dunque:

$$PB = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ * & \end{array}\right] \neq \left[\begin{array}{c} a \quad * \\ \hline 0 \end{array}\right] = BP, \text{ e } P \notin V_B.$$

Dunque $\dim V_B = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 1 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

15. Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq k$ e sia $a(x) \in V$ un polinomio di grado $d \geq 1$. Si consideri l'insieme $U(a) = \{f(x) \in V \mid a(x) \mid f(x)\}$.

1) Si verifichi che $U(a)$ è un sottospazio vettoriale di V.
2) Si calcoli $\dim U(a)$.
3) Si determini un'applicazione lineare $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tale che $\operatorname{Ker} \phi = U(a)$.
4) Fissati $a(x) = x^2$ e $b(x) = x^2 + 1$, si determinino i valori di $k \geq 2$ per cui $U(a) \cap U(b) = \{0\}$.

1)
- $0(x) \in U(a)$, visto che $a(x) \mid 0(x) = 0$
- $m(x), n(x) \in U(a) \Rightarrow a(x) \mid m(x)$, $a(x) \mid n(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow a(x) \mid \lambda m(x) + \mu n(x) = (\lambda m + \mu n)(x) \Rightarrow (\lambda m + \mu n)(x) \in$
$\in U(a)$.

2) Se $a(x) \mid f(x)$, allora:

$$f(x) = a(x)\, q(x),$$

con $q(x)$ esprimibile come combinazione lineare dei vettori $\{1, x, x^2, \ldots x^{k-d}\}$, dato che $\deg q(x) \leq k-d$.

Dunque una base di $U(a)$ è la seguente:

$$\mathcal{B}_a = \{1 \cdot a(x),\ x \cdot a(x),\ x^2 \cdot a(x) \ldots x^{k-d} \cdot a(x)\},$$

dunque $\dim U(a) = k - d + 1$.

3) Consideriamo le seguenti applicazioni:

$$\psi_a : \mathbb{R}_k[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{d-1}[x] \qquad \eta : \mathbb{R}_{d-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$p(x) \longrightarrow r(x) \qquad\qquad r(x) \longrightarrow [r(x)]_e$$

Sia $\phi = \eta \circ \psi_a$.

La seconda applicazione è l'isomorfismo canonico di passaggio alle coordinate.

Affinché ϕ sia un omomorfismo, dimostriamo che ψ_a lo è:

- $\psi_a(0(x)) = 0(x)$, poiché $a(x) \mid 0(x)$.
- $\lambda \psi_a(m(x)) + \mu \psi_a(n(x)) = \lambda r_m(x) + \mu r_n(x) =$
$= \psi_a((\lambda m)(x) + (\mu n)(x))$

Dunque ψ_a, e quindi Φ, è un'applicazione lineare.
Valutiamo $\mathrm{Ker}\,\Phi$. Dato che η è un isomorfismo:

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi_a$$

- $p(x) \in U(a) \Rightarrow a(x) \mid p(x) \Rightarrow \psi_a(p(x)) = r(x) = 0 \Rightarrow p(x) \in \mathrm{Ker}\,\psi_a$,
- $p(x) \in \mathrm{Ker}\,\psi_a \Rightarrow \psi_a(p(x)) = 0 \Rightarrow a(x) \mid p(x) \Rightarrow p(x) \in U(a)$.

Perciò:

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = U(a)$$

4) Si nota facilmente che:

$$a(x) - b(x) = x^2 + 1 - x^2 = 1,$$

da cui:

$$MCD\,(a(x), b(x)) = 1$$
$$m.c.m\,(a(x), b(x)) = a(x)\,b(x) = x^4 - x^2$$

Dunque:

$$U(a) \cap U(b) = \{0\} \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3$$

16. Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$, $k \geq 2$, e siano $U = \{ f \in V \mid x^2 \mid f \}$ e $W = \{ f \in V \mid (x^2+1) \mid f \}$.

1) Dimostrare che U e W sono sottospazi vettoriali di V.
2) Dimostrare che U e W sono isomorfi.
3) Scrivere U come nucleo di un'applicazione lineare $\Phi : \mathbb{R}_k[x] \longrightarrow \mathbb{R}^s$, con s che non dipende da k, e scrivere la matrice di Φ nelle basi $\{1, x, x^2 \dots x^k\}$ di V e canonica di $\mathbb{R}^s$.
4) Per quali valori di k $U \cap W = \{0\}$?
5) Per quali valori di k $U \oplus W = V$?

1) • $0 \in U \cap W$, poiché $x^2 \mid 0$, $x^2+1 \mid 0$.
• $m(x), n(x) \in U \Rightarrow x^2 \mid m(x), x^2 \mid n(x) \Rightarrow x^2 \mid \lambda m(x)$, $x^2+1 \mid \mu n(x) \Rightarrow x^2 \mid \lambda m(x) + \mu n(x) \Rightarrow (\lambda m + \mu n)(x) \in U$;
• $m(x), n(x) \in W \Rightarrow x^2+1 \mid m(x)$, $x^2+1 \mid n(x) \Rightarrow x^2+1 \mid \lambda m(x)$, $x^2+1 \mid \mu n(x) \Rightarrow x^2+1 \mid \lambda m(x) + \mu n(x) \Rightarrow (\lambda m + \mu n)(x) \in W$.

2) Se $a(x) \in U$:
$$a(x) = x^2 \, q(x), \ \deg q \leq k-2$$
Se $a(x) \in W$:
$$a(x) = (x^2+1) \, q(x), \ \deg q \leq k-2$$
Dunque:
$$\mathcal{B} = \{ x^2, x^3 = x \cdot x^2, x^4 \dots x^k = x^{k-2} \cdot x^2 \}$$
$$\mathcal{D} = \{ x^2+1, x(x^2+1), \dots x^{k-2}(x^2+1) \}$$
sono basi rispettivamente di U e W.
Dunque $\dim U = \dim W = k-2+1 = k-1$, e U e W sono isomorfi.
Volendo esplicitare l'isomorfismo:
$$\alpha : U \longrightarrow W$$
$$x^i x^2 \longrightarrow x^i (x^2+1)$$

3) L'applicazione $\Phi = \eta \circ \psi \circ \pi$, con le funzioni così definite:
$$\mathbb{R}_k[x] \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}_k[x] \big/ x^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}_1[x] \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}^2$$
$$p(x) \longrightarrow r(x) + U \longrightarrow r(x) \longrightarrow [r(x)]_e$$

è lineare, in quanto composizione di una proiezione canonica sul quoziente e di due isomorfismi. In più:

$$\text{Ker } \Phi = \text{Ker } \pi = U$$

Siano ora $\overline{\mathcal{B}} = \{1, x, x^2 \dots x^k\}$ e $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Intendiamo determinare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\Phi)$.

Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\Phi) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\end{bmatrix}}_{k+1} \Big\} 2$$

Difatti:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots\end{bmatrix} \begin{bmatrix}a\\b\\ \vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},$$

ossia quanto desiderato.

u) Notiamo che

$$(x^2+1) - x^2 = 1$$

Dunque:

$$\text{MCD}(x^2, x^2+1) = 1$$

$$\text{m.c.m}(x^2, x^2+1) = x^4 + x^2,$$

perciò:

$$U \cap W = \{0\} \iff 2 \le k \le 3$$

s) Imponiamo le seguenti condizioni:

- $\dim U + \dim W = \dim V \Rightarrow \cancel{k} - 1 + k - 1 = \cancel{k} + 1 \Rightarrow k = 3$
- $U \cap W = \{0\} \Rightarrow 2 \le k \le 3$

Verifichiamo se questa è una base di $\mathbb{R}_3[x]$:

$$\mathcal{G} = \{x^2, x^3, x^2+1, x^3+x\}$$

$$\det \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \mathcal{G} \text{ è una base di } \mathbb{R}_3[x]$$

Dunque $k = 3 \iff U \oplus W = V$.

17. Determinare una base di autovettori per A di $\mathbb{R}^4$ o, qualora ciò non fosse possibile, una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per A. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, ossia:

$$\det \begin{bmatrix} -1-x & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3-x & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2-x \end{bmatrix} =$$

$$(2-x) \det \begin{bmatrix} -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 \\ -2 & 2 & 2-x \end{bmatrix} =$$

$$= (2-x)\left[\det \begin{bmatrix} -1 & 3-x \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1-x & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + (2-x) \det \begin{bmatrix} -1-x & 3 \\ -1 & 3-x \end{bmatrix} \right] =$$

$$= (2-x)\left[(-2 + 2(3-x)) - (-2 - 2x + 6) + (2-x)(\cancel{3} + x^2 - 2x - \cancel{3}) \right] =$$
$$= (2-x)\left[(\cancel{-2x+4}) - (\cancel{-2x+4}) + (2-x)\, x\, (x-2) \right] = x(x-2)^3$$

Dunque $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Ora, si può notare che:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} A,$$

dunque ne costituisce una base.

Valutiamo $\dim \operatorname{Ker}(A - 2 Id)$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Imm}(A - 2 Id) = 3$$
$$\dim \operatorname{Ker}(A - 2 Id) = 1 < 3$$

Dunque A non è diagonalizzabile.

Guardando la matrice, si nota che:

$$v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2Id),$$

dunque ne costituisce una base.

La nostra base è completa per ora:

$$\mathcal{B} = \{v_0, v_2, x, y\}$$

Analizziamo le immagini dei quattro vettori della base canonica:

$$A(e_1) = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix} \qquad A(e_2) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} \qquad A(e_3) = \begin{bmatrix}3\\0\\3\\2\end{bmatrix} \qquad A(e_4) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Particolarmente interessante è $f(e_4) = v_2 + 2e_4$.

Completiamo a piacere la base di $\mathbb{R}^4$ (una scelta opportuna è e_2, visto che nessuno dei tre vettori v_0, v_2, e_4 modifica la seconda coordinata).

Abbiamo allora ottenuto la nostra base a bandiera:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

18. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-k & 1-k & 2-2k \\ k & k & 2k \end{bmatrix}$$

1) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A è diagonalizzabile.
2) Si determini una base di ciascun autospazio della matrice:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

3) Si scelga un valore di k per cui A è triangolabile ma non diagonalizzabile e si calcoli, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ a bandiera sia per A che per B.

1) Calcoliamo $\det(A - x\,Id)$:

$\det(A - x\,Id) = (-x)\big((1-k-x)(2k-x) - k(2-2k)\big) =$

$= (-x)(\cancel{2k} - x - \cancel{2k^2} + kx - 2kx + x^2 - \cancel{2k} + \cancel{2k^2}) =$

$= (-x)(x^2 - x - kx) = (-x)(x)(x-1-k) = -x^2(x-1-k)$

Allora:

- $1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

La matrice dovrebbe avere $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, ossia essere la matrice nulla. Ma così non è, per $k = -1$. Dunque A non è diagonalizzabile.

- $1 + k \neq 0 \Rightarrow \dim V_{1+k} = 1$

Dobbiamo calcolare i k per cui $\operatorname{Ker} A$ ha dimensione 2, ossia $\operatorname{rk} A = 1$.
Più semplicemente, dato $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$:
$\lambda k = 1 - k \Rightarrow (\lambda + 1)k = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{k} - 1$
In $\mathbb{R}$ quest'equazione ha soluzioni per ogni k.
Dunque:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \Leftrightarrow k \neq -1$$

2) Calcoliamo $\det(B - x\,Id)$:

$\det(B - x\,Id) = (-1-x)\det\begin{bmatrix} 2-x & 4 \\ -2 & -3-x \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3-x \end{bmatrix} =$

$= (-1-x)(x^2+x-6+8) - (-6+2x+4) = (-1-x)(x^2+x+2) - 2(-1-x) =$
$= (-1-x)(x^2+x) = -x(1+x)^2$

Gli autovalori sono dunque 0 $(\mu_a(0)=1)$ e (-1) $(\mu_a(-1)=2)$.

Per trovare una base di $\operatorname{Ker} B = V_0$, si noti che

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} B,$$

dunque (visto che $\dim \operatorname{Ker} B = 1$) ne costituisce una base.

Ora valutiamo $V_{-1} = \operatorname{Ker}(B + \mathrm{Id})$

$$B + \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Per le considerazioni fatte finora:

$$1 \leq \dim \operatorname{Imm}(B + \mathrm{Id}) \leq 2$$
$$1 \leq \dim \operatorname{Ker}(B + \mathrm{Id}) \leq 2$$

Dato che le prime due righe sono evidentemente linearmente indipendenti, si ha:

$$\dim V_{-1} = \dim \operatorname{Ker}(B + \mathrm{Id}) = 1$$

Si noti ora che:

$$b_{-1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{-1},$$

dunque ne costituisce una base.

3) Innanzitutto, necessariamente $K = -1$. Riscriviamo le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

A questo punto notiamo che b_0 e b_{-1} sono autovettori sia per A che per B, e sono linearmente indipendenti perché appartenenti ad autospazi differenti, preso B in esame.
Entrambi i vettori, infatti, appartengono a $\operatorname{Ker} A$.
Completiamo a piacere la nostra base:

$$\mathcal{B} = \{ b_0, b_{-1}, e_3 \}$$

14. Si costruisca, se esiste, una matrice $B \in M(3, \mathbb{R})$ che verifichi tutte le seguenti proprietà:

1) è simile alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

2) $(1, 0, 1) \in \operatorname{Ker} B$

3) $\operatorname{Imm} B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0 \}$

Iniziamo ad analizzare A. Valutiamo ad esempio il suo polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 & -1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ -1 & -1 & -x \end{bmatrix} = (2-x) \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} +$$

$$- \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = (2-x)(x^2 - 1) - 2(x-1) = 2x^2 - \cancel{2} - x^3 + x - 2x + \cancel{2} =$$

$$= -x^3 + 2x^2 - x = (-x)(1-x)^2$$

Ora, notiamo che:

$$\operatorname{rk}(A - \mathrm{Id}) = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 2 = \mu_a(1)$$

A, dunque, è diagonalizzabile.

Se vogliamo $B \sim A$, $p_B(x) = p_A(x)$. Il polinomio caratteristico rappresenta un invariante completo, infatti, se le matrici sono entrambe diagonalizzabili.

Dobbiamo quindi creare B in modo che sia diagonalizzabile; d'altronde lo spettro e la dimensione degli autospazi sono due invarianti per similitudine.

La seconda proprietà ci suggerisce la base di V_0:

$$V_0 = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

La terza condizione ci impone delle condizioni su V_1:

$$x - y - 2z = 0$$

Possiamo ad esempio scrivere:

$$V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Dunque:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

è una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

Definiamo:

$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = v_2 \qquad f(v_3) = v_3$

Si ha:

$$f(e_1) = f(v_3 - v_1) = f(v_3) - f(v_1) = v_3$$
$$f(e_2) = f(v_1 + v_2 - v_3) = f(v_1) + f(v_2) - f(v_3) = v_2 - v_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$f(e_3) = f(2v_1 - v_3) = 2f(v_1) - f(v_3) = -v_3$$

Dunque:

$$\bar{B} = M^e_e(f) = \begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $\bar{B}$:

$$P_{\bar{B}}(x) = \det\begin{bmatrix}2-x & -1 & -2\\0 & 1-x & 0\\1 & 1 & -1-x\end{bmatrix} = (1-x)\det\begin{bmatrix}2-x & -2\\1 & -1-x\end{bmatrix} =$$
$$= (1-x)\big((2-x)(-1-x)+2\big) = (1-x)(\cancel{-2} - 2x + x + x^2 + \cancel{2}) =$$
$$= (1-x)\,x\,(-1+x) = (1-x)\,x\,(x-1) = -x(x-1)^2$$

$$P_{\bar{B}}(x) = P_A(x)$$

$$\bar{B} \sim A$$

Dunque $\bar{B} = B$, la matrice richiesta dal problema.

20. Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva e sia $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare suriettiva.
Si verifichi che:

$$E = \{ h \in End(\mathbb{R}^m) \mid g \circ h \circ f = 0 \}$$

è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^m)$, e se ne calcoli la dimensione.

Effettuiamo la dovuta verifica:

- 0, la funzione nulla, $\in E$, in quanto $g \circ 0 \circ f = 0$;
- $a, b \in E \Rightarrow g \circ a \circ f = 0$, $g \circ b \circ f = 0 \Rightarrow g(a(f(x))) + g(b(f(x))) = g(a(f(x)) + b(\;(x))) = g(a+b)f(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow g \circ (a+b) \circ f = 0 \Rightarrow (a+b) \in E$;
- $a \in E \Rightarrow g \circ a \circ f = 0 \Rightarrow \lambda(g \circ a \circ f) = g \circ (\lambda a) \circ f = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow g \circ (\lambda a) \circ f = 0 \Rightarrow (\lambda a) \in E$

Se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è iniettiva, allora $\dim f(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n)) = m - n$.
Se $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è suriettiva, allora $\dim g(\mathbb{R}^m) = n$, $\dim Ker\, g = m - n$.

Affinchè $h \in E$, $h(f(\mathbb{R}^n)) = Ker\, g$. Riguardo $h(\mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n))$, invece, non ho restrizioni.
Dunque:

$$h = \mathbb{R}^m \longrightarrow V,$$

dove $V = Ker\, g + h(\mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n))$ è uno spazio che ha una dimensione che è al massimo $2(m-n)$.

Dunque:

$$\dim E = 2m(m-n)$$

21. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$.

1) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo $f: V \to V$ tale che $f(x) = 2x^2 + x$, $f(x^2 - 4) = x^2 - 3$, $f(x^2 + x) = 3x^2 + x + 1$.

2) Trovare il polinomio minimo di f, sia esso $q(x)$.

3) Provare che il polinomio minimo di $g = f + \mathrm{Id}$ è $q(x - 1)$.

4) Provare che il polinomio minimo di $h = f^2$ è $q(x)$.

1) Utilizziamo la base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$.

Si ha:

$$f(1) = -\frac{1}{4} f\left((x^2 - 4) - (x^2 + x) + x\right) = -\frac{1}{4}\left(\cancel{x^2} - 3 - \cancel{3x^2} - \cancel{x} - 1 + \cancel{2x^2} + \cancel{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}(-4) = 1$$

$$f(x) = 2x^2 + x$$

$$f(x^2) = f(x^2 + x - x) = 3x^2 + \cancel{x} + 1 - 2x^2 - \cancel{x} = x^2 + 1$$

Dunque:

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e f è univocamente determinato dalle immagini dei vettori della base.

2) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = (1 - x)^3 = -(x - 1)^3$$

Dunque l'endomorfismo è triangolabile, ma non diagonalizzabile.

Il polinomio minimo sarà della forma:

$$q_A(x) = (-1)^i (x - 1)^i, \quad i = 1 \dots 3$$

Scartiamo subito $i = 1$, visto che $(x - 1) \neq 0$.

Proviamo $i = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Dunque $q_A(x) = (-1)^3 (x - 1)^3 = -(x - 1)^3$

3) Raccogliamo le informazioni :

$$B = M^{e}_{e}(g) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad q_B(x) \overset{?}{=} -((x-1)-1)^3 \overset{?}{=} -(x-2)^3$$

$$p_B(x) = (2-x)^3 = -(x-2)^3$$

Stesso discorso di prima, proviamo con $i = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Dunque $q_B(x) = -(x-2)^3 = q_A(x-1)$.

4) Calcoliamo f^2 :

$$A^2 = M^{e}_{e}(f^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $p_{A^2}(x) = \det(A^2 - x\,\mathrm{Id}) = (1-x)^3 = -(x-1)^3$

Stesse operazioni di prima :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

dunque $q_{A^2}(x) = q_A(x)$.

22. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a-2 & 3a-3 & 4a-3 \end{bmatrix}.$$

Per $a = 1 - i$, trovare (se esiste) una base di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A.

Calcoliamo $P_A(x) = (1-x)\left[(3-x)(4a-3-x) - 4(2a-2)\right] =$
$= (1-x)\left[12a - 9 - \cancel{3x} - 4ax + \cancel{3x} + x^2 - 8a + 8\right] =$
$= (1-x)\left[x^2 - 4ax + 4a - 1\right] =$

Valutiamo il polinomio $a(x) = x^2 - 4ax + (4a-1)$.
Si noti che $a(1) = 1 - 4a + 4a - 1 = 0 \ \forall a \in \mathbb{C}$, quindi:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 4ax + 4a - 1 & x - 1 \\ \underline{x^2 - x} & \overline{x - (4a-1)} \\ (-4a+1)x + 4a - 1 & \\ \underline{(-4a+1)x + 4a - 1} & \\ // \qquad\qquad // & \end{array}$$

Dunque $P_A(x) = (1-x)^2(4a-1-x)$
Si tratta di capire per quali valori di a V_1 ha dimensione 2:

$$(A - \mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2(a-1) & 3(a-1) & 4(a-1) \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\dim V_1 = 2$.
C'è solo un caso da escludere:

$$4a - 1 \neq 1$$
$$a \neq \frac{1}{2}$$

Dunque:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff a \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Posto $\lambda = 1 - i$, la matrice diventa

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2i & -3i & -4i+1 \end{bmatrix},$$

e gli autovalori 1 e $4(1-i)-1 = 3-4i$, di molteplicità algebrica (e geometrica) rispettivamente 2 e 1.

Iniziamo col trovare una base di V_1:

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 3b + c \\ b \\ -2ia - 3ib - 4ic + c \end{bmatrix}$$

Impongo:

$$\begin{cases} 3a + 3b + 4c = a \\ b = b \\ -2ia - 3ib - 4ic + \cancel{c} = \cancel{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + 3b + 4c = 0 \\ 2a + 3b + 4c = 0 \end{cases}$$

I vettori che dunque vanno in se stessi sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Prima di sceglierne due per creare una base di autovettori, determiniamo una base di V_{3-4i}. Impongo dunque:

$$\begin{cases} 3a + 3b + 4c = (3-4i)a \\ b = (3-4i)b \\ -2ia - 3ib - 4ic + c = (3-4i)c \end{cases} \quad \begin{cases} 4c = -4ia \\ b = 0 \\ -2ia = 2c \end{cases} \quad \begin{cases} c = -ia \\ b = 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$$

costituisce una base di V_{3-4i}. Dunque:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base costituita da autovettori di A.

23. Sia $W \subset M(2,3,\mathbb{R})$ il sottoinsieme definito da:

$$W = \{ A \in M(2,3,\mathbb{R}) \mid Av = 0,\ \operatorname{tr} AP = 0,\ \operatorname{tr} QA = 0 \}$$

dove $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M(2,3,\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $f_h : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$\forall\, p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : f_h(p(x)) = (h\,p(1) + p(-1), p'(1), ha + (h+1)b - c)$.

2) Verificare che f_h è lineare per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, W è isomorfo a $\operatorname{Imm} f_h$?

1) Sia $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. La condizione $v \in \operatorname{Ker} A$ impone che:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ d - f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ d = f \end{cases}$$

La condizione $\operatorname{tr} AP = 0$ impone che:

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ d & e & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + b + 2a & * \\ * & -e \end{bmatrix} \Rightarrow e = 5a + b$$

La condizione $\operatorname{tr} QA = 0$ impone che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a \\ d & 5a+b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & & * \\ & 2b & \\ * & & 2a + \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} d + 2b + 2a + d = 0 \\ d = -a - b \end{matrix}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a \\ -a-b & 5a+b & -a-b \end{bmatrix}$$

Dimostriamo prima che W è un sottospazio vettoriale di $M(2,3,\mathbb{R})$. Definiamo la seguente funzione:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(2,3,\mathbb{R})$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow A(x,y)$$

(Ad esempio $A = \Phi(a,b)$). Dunque

- $0 = \Phi(0,0) \Rightarrow 0 \in W$;
- $A, B \in W \Rightarrow \exists\, x, y, z, t \ni' A = \Phi(x,y),\ B = \Phi(z,t) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \lambda A + \mu B = \lambda \Phi(x,y) + \mu \Phi(z,t) = \Phi(\lambda x + \mu z, \lambda y + \mu t) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \lambda A + \mu B \in W$.

Infine:

$$W = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right),$$

dunque $\dim W = 2$.

2) Possiamo riscrivere la funzione in questo modo:

$$f_h : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longrightarrow \begin{bmatrix} ha + hb + hc + hd + b + d - a - c \\ 3a + 2b + c \\ ha + (h+1)b + c \end{bmatrix}$$

$$p(x) \longrightarrow \begin{bmatrix} (h-1)(a+c) + (h+1)(b+d) \\ 3a + 2b + c \\ ha + (h+1)b + c \end{bmatrix}$$

Dunque:

- $\forall h \in \mathbb{R}: f_h(0) = \begin{bmatrix} (h-1)\cdot 0 + (h+1)\cdot 0 \\ 0 \\ h\cdot 0 + (h+1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$;

- $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ q(x) = ex^3 + fx^2 + gx + j$

$$f_h(p(x)) + f_h(q(x)) = \begin{bmatrix} (h-1)(a+e+c+g) + (h+1)(b+f+d+j) \\ 3(a+e) + 2(b+f) + (c+g) \\ h(a+e) + (h+1)(b+f) + (c+g) \end{bmatrix} = f_h(p(x)+q(x))$$

$$f_h(\lambda p(x)) = \begin{bmatrix} (h-1)(\lambda a + \lambda c) + (h+1)(\lambda b + \lambda d) \\ 3\lambda a + 2\lambda b + \lambda c \\ h\lambda a + (h+1)(\lambda b) + \lambda c \end{bmatrix} = \lambda f_h(p(x)).$$

3) Determiniamo la matrice associata ad h nelle basi $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h-1 & h+1 & h-1 & h+1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ h & h+1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h-1)a + (h+1)b + (h-1)c + (h+1)d \\ 3a + 2b + c \\ ha + (h+1)b + c \end{bmatrix}$$

Dobbiamo imporre $rk\, T = 2$, se vogliamo che W sia isomorfo a $\operatorname{Imm} f_h$.

$$T \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ h & h+1 & 1 & 0 \\ h-1 & h+1 & h-1 & h+1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}h+1 & 1-\frac{h}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(h+1) & \frac{2}{3}(h-1) & h+1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & h+3 & 3-h & 0 \\ 0 & h+1 & 2h-2 & 3h+3 \end{bmatrix}$$

- $h = -3 \Rightarrow \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rk\ T = 3$

- $h \neq 3 \Rightarrow \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & h+3 & 3-h & 0 \\ 0 & 0 & X & 3h+3 \end{bmatrix}, \quad X = 3h^2 - 2h - 5$

Imponiamo dunque:

$$\begin{cases} X = 0 \\ 3h+3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3+2-5=0 \\ h=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ h=-1 \end{cases}$$

Dunque:

$$W \text{ è isomorfo a } \mathrm{Im}\, f_h \iff h = -1$$

24. Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi vettoriali tali che $U \subseteq W$. Sia $f: V \to V$ una applicazione lineare e sia $Z = W \cap \operatorname{Ker} f$.

1) Dimostrare che $U + Z = W$ se e solo se $f(U) = f(W)$.
2) Dimostrare che $U \oplus Z = W$ se e solo se $f(U) = f(W)$ e $f|_U$ è iniettiva.
3) Nel caso particolare in cui $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + 3t = 0\}$ e $U = \operatorname{Span}\{(1, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, costruire un'applicazione lineare f tale che $\dim \operatorname{Imm} f = 2$ e $U \oplus Z = W$.

1) Supponiamo $U + Z = W$. Allora:

- $U \subseteq W$, dunque certamente $f(U) \subseteq f(W)$;
- $\forall w \in W : w = u + z,\ u \in U,\ z \in Z \Rightarrow f(w) = f(u) + f(z) =$
$= f(u) + 0 = f(u) \Rightarrow \forall w \in W\ \exists u \in U \ni f(w) = f(u) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(W) \subseteq f(U)$.

Dunque $f(U) = f(W)$.

Supponiamo $f(U) = f(W)$. Allora:
$\forall w \in W\ \exists u \in U \ni' f(w) = f(u)$.
Sia $z \in W$, $z = w - u$. Si ha:

$$f(z) = f(w - u) = f(w) - f(u) = 0$$

$$z \in \operatorname{Ker} f \cap W$$

$$z \in Z$$

Allora:
$\forall w \in W : w = u + z,\ u \in U,\ z \in Z$

$$W = U + Z$$

2) Supponiamo $U \oplus Z = W$. Allora:
- $U + Z = W$, dunque per quanto visto prima $f(U) = f(W)$;
- $U \cap Z = \{0\} \Rightarrow U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f|_U$ è iniettiva.

Al contrario, supponiamo $f(U) = f(W)$ (dunque $U + Z = W$, per quanto visto prima) e $f|_U$ iniettiva.

Supponiamo che $\exists\, u \in U \cap \operatorname{Ker} f$.

Allora:

$$f(u) = f(0) = 0$$

Dato che $f|_U$ è iniettiva $u = 0$. Allora

$$U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow U \cap Z = \{0\},$$

dunque $U \oplus Z = W$.

3) Esplicitiamo in forma parametrica W:

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$$

Notiamo che $U \subset W$. Dunque scriviamo un'altra base di W:

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$$

Completo a una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Impongo $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = f(v_4) = 0$.

In questo modo $\dim \operatorname{Imm} f = 2$ (con w_1 e w_2 linearmente indipendenti, e inoltre:

$$U = \operatorname{Span}(v_1, v_2) \qquad Z = W \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(v_3)$$

$$U + Z = W \quad , \quad U \cap W = \{0\}$$

$$U \oplus Z = W$$

Impongo $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$.

Dunque:

$f(e_1) = 2v_1 - v_2 = (2, 0, -1, 1)$

$f(e_2) = \frac{1}{2} v_2 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$f(e_3) = 0$

$f(e_4) = 0$

$$M_E^E(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(a, b, c, d) \longrightarrow \left(2a, b, -a + \tfrac{1}{2}b, a + \tfrac{1}{2}b\right)$$

25 Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, con $W_1 \neq W_2$. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che W_1 e W_2 sono gli unici sottospazi di dimensione 2 f-invarianti.

1) Dimostrare che f è triangolabile.
2) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.
3) Dire se è possibile che le restrizioni di f a W_1 e a W_2 siano entrambe diagonalizzabili.
4) Costruire un esempio esplicito di W_1, W_2 e f con le proprietà suddette.

1) Dato che $W_1 \neq W_2$, allora:

$$\mathbb{R}^3 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

Dunque:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$3 = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

Allora $\exists\, v_1 \in W_1 \cap W_2$, $v_1 \neq 0$. In particolare:

$$W_1 \cap W_2 = \operatorname{Span}(v_1)$$

Dunque:

$$W_1 = \operatorname{Span}(v_1, v_2) \qquad W_2 = \operatorname{Span}(v_1, v_3)$$

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3)$$

Valutiamo $f(v_1)$: dato che W_1 e W_2 sono entrambi f-invarianti, si ha:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_3$$

Dato che $v_3 \notin W_1$, $v_2 \notin W_2$, necessariamente $\lambda_2 = \mu_2 = 0$. Allora:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \mu_1 v_1 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1,$$

ossia v_1 è autovettore relativo all'autovalore λ_1 per f.
Sempre per ipotesi, si ha:

$$f(v_2) = \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2$$

$$f(v_3) = \lambda_4 v_1 + \lambda_5 v_3$$

Perciò, sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

e f è triangolabile.

2) Per assurdo, sia f diagonalizzabile. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base di autovettori. Allora:

$K_1 = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ $\quad K_2 = \mathrm{Span}(w_2, w_3)$ $\quad K_3 = \mathrm{Span}(w_1, w_3)$

sono tre iperpiani distinti f-invarianti.

Per ipotesi gli iperpiani distinti f-invarianti sono 2, dunque f non è diagonalizzabile.

3) Una tale richiesta non è possibile.

Se così fosse, potrei generare una base di autovettori per e una per W_2:

$$W_1 = \mathrm{Span}(v_1, k_1) \qquad W_2 = \mathrm{Span}(w_1, k_2)$$

Allora:

$$\mathcal{G} = \{v_1, k_1, k_2\}$$

sarebbe una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f. Allora f sarebbe diagonalizzabile, ma ciò è falso per quanto visto nel punto precedente.

4) Siano:

$W_1 = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$

$W_2 = \mathrm{Span}(e_1, e_3)$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(a, b, c) = (a+b+c, b, c)$

Si ha:

$$M_e^e(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il che prova che W_1, W_2 e f soddisfano tutte le condizioni.

26. Si considerino le matrici reali:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dire se le matrici A e B sono equivalenti destra-sinistra, e se sono simili.

EQUIVALENZA DESTRA-SINISTRA

Per queste matrici il rango individua un invariante completo. Dunque:

- $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$;
- $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} = 3$.

Dunque $A \sim_{ds} B$.

SIMILITUDINE

Valutiamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(x) = \det(A - x\,Id) = (1-x)\det\begin{bmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)^2(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1})(x^2-1) =$$

$$= x(x-2)(x+1)(x-1)$$

A è quindi diagonalizzabile. Dunque dato che essere o non essere diagonalizzabile è una proprietà invariante per matrici simili, anche B dovrà esserlo. Ma allora $P_A(x) = P_B(x)$, visto che il polinomio caratteristico è un invariante completo per matrici diagonalizzabili.

Non ci resta che calcolare $P_B(x)$:

$$P_B(x) = \det(B - x\,Id) = (1-x)\det\begin{bmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 2 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -x \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)\left[\quad x \quad + (1-x)(x^2 - x - 4)\right] - (x^2 - x - 4) \neq P_A(x).$$

Dunque $A \not\sim B$.

27. Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita e siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di W tali che $W = W_1 \oplus W_2$. Siano $f : V \to W_1$ e $g : V \to W_2$ applicazioni lineari. Si consideri l'applicazione $L : V \to W$ definita da $L(v) = f(v) + g(v)$ per ogni $v \in V$.

1) Verificare che L è lineare.
2) Verificare che $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
3) Verificare che $\operatorname{Imm} L = \operatorname{Imm} f \oplus \operatorname{Imm} g$ se e solo se $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = V$.

1) Per ipotesi, f e g sono applicazioni lineari. Dunque:

- $L(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$;
- $L(a) + L(b) = f(a) + g(a) + f(b) + g(b) = f(a+b) + g(a+b) = L(a+b)$;
- $L(\lambda a) = f(\lambda a) + g(\lambda a) = \lambda(f(a) + g(a)) = \lambda L(a)$.

2) Se $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$:

$$L(v) = f(v) + g(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} L$$

Se $v \in \operatorname{Ker} L$:

$$L(v) = f(v) + g(v) = 0 \Rightarrow f(v) = -g(v) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(v), g(v) \in W_1 \oplus W_2 \Rightarrow f(v) = g(v) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$$

3) Per ipotesi $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = V$. Allora:

$\forall v \in V \ \exists u \in \operatorname{Ker} f, z \in \operatorname{Ker} g$ t.c. $v = u + z$

Applichiamo f e g, e sommiamo:

$$L(v) = f(v) + g(v) = f(u) + g(u) + f(z) + g(z) = f(z) + g(u)$$

Dunque:

$\forall v \in V \ \exists z, u \in V$ t.c. $L(v) = f(z) + g(u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Imm} L = \operatorname{Imm} f + \operatorname{Imm} g$

Ma $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Imm} f \cap \operatorname{Imm} g = \{0\}$. Perciò:

$$\operatorname{Imm} L = \operatorname{Imm} f \oplus \operatorname{Imm} g$$

Supponiamo che $Ker\, f + Ker\, g \subsetneq V$. Allora:
$\exists\, v \in V \ni' v \notin Ker\, f + Ker\, g$

Consideriamo $L(v) = f(v) + g(v)$. Dato che W_1 e W_2 sono in somma diretta, dato che $f(v) \neq 0$, $g(v) \neq 0$, si ha:

$$L(v) \notin W_1 \oplus W_2$$
$$L(v) \notin Imm\, f \oplus Imm\, g$$

$$Imm\, L \neq Imm\, f \oplus Imm\, g$$

28. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia A_α la matrice:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Discutere la diagonalizzabilità di A_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Per $\alpha = 1$ trovare, se esiste, una base di autovettori di A_1 oppure, se esiste, una base a Jordan per A_1.

1) Il polinomio caratteristico di A_α è:

$$p_{A_\alpha}(x) = (-x)\det\begin{bmatrix} 1-x & -\alpha-1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha-x & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 1-x \end{bmatrix} = (-x)\Big[(\alpha+1)(\cancel{2\alpha}-2-\cancel{2\alpha}+2x) +$$

$$+(1-x)(\alpha-x-\alpha x+x^2+2\alpha+2)\Big] = (-x)\Big[-2\alpha+2\alpha x-\cancel{2}+\cancel{2x}+$$

$$+3\alpha-x-\alpha x+x^2+\cancel{2}-3\alpha x+x^2+\alpha x^2-x^3-\cancel{2x}\Big] =$$

$$= (-x)\left[-x^3+(2+\alpha)x^2+(1+2\alpha)x+\alpha\right] = (-x)(x-1)^2(x-\alpha)$$

Il polinomio risulta sempre completamente fattorizzabile.

Valutiamo $\dim V_0$ e $\dim V_1$:

$$\operatorname{rk} A_\alpha = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3\alpha+2 & -2\alpha-2 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha-1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Dunque

- $\dim V_0 = 1 \iff \alpha \neq 0$
- $\dim V_0 = 2 \iff \alpha = 0$

$$\operatorname{rk}(A_\alpha - Id) = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque:

- $\dim V_1 = 1 \iff \alpha \neq -1$
- $\dim V_1 = 2 \iff \alpha = -1$

Dunque solo A_{-1} è diagonalizzabile.

2) Ricerchiamo una base a bandiera per A_1. Sia A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è:

$$p_{A_1}(x) = x(x-1)^3$$

Iniziamo a costruire una base a bandiera. È immediato notare che

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} A_1$$

Ora imponiamo che:

$$\begin{cases} a - 2b + c + 2d = 0 \\ 2a + b + 2c = b \\ c = 0 \\ 2a + 2c + d = d \end{cases} \qquad \begin{cases} b = d \\ c = 0 \\ a = -c = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(A_1 - \mathrm{Id})$$

Potremmo completare con $\{e_1, e_2\}$, o $\{e_3, e_4\}$.
Tra questi, si nota che:

$f(e_3) = (1, 2, 0, 2) = 2v_1 + v_0 + e_3$

Allora una base a bandiera è:

$$\mathcal{B} = \{v_0, v_1, e_3, e_4\}$$

Infatti si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29. Al variare del parametro reale h si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x,y,z) = (y+z,\ y+hz,\ 2x-3y-z,\ x-2y-z)$$

1) Si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dell'immagine di f_h.

2) Fissato $h=2$, si costruisca un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che verifichi le seguenti proprietà:

- $\dim \operatorname{Imm} g = 2$;
- $\dim \operatorname{Imm}(g \circ f) = 2$;
- esiste la somma diretta $\operatorname{Imm} g \oplus \operatorname{Span}(1,3,0)$.

3) Si calcoli $g(0,1,0,3)$.

1) Date le basi canoniche $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}_4$ di $\mathbb{R}^4$, determiniamo $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(f_h)$:

$$M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(f_h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

La prima e la quarta colonna sono linearmente indipendenti, dunque:

$$2 \leq \dim \operatorname{Imm} f_h \leq 3$$

Senza perdere di generalità, eliminiamo la terza riga. Dunque:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{bmatrix} = h-1$$

Dunque:

- $\dim \operatorname{Imm} f_h = 2 \iff h = 1$
- $\dim \operatorname{Imm} f_h = 3$ altrimenti.

2) Dato che deve esistere la somma diretta $\operatorname{Imm} g \oplus \operatorname{Span}(w_1)$, $w_1 = (1,3,0)$, completiamo a base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{w_1, e_2, e_3\}$$

Dunque $\mathcal{B} = \{e_2, e_3\}$ è una base di Imm g.
Notiamo ora che la prima e la quarta riga della matrice associata ad f sono linearmente indipendenti.
Allora:

$$M^{e_3}_{e_4}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effettuiamo la verifica:

- Imm g = Span $(e_2, e_3) \Rightarrow \exists$ Imm $g \oplus$ Span $(1,3,0)$;
- dim Imm $g = 2$
- dim Imm $g \circ f = 2$. Infatti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

30. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f_b(X) = M_b(X)$, dove

$$M_b = \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b+1 & b \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{bmatrix}.$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(0,-1,2,0)$, $(1,0,4,2)$.

1) Si determinino equazioni cartesiane per W.

2) Si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Ker} f_b$ è isomorfo a:
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ y-z=0\}$$

3) Si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Imm} f_b \subseteq W$.

4) Data $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare surgettiva, si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $g \circ f_b = 0$.

1) Procediamo mediante l'eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 4 & z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 4 & z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right] \blacktriangleright \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & z+2y-4x \\ 0 & 0 & t-2x \end{array}\right]$$

Dunque:

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ 2x-t=0 \end{cases}\right\}$$

2) Innanzitutto $U = \operatorname{Span}(-1,1,1)$, dunque $\dim U = 1$. Allora imponiamo $\dim \operatorname{Ker} M_b = 1$, $\operatorname{rk} M_b = 2$.

$$\begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b+1 & b \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-3 & b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & -(b-1) & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\operatorname{rk} M_b = 3$ in tutti i casi eccetto 2:

- $b = 0 \Rightarrow \operatorname{rk} M_b = 2$;
- $b = 1 \Rightarrow \operatorname{rk} M_b = 2$.

Allora, in conclusione:

$$\operatorname{Ker} f_b \text{ è isomorfo a } W \iff b = 0 \lor b = 1$$

3) Analizziamo le due matrici M_0 e M_1, le uniche due "candidate", e analizziamo se le colonne di M_0 e M_1 appartengono a W:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A^1 \in W \\ A^2 \notin W \\ A^3 \notin W \end{array} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A^1 = A^3 \in W \\ A^2 \in W \end{array}$$

Dunque $\operatorname{Imm} f_b \subseteq W \iff b = 1$.

4) Dato che g è surgettiva, e $g \circ f_b = 0$, si dovrebbe avere $\operatorname{Imm} f_b \subseteq \operatorname{Ker} g$, dunque $\dim \operatorname{Imm} f_b \leq 1$.
Ma abbiamo visto che $\dim \operatorname{Imm} f_b \geq 2 \ \forall\, b \in \mathbb{R}$: dunque $\nexists\, b \in \mathbb{R}$ s.t. $g \circ f_b = 0$.

31. Siano $V = S(2,\mathbb{R})$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$. Sia:

$$G = \left\{ f \in Hom(V,\mathbb{R}^3) \mid f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,2,2), \right.$$
$$\left. f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1,-1,1) \quad W \subseteq Imm\, f \right\}$$

1) Si provi che G non è vuoto.
2) Si dica se esiste $f \in G$ non iniettiva.
3) Si dica se esiste $f \in G$ tale che $f\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = (1,2,3)$.

1) Questo punto verrà discusso in seguito.
2) I vettori $(0,2,2)$ e $(1,-1,1)$ sono linearmente indipendenti, e in più il secondo non appartiene a W.
Scriviamo una base di W:
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
Dovremmo avere al tempo stesso:
- $v_3 \in Ker\, f$;
- $f(v_3) = w_1$, ove $\{w_1, (0,2,2)\}$ è una base di W.

Ciò non è affatto possibile. Dunque non esistono $f \in G$ che non siano iniettive.

3) Si ha:
$$f\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = f(2v_1 - 3v_2) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall f \in G$$
Dunque non esiste $f \in G$ tale che $f\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = (1,2,3)$

1) Contavo di determinare una f al punto 3, invece no...
Dunque, determiniamo una base di W:
$$W = Span((0,2,2),(1,0,1))$$
Scelgo:
$f(v_1) = (0,2,2)$
$f(v_2) = (1,-1,1)$
$f(v_3) = (1,0,1)$

Per costruzione $W \subseteq Imm\, f$, dunque $f \in G$.

32. Dire, giustificando la risposta, quali affermazioni sono vere e quali sono false.

1) Sia V uno spazio vettoriale e siano W_1, W_2, W_3 tre sottospazi vettoriali di V di dimensione rispettivamente n_1, n_2, n_3 tali che $W_i \cap W_j = \{0\}$ per ogni $i \neq j$. Allora:

$$\dim(W_1 + W_2 + W_3) = n_1 + n_2 + n_3$$

2) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili. Allora $A+B$ è diagonalizzabile.

3) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili tali che $AB = BA$. Allora $A+B$ è diagonalizzabile.

4) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili. Allora la matrice:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbb{R})$$

è diagonalizzabile.

1) Falso. Siano $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \text{Span}(1,0,0)$, $W_2 = \text{Span}(1,1,0)$, $W_3 = \text{Span}(0,1,0)$. Allora $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, inoltre $W_i \cap W_j = \{0\}$ $\forall i \neq j$. Ma:

$$\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim \text{Span}((0,1,0),(1,0,0)) = 2 \neq 3$$

2) Falso. Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

- $p_A(x) = \det(A - x\,\text{Id}) = (1-x)(-x) \Rightarrow A$ è diagonalizzabile,
- $p_B(x) = \det(B - x\,\text{Id}) = (1-x)(-x) \Rightarrow B$ è diagonalizzabile;
- $p_{A+B}(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow A+B$ non è nemmeno triangolabile.

3) Vero. Due matrici del genere sono simultaneamente diagonalizzabili. Allora:

$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $MAM^{-1} = D_1$, $MBM^{-1} = D_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A + B = M^{-1}(D_1 + D_2)M \Rightarrow M(A+B)M^{-1} = D_1 + D_2 = D_3$,

dunque $(A+B)$ è diagonalizzabile.

4) Vero. Per ipotesi:

$\exists\ M \in GL(n, \mathbb{R}) \ni' MAM^{-1} = D_1$

$\exists\ N \in GL(n, \mathbb{R}) \ni' NBN^{-1} = D_2$

Allora

$$\exists \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R}) \ni' \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

33. Si dica, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono a due a due linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

2) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f, g \in End(V)$. Se esiste una base di V a bandiera sia per f che per g, allora $f \circ g = g \circ f$.

1) Falso. Sia $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Si ha che:

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_3\} \qquad \mathcal{B}_3 = \{v_2, v_3\}$$

sono tre basi di $\mathbb{R}^2$, il che comprova la falsità della proposizione.

2) Falso. Sia $V = \mathbb{R}^2$, $f, g \in End(V)$ così definiti:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora:

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$$

è una base a bandiera sia per f che per g, ma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque anche quest'affermazione è falsa.

31. Si consideri, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$M_h = \begin{bmatrix} -h+1 & 0 & 0 & -h \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -h-1 & 0 & 2 & -h \\ h & 0 & 0 & h+1 \end{bmatrix}.$$

1) Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice M_h è diagonalizzabile?

2) Si determini l'insieme dei numeri reali b per cui la matrice N_b è simile alla matrice M_0, ove:

$$N_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Calcoliamo $P_{M_h}(x)$:

$$P_{M_h}(x) = (2-x)^2 \det \begin{bmatrix} -h+1-x & -h \\ h & h+1-x \end{bmatrix} = (2-x)^2 (\cancel{h^2} - \cancel{h^2} + (1-x)^2) =$$
$$= (2-x)^2 (1-x)^2$$

Gli autovalori sono dunque indipendenti da h, e sono 1 e 2, ciascuno di molteplicità algebrica 2.

Valutiamo $\dim V_1$ e $\dim V_2$:

- $$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -h & 0 & 0 & -h \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -h-1 & 0 & 1 & -h \\ h & 0 & 0 & h \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & h \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -h-1 & 0 & 1 & -h \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -h-1 & 0 & 1 & -h \\ h & 0 & 0 & h \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & h+1 & 1 & 1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & 1 \\ 0 & -h & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \tilde{S}$$

Si ha:

$$\det \tilde{S} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = h$$

Dunque:

- $\dim V_1 = 2 \iff h = 0$;
- $\dim V_1 = 1 \iff h \neq 0$.

Per calcolare $\dim V_2$, sostituiamo direttamente 0 ad h:

- $$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

Dunque solo N_0 è diagonalizzabile.

2) Determiniamo (facilmente) $P_{N_b}(x)$:

$$P_{N_b}(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$$

Calcoliamo, al variare di $b \in \mathbb{R}$, $\dim V_1$ e $\dim V_2$:

- $$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Dunque N_b non è mai diagonalizzabile.
Dato che essere o non essere diagonalizzabili è una proprietà invariante per similitudine concludiamo che non esiste no $b \in \mathbb{R}$ t.c. $N_b \sim N_0$.

35. Si determinino i valori di k per cui le matrici $A, B \in M(3,\mathbb{R})$ sono simili:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k+3 & k & 2k-2 \\ -k & 3-k & 1-k \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $P_A(x)$:

$$P_A(x) = (3-x)\left((1-x)^2 - 4\right) = (3-x)(1+x^2-2x-4) =$$
$$= (3-x)(x^2-2x-3) = (3-x)(x-3)(x+1) =$$
$$= -(x-3)^2(x+1)$$

Si noti che $rk\,(A - 3Id) = 1$. Allora A è diagonalizzabile.

Dobbiamo determinare $P_B(x)$, e i $k \in \mathbb{R}$ t.c. B è diagonalizzabile.

Calcoliamo allora $P_B(x)$:

$$P_B(x) = (-1-x)\det\begin{bmatrix} k+3-x & k \\ -k & -k+3-x \end{bmatrix} = (-1-x)(3-x)^2 = -(x-3)^2(x+1)$$

Dato che $P_A(x) = P_B(x)$, calcoliamo $\dim V_3$:

$$rk\left(B - 3Id\right) = rk\begin{bmatrix} k & k & 2k-2 \\ -k & -k & 1-k \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = rk\begin{bmatrix} -k & 1-k \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = rk\,\tilde{T}$$

Si noti che:

$\det \tilde{T} = 4k$

Allora:

- $k = 0 \iff \dim V_3 = 2$;
- $k \neq 0 \iff \dim V_3 = 1$.

Concludendo:

$$A \sim B \iff k = 0.$$

36. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e siano H e L due sottospazi vettoriali di V tali che $\dim H = \dim L = 2$, e $\dim(H+L) = 3$. Si verifichi che:

$$E = \{ f \in End(V) \mid f(H) \subseteq H,\ f(L) \subseteq L \}$$

è un sottospazio vettoriale di $End(V)$, e se ne calcoli la dimensione.

Effettuiamo le dovute verifiche:

- $0 \in E$, poiché $f(H) = \{0\} \subseteq H$, $f(L) = \{0\} \subseteq L$, visto che H e L sono sottospazi di V;
- $f, g \in End(V) \Rightarrow f(H), g(H) \subseteq H,\ f(L), g(L) \subseteq L \Rightarrow$
  $\Rightarrow (f+g)(H) = f(H) + g(H) \subseteq H,\ (f+g)(L) = f(L) + g(L) \subseteq L$;
- $f \in End(V) \Rightarrow f(H) \subseteq H \Rightarrow (\lambda f)(H) = \lambda \cdot f(H) \subseteq H \Rightarrow (\lambda f) \in E$.

Dato che $\dim L = \dim H = 2$, $\dim(H+L) = 3$, allora:

$$\dim(H \cap L) = 1$$
$$H \cap L = Span(v_1)$$

Ora, per $f \in E$, si ha:

$$f(v_1) \subseteq H,\quad f(v_1) \subseteq L$$
$$f(v_1) \subseteq H \cap L$$
$$f(v_1) = \alpha v_1$$

v_1 è dunque autovettore per f.

Scriviamo una base di H e una di L usando v_1:

$$\mathcal{B}_H = \{v_1, h_1\} \qquad \mathcal{B}_L = \{v_1, l_1\}$$

Allora, per $f \in E$:

$$f(h_1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 h_1$$
$$f(l_1) = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 l_1$$

Completo a base di V:

$$\mathcal{G} = \{v_1, h_1, l_1, w_1\}$$

Si ha $\dim E = 9$, visto che:

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(f) = \begin{bmatrix} \alpha & \lambda_1 & \lambda_3 & \beta_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix}$$

37. Si considerino i vettori seguenti di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1) \qquad v_2 = (1, k, k^2) \qquad v_3 = (k, k^2, k)$$

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3)$, $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$.

Valutiamo i tre vettori usando il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k \end{bmatrix} = (k^2 - k^4) - (k - k^3) + (\cancel{k^2} - \cancel{k^2}) =$$
$$= -k^4 - k^3 + k^2 + k = -k(k+1)^2(k-1)$$

Dunque $\dim \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3) = 3$ se $k \neq 0, 1, -1$.

Se $k \neq 0, 1, -1$, dovrebbe essere $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$, da cui $f = 0$: assurdo.

Se $k = 0, -1$, consideriamo una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_{0,-1} = \{ v_1, v_2, e_3 \}$$

Si avrebbe:

$$M^{\mathcal{B}_{0,-1}}_{\mathcal{B}_{0,-1}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma^2 \\ 0 & 0 & \beta\gamma^2 \\ 0 & 0 & \gamma^3 \end{bmatrix}$$

La condizione $\gamma^3 = 0$ implica $\gamma = 0$, ossia $f^2 = 0$.

Se $k = 1$, sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, e_2, e_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo la seguente $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ così definita:

$$f(v_1) = 0 \qquad f(e_2) = v_1 \qquad f(e_3) = v_2$$

Questa applicazione è accettabile, in quanto $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(v_1)$, e:

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(f^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(f^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

38. Al variare del parametro reale k si considerino le matrici di $M(3,\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ -k & k & k+1 \end{bmatrix}$$

1) Dire se A è diagonalizzabile e determinare equazioni cartesiane per i suoi autospazi.

2) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori sia per A che per B_k

1) Calcoliamo $P_A(x)$:

$$P_A(x) = (1-x)\det\begin{bmatrix} 2-x & -1 \\ 2 & -1-x \end{bmatrix} = (1-x)\left[(2-x)(-1-x)+2\right] =$$

$$= (1-x)\left[\cancel{-2} - x + x^2 + \cancel{2}\right] = (1-x)^2(-x)$$

Dunque:

- $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} A = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0,\ 2y + z = 0\right\}$$

- $\operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 2$

(A è dunque diagonalizzabile)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\right\}$$

2) Questo problema è equivalente a trovare i $k \in \mathbb{R}$ tali che A e B_k commutano.

Dunque:

- $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ -k & k & k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k & 1-k \\ 1-k & 1-k & k-1 \\ k & k & 1-k \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ -k & k & k+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & k & k-1 \\ k-1 & 1-k & 1-k \\ 2-k & k & k-1 \end{bmatrix}$$

Dalla prima condizione $k = 2-k$, si ha $k = 1$.

Effettivamente:

$$AB_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B_1 A$$

Dunque A è simultaneamente diagonalizzabile solo con B_1.

Per sicurezza, accertiamoci che B_1 è diagonalizzabile:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_{B_1}(x) = -\left[2-x-1\right] - x\left[(-x)(2-x)+1\right] + \left[-x+1\right] = \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{1} +$$
$$- x\left[(-x)(2-x)+1\right] = -x\left(-2x + x^2 + 1\right) = (-x)(x-1)^2$$

Per concludere:

$$rk\,(B_1 - Id) = rk \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 2$$

Dunque B è diagonalizzabile

39. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione $p \geq 1$.
Sia:

$$E = \{ f \in End(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid W \subseteq V(\lambda, f) \},$$

dove $V(\lambda, f)$ denota l'autospazio di V per f relativo all'autovalore λ. Dire se E è un sottospazio vettoriale di V e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

- $0 \in E$, visto che $V(0,0) = V \supseteq W$;
- $f, g \in E \Rightarrow \exists \lambda, \mu$ t.c. $W \subseteq V(\lambda, f) \cap V(\mu, g) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall w \in W : (f+g)(w) = \lambda w + \mu w \Rightarrow \exists (\lambda + \mu)$ t.c.
$W \subseteq (\lambda + \mu, f+g) \Rightarrow f+g \in E$;
- $f \in E \Rightarrow \exists \lambda$ t.c. $W \subseteq V(\lambda, f) \Rightarrow \forall w \in W : f(w) = \lambda w \Rightarrow$
$\forall \eta : (\eta f)(w) = f(\eta w) = \lambda \eta w \Rightarrow \exists \lambda \eta$ t.c. $W \subseteq (\lambda \eta, \eta f) \Rightarrow$
$\eta f \in E$.

E è dunque un sottospazio vettoriale di $End(V)$

Per calcolarne la dimensione, consideriamo una base di W e un suo completamento a base di V:

$$\mathcal{B}_1 = \{ w_1, w_2 \dots w_p \}$$
$$\mathcal{B} = \{ w_1, w_2 \dots w_p, v_{p+1} \dots v_n \}$$

Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda Id & \\ \hline 0 & * \end{array} \right]$$

Dunque:
- le blocco $(*)$, non avendo restrizioni, ha una base di $n(n-p)$ vettori;
- il blocco λId è generato da λId.

Dunque:

$$dim\, E = n^2 - np + 1$$

40. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi:

$$V = \{(x,y,z) \mid x - y - z = 0\}$$
$$W = \{(x,y,z) \mid 2x - z = 0\}$$
$$Z = \{(x,y,z) \mid x + 3y + z = 0\}$$

1) Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(V) = V$, $f(W) = Z$ e $f(Z) = W$.

2) Dire se quell'endomorfismo è diagonalizzabile.

1) Le tre condizioni sono a due a due non equivalenti, dunque

$$V \neq W \qquad V \neq Z \qquad W \neq Z$$
$$\dim V \cap W = 1 \qquad \dim V \cap Z = 1 \qquad \dim W \cap Z = 1$$

Analizziamo $\dim(V \cap W \cap Z)$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + x - 2x = 0 \\ z = 2x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} V \cap W \cap Z = \mathrm{Span}(1,-1,2) \\ \dim(V \cap W \cap Z) = 1 \end{array}$$

$(1,-1,2)$ è un autovettore per f. Infatti:

$$f(V \cap W \cap Z) = V \cap Z \cap W \Rightarrow f(1,-1,2) = \lambda(1,-1,2)$$

Determiniamo ora una base per ciascun sottospazio. Sia $v_1 = (1,-1,2)$:

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, (0,3,-3)\} \qquad \mathcal{B}_W = \{v_1, (0,1,0)\} \qquad \mathcal{B}_Z = \{v_1, (0,1,-3)\}$$

Prima di proseguire:

2) Condizione necessaria affinché f sia diagonalizzabile è che abbia una base di (3) autovettori. Uno esiste: è v_1. Ammettiamo che V abbia una base di autovettori: il terzo vettore dovrebbe appartenere a $W \setminus Z$ (oppure a $Z \setminus W$): l'immagine apparterrebbe a Z (o a W), dunque un terzo autovettore non esiste. Se supponiamo che V non abbia una base di autovettori, non riusciamo a trovarne neanche due, di autovettori.
Prima di costruire una f accettabile, dunque, sappiamo già che f non è diagonalizzabile.

Siano:

$v_1 = (1, -1, 2)$ $v_2 = (0, 3, -3)$ $v_3 = (0, 2, 0)$ $v_4 = (0, 1, 3)$ $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Impongo:

$f(v_1) = v_1$ $f(v_2) = v_2$ $f(v_3) = v_4 = v_2 - v_3$

Si ha:

- banalmente $f(V) = V$ e $f(W) = Z$;
- $f(v_4) = f(v_2 - v_3) = f(v_2) - f(v_3) = v_2 - v_4 = v_3 \Rightarrow f(Z) = W$.

Si ha:

$$A = M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2-bis) OK, prima ho detto cazzate.

Calcoliamo $P_A(x)$:

$P_A(x) = (1-x)^2(-1-x) = -(x-1)^2(x+1)$

Abbiamo v_1 e v_2 autovettori per f relativi ad 1.

Vediamo le operazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b+c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b = -c \end{cases}$$

Dunque

$$\{(1, -1, 2), (0, 3, -3) (0, -1, 2)\}$$

(pare essere) una base di autovettori per f.

RIEPILOGO GENERALE

Riepiloghiamo un pò tutto ciò di cui stiamo parlando.

Il nostro studio è concentrato sugli endomorfismi triangolabili:

$$f \in \mathcal{T}(V) \iff P_f(x) \text{ è completamente fattorizzabile}$$

Si ha:

$$P_f(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)},$$

ove:

- $\lambda_j \neq \lambda_i \quad \forall\ j \neq i$,
- $\sum_{j=1}^{k} \mu_a(\lambda_j) = n = \dim V = \deg P_f(x)$.

Attraverso il teorema di decomposizione primaria, poi, abbiamo dimostrato che, denotato con $W_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j Id)^{\mu_a(\lambda_j)}$:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} W_{\lambda_j},$$

e in più ogni W_{λ_j} è f-invariante.

Studiando poi la seguente restrizione:

$$f|_{W_{\lambda_j}}$$

abbiamo dimostrato che:

$$V_{\lambda_j}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id) \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)^r = W_{\lambda_j}$$

Una conseguenza di ciò è che:

$$Sp\left(f|_{W_{\lambda_j}}\right) = \{\lambda_j\}$$

Se così non fosse, infatti, si avrebbe, per qualche i, j, $i \neq j$:

$$W_{\lambda_j} \cap V_{\lambda_i} \neq \{0\}$$
$$\Downarrow$$
$$W_{\lambda_j} \cap W_{\lambda_i} \neq \{0\},$$

e la somma diretta non avrebbe più senso. Ma ciò va contro l'ipotesi; dunque la tesi.

In più, se consideriamo una base di V adattata alla decomposizione, così fatta:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_{\lambda_1}, \mathcal{B}_{\lambda_2} \dots \mathcal{B}_{\lambda_k} \},$$

ove $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ è una base di W_{λ_j} adatta ai nostri scopi, si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Ogni "blocco" non è altro che $M^{\mathcal{B}_j}_{\mathcal{B}_j}(f|_{W_{\lambda_j}})$.

Si ha quindi:

$$p_f(x) = \prod_{j=1}^{k} p_{f|_{W_{\lambda_j}}}(x)$$

$$\forall j = 1 \dots k : \; p_{f|_{W_{\lambda_j}}}(x) = \pm (x - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

Dunque:

$$\dim W_{\lambda_j} = \mu_a(\lambda_j)$$

Analogamente si ha:

$$q_{f|_{W_{\lambda_j}}}(x) = \pm (x - \lambda_j)^{t_j}, \; 1 \le t_j \le m_j$$

$$q_f(x) = \prod_{j=1}^{k} q_{f|_{W_{\lambda_j}}}(x)$$

Si ha che $q_f(x)$ genera $I(f)$:

- $q_f(x) \in I(f)$

~~Dim.~~

Si ha, per ipotesi:

$$q_f(x) = \bigcirc_{j=1}^{k} q_{f|_{W_{\lambda_j}}}(f)$$

Sia $v \in \mathcal{B}_1$. Allora:

$$\left(q_{f|\omega_{\lambda_1}}\right) \circ \left(q_{f|\omega_{\lambda_2}}\right) \circ \dots \circ \left(q_{f|\omega_{\lambda_k}}\right)(v) =$$

$$\left(q_{f|\omega_{\lambda_2}}\right) \circ \dots \circ \left(q_{f|\omega_{\lambda_k}}\right) \circ \underbrace{\left(q_{f|\omega_{\lambda_1}}\right)(v)}_{0} = 0$$

Sfruttando la commutatività dei singoli polinomi, posso annullare un qualsiasi vettore. Dunque $q_f(x) \in I(f)$;

- $q_f(x)$ è per definizione il polinomio minimo di f. Dunque, se una delle restrizioni avesse un polinomio minimo di grado strettamente minore di r_j:

$$q_{f|\omega_{\lambda_j}} = \pm (x - \lambda_j \, Id)^s, \quad s < r_j,$$

allora si avrebbe:

$$\deg\left(a_f(x) = \prod_{j=1}^{k} q_{f|\omega_{\lambda_j}}(x)\right) < \deg q_f(x),$$

assurdo per ipotesi.

Ricapitolando, si ha:

- riguardo al polinomio caratteristico:

$$p_f(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

$$\mu_a(\lambda_j) = \dim \omega_{\lambda_j}, \quad \omega_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda \, Id)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

$$p_{f|\omega_{\lambda_j}}(x) = \pm (x - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$$

- riguardo al polinomio minimo:

$$q_f(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{r_j}, \quad 1 \leq r_j \leq \mu_a(\lambda_j)$$

$$q_{f|\omega_{\lambda_j}} = \pm (x - \lambda_j)^{r_j}$$

$$\omega_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j \, Id)^{r_j}$$

Inoltre

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} \omega_{\lambda_j}$$

Dunque, se:

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_{\lambda_1}, \mathcal{B}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_k} \},$$

in modo che ogni $\mathcal{B}$ abbia una bandiera f-invariante per $f|_{W_{\lambda_i}}$, si ha:

$$\left[\begin{array}{cccc} \begin{matrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1\end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix}\lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k & \\ 0 & & & \lambda_k\end{matrix}\end{array}\right] = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

ENDOMORFISMI NILPOTENTI ASSOCIATI

Sia dunque $g: W \longrightarrow W$, $\dim(W) = n$.
Si ha:

- $p_g(x) = \pm(x - \lambda)^{\mu_a(\lambda)}$
- $q_g(x) = \pm(x - \lambda)^r$, $1 \leq r \leq \mu_a(\lambda)$

Consideriamo ora la seguente stringa:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_r = \mu_a(\lambda),$$

ove:

- $\forall\, i = 1 \ldots r: \; d_i = \dim \operatorname{Ker}(g - \lambda Id)^i$;
- $d_1 = \dim V_\lambda(g)$.

Vogliamo ora specializzare la base $\mathcal{B}$ con bandiera g-invariante in modo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ sia "sostanzialmente" unica.
Sia:

$$h = g - \lambda Id$$

Si ha:

$$P_h(x) = \pm x^{\mu_a(\lambda)} \qquad q_h(x) = \pm x^r$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \;\; \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \;\; \lambda \end{bmatrix} = S = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che $S \in \mathcal{ST}(n, \mathbb{K})$, dunque è nilpotente.

Difatti, h è detto ENDOMORFISMO NILPOTENTE ASSOCIATO a g.
In altri termini, un endomorfismo con autovalore $\lambda = 0$, di quelli del tipo che stiamo trattando ora, è nilpotente.

Si noti che, se:

$$g = h + \lambda Id$$
$$g' = h' + \lambda Id$$

Si ha:

$$g \sim g' \Longleftrightarrow h \sim h'$$

Dim.

Per ipotesi, $g \sim g'$. Allora:

$$g' = k \circ g \circ k^{-1}, \quad k \in GL(V)$$

Allora:

$$h' + \lambda Id = k \circ (h + \lambda Id) \circ k^{-1} =$$
$$= k \circ h \circ k^{-1} + k \circ \lambda Id \circ k^{-1} =$$
$$= k \circ h \circ k^{-1} + k \circ k^{-1} \circ \lambda Id =$$
$$= k \circ h \circ k + \lambda Id$$

$$h' = k \circ h \circ k^{-1}$$

Per ipotesi, $h \sim h'$. Allora $h' = e \circ h \circ e^{-1}$, $e \in GL(V)$.

Allora:

$$g' = h' + \lambda Id = e \circ h \circ e^{-1} + \lambda Id \circ e \circ e^{-1} = e \circ h \circ e^{-1} +$$
$$+ e \circ \lambda Id \circ e^{-1} = e \circ (h + \lambda Id) \circ e^{-1} = e \circ g \circ e^{-1}$$

$$g \sim g', \quad \text{c.v.d.}$$

L'endomorfismo $h = g - \lambda Id$ è anche detto la PARTE NILPOTENTE di g.

Non è quindi restrittivo proseguire il nostro studio assumendo $\lambda = 0$, e concentrandosi al caso di endomorfismi nilpotenti.

Se W viene decomposto in somma diretta di sottospazi h-invarianti, allora la restrizione di h ad ogni addendo diretto è anch'essa nilpotente.

Cominciamo con l'analizzare i due casi estremi:

- $r = 1 \Rightarrow d_1 = m$:
  In questo caso, si ha $W = Ker\, h = V_0(h) \Rightarrow h = 0$.
  In altre parole, h è diagonalizzabile.
- $r = m$:
  rimandiamo al prossimo paragrafo.

BASI CICLICHE E BLOCCHI DI JORDAN

Vogliamo studiare il caso estremo in cui $t = m$.

Ciò significa che:

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 2 \quad d_3 = 3 \ \dots \ d_t = d_m = m$$
$$h^m = 0 \qquad h^{m-1} \neq 0$$

In particolare, $\exists\, v \neq 0$ t.c. $h^{m-1}(v) \neq 0$

Per h nilpotente, si definisce una BASE CICLICA di W una base:

$$\mathcal{B} = \{h^{m-1}(v), h^{m-2}(v) \dots h(v), v\},$$

per un $v \in W$.

In questa particolare base, si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = J_m(0)$$

La matrice $J_m(0)$ si definisce BLOCCO DI JORDAN di taglia m e autovalore 0.

In generale, si definisce blocco di Jordan di taglia m e autovalore λ, $J_m(\lambda)$, la seguente matrice:

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_m(\lambda) = \lambda \mathrm{Id} + J_m(0)$$

Piccola nota sulla pronuncia: Jordan si pronuncia "alla francese", non "all'inglese".

Ammesso che questa base ciclica esista, essa è tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) = J_m(0)$.

Dimostriamo allora il seguente teorema.

TEOREMA

Sia h nilpotente. Allora sono fatti tra loro equivalenti:

- $P_h(x) = q_h(x) = \pm x^m$;
- h ha la stringa invariante $[(0, m, (1, 2, \dots m)]$
- esiste una base ciclica per h.

Dim.

1) e 2) sono equivalenti, poiché se:

$$P_h(x) = q_h(x) = \pm x^m,$$

allora:

$$\operatorname{Ker} h \subsetneq \operatorname{Ker} h^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} h^m = W,$$

dunque la stringa di h è:

$$[0, m, (1, 2, 3 \dots m)].$$

D'altronde, se la stringa è quella citata in 2), allora:

$$P_h(x) = q_h(x) = \pm x^m$$

Inoltre 3) implica banalmente 1).

Dimostriamo, per concludere, che 1) implica 3).

Supponiamo dunque:

$$P_h(x) = q_h(x) = \pm x^m$$

Allora:

$\exists\, v \in W,\ v \neq 0 \ \ni'\ h^m(v) = 0,\ h^{m-1}(v) \neq 0$

Consideriamo $\mathcal{B} = \{h^{m-1}(v), h^{m-2}(v) \dots h(v), v\}$: dimostriamo che essi sono linearmente indipendenti, e avremo dimostrato l'esistenza di una base ciclica.

Dunque:

$$0 = a_{m-1} h^{m-1}(v) + \dots + a_1 h(v) + a_0 (v) \Rightarrow$$

- $h(0) = 0 = a_{m-1} \cancel{h^m(v)} + \dots + a_1 h^2(v) + a_0 h(v)$
- $h^2(0) = 0 = a_{m-3} h^{m-1}(v) + \dots + a_0 h^2(v)$
- $\dots$
- $h^{m-1}(0) = 0 = a_0 h^{m-1}(v)$

Dunque $a_0 = 0$; risalendo, si ha quanto voluto:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0, \text{ c.v.d.}$$

RIEPILOGO

Dato W tale che $\dim W = m$, abbiamo concentrato l'attenzione su particolari endomorfismi triangolabili $g \in End(W)$, tali che:

$$Sp\ g = \{\lambda\}$$

Chiamato E questo insieme, stiamo studiando $E/_{\sim}$.

Sappiamo che:

$$p_g(x) = \pm (x-\lambda)^{\mu_a(\lambda) = m}$$

$$q_g(x) = \pm (x-\lambda)^{r}, \ 1 \leq r \leq m$$

Inoltre:

$$W_j = Ker\ (g - \lambda Id)^j$$

$$d_j = \dim W_j$$

$$V_\lambda(g) = W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_r = m$$

$$d_1 < d_2 < \dots < d_r = m$$

Abbiamo dimostrato che, per endomorfismi di questo tipo:

$$g \sim g' \Rightarrow \lambda = \lambda'$$

Dunque, fissato λ, si ha:

$$g = h + \lambda Id,$$

ove h è l'ENDOMORFISMO NILPOTENTE associato di g.

Si ha:

$$p_h(x) = \pm x^m \qquad q_h(x) = \pm x^r, \ 1 \leq r \leq m$$

$$Ker\ h^j = Ker\ (g - \lambda Id)^j$$

Inoltre, la stringa invariante di h è uguale a quella di g:

$$[\lambda, m, (d_1, d_2 \dots d_r)]$$

Abbiamo anche dimostrato che:

$$g \sim g' \Leftrightarrow h \sim h'$$

Abbiamo poi definito il BLOCCO DI JORDAN di taglia s e autovalore λ la seguente matrice $J_s(\lambda) \in M(s, \mathbb{K})$:

$$J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$J_s(\lambda) = J_s(0) + \lambda \mathrm{Id},$$

ove $J_s(0)$ è il BLOCCO NILPOTENTE associato a $J_s(\lambda)$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Dato che:

$$p_{J_s(\lambda)}(x) = q_{J_s(\lambda)}(x) = \pm (x - \lambda)^s,$$

si ha:

$$J_s(0)^{s-1} \neq 0 \quad , \quad J_s(0)^s = 0.$$

TEOREMI SUGLI ENDOMORFISMI NILPOTENTI

Abbiamo dimostrato che, per h nilpotente, i seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

- $P_h(x) = q_h(x) = \pm x^m$;
- h ha la stringa invariante $[1, m, (1, 2 \ldots m)]$;
- esiste una base ciclica per h.

Analogamente, dimostriamo che i seguenti tre fatti sono tra loro equivalenti (g non è nilpotente)

- $q_g(x) = -x \iff r = 1$;
- $W = V_\lambda(g)$;
- $\exists$ base tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1(\lambda) \end{bmatrix}$

Dim.

Se $q_h(x) = -x$, ossia se $r = 1$, allora:

$$V_\lambda(g) = W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_r = W$$

$$r = 1$$

$$\Downarrow$$

$$V_\lambda(g) = W$$

D'altronde, se $V_\lambda(g) = W$, allora $W_1 = W_r$, da cui $1 = r$.
Le proposizioni 2) e 3) sono tra loro equivalenti.
Se $W = V_\lambda(g)$, ossia W è l'autospazio relativo a λ per g, allora esiste una base di W di autovettori relativi all'autovalore λ. Sia $\mathcal{B}$ questa base. Si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1(\lambda) \end{bmatrix},$$

ossia la 3.
D'altronde, se è vera la 3, allora g è diagonalizzabile, ossia $W = V_\lambda(g) = \text{Ker}(g - \lambda \, \text{Id})$, visto che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) - \lambda \, \text{Id} = 0, \text{ c.v.d.}$$

TIPO

Sia W uno spazio vettoriale tale che $\dim W = n$.

Un TIPO è un'applicazione:

$$b : \{1, 2, 3 \dots n\} \to \mathbb{N}$$

tale che:

$$\sum_{j=1}^{n} b(j) \cdot j = n$$

Ex. $J_n(0)$ è di tipo $(0, 0, 0 \dots, 0, 1)$, essendo composta da un unico blocco di Jordan di taglia n.

Ex. La seguente matrice:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1(\lambda) \end{bmatrix}$$

è di tipo $(n, 0, 0 \dots 0)$, essendo composta da n blocchi di Jordan di taglia 1.

FORMA NORMALE DI JORDAN

Per definizione, una matrice nilpotente $m \times m$ è in FORMA NORMALE di Jordan "di tipo b" se:

- è diagonale a blocchi;
- ogni blocco è di Jordan con autovalore 0;
- $b(j)$ è il numero di blocchi di taglia j.

LEMMA

Due matrici in forma normale dello stesso tipo sono tra loro simili.

Due tali matrici, infatti, differiscono per una permutazione dei blocchi, che si realizza per mezzo di una permutazione degli elementi della base canonica.

Una matrice in forma normale di Jordan è "standard" se i blocchi lungo la diagonale sono ordinati per taglia decrescente.

Sia dunque $h: W \to W$ un endomorfismo nilpotente.
Sia $P_h(x) = \pm x^m$, $q_h(x) = \pm x^r$, $1 \le r \le m$.
Allora esiste un unico tipo b (completamente determinato in funzione di $[\lambda, r_\lambda, (d_1^\lambda < \dots < d_{r_\lambda}^\lambda)]$ ed una base B, detta "di Jordan per h" tale che:

$$M_B^B(h) = J(0, b)$$

L'enunciato generale del teorema è il seguente.

TEOREMA

Sia $f \in \tau(V)$. Possiamo associare ad f il seguente insieme di stringhe:

$$[\lambda, r_\lambda, (d_1^\lambda < \dots < d_{r_\lambda}^\lambda = m_\lambda)],$$

al variare di λ nello spettro di f. Allora

- esiste una base B, detta "di Jordan" per f, tale che $M_B^B(f)$ è una matrice diagonale a blocchi, tale che ogni blocco è della forma $J(\lambda, s)$, al variare di λ;

- La forma di Jordan "standardizzata" è completamente ed univocamente determinata dall'insieme di stringhe associate all'endomorfismo.
  In più, due endomorfismi coniugati presentano la medesima forma di Jordan, e due endomorfismi non coniugati ne presentano due diverse (si parla sempre di forme "standardizzate").
  L'insieme di stringhe associate ad f:
  $$[\lambda, r_\lambda, (d_1^\lambda < \dots < d_{r_\lambda}^\lambda)], \ \lambda \in Sp\, f$$
  costituisce quindi un INVARIANTE COMPLETO.

Dim.
Consideriamo la seguente successione strettamente crescente di nuclei (consideriamo il caso h nilpotente):
$$Ker\, h^{r-2} \subsetneq Ker\, h^{r-1} \subsetneq Ker\, h^r = W$$
Fissiamo una decomposizione in somma diretta:
$$Ker\, h^r = Ker\, h^{r-1} \oplus U_r$$
$$D = \dim U_r = d_r - d_{r-1}$$
Fissiamo una base di U_r:
$$\mathcal{B} = \{u_1^r, u_2^r \dots u_D^r\}$$
Applichiamo h, ottenendo:
$$h(\mathcal{B}) = \{h(u_1^r), h(u_2^r) \dots h(u_D^r)\}$$
Allora valgono i seguenti fatti:

- $Span(h(u_1^r), \dots h(u_D^r)) \subseteq Ker\, h^{r-1}$.
  Dim. Evidente:
  $$\forall k = 1 \dots D : h^{r-1}(h(u_k^r)) = h^r(u_k^r) = 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow Span(h(u_1^r) \dots h(u_D^r)) \subseteq Ker\, h^{r-1}$$

- $Span(h(u_1^r) \dots h(u_D^r))$ ha dimensione D; in altre parole, i vettori sopra citati sono linearmente indipendenti.

Dim. Sia $a_1 h(u_1^t) + a_2 h(u_2^t) \dots a_s h(u_s^t) = 0$.

Allora

$$h(a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t) = 0$$

Analizziamo $(a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t)$. Si noti che:

- $a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t \in U_t$, banalmente;
- $a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t \in \operatorname{Ker} h$, $\operatorname{Ker} h \subseteq \operatorname{Ker} h^{t-1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t \in \operatorname{Ker} h^{t-1}$.

Dato che U_t e $\operatorname{Ker} h^{t-1}$ sono in posizione di somma diretta:

$$a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t = 0$$

Dato che $\{u_1^t \dots u_s^t\}$ è una base di U_t:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0,$$

dunque:

$\operatorname{Span}(h(u_1^t) \dots h(u_s^t))$ ha dimensione s, c.v.d.

- $\operatorname{Span}(h(u_1^t) \dots h(u_s^t)) \cap \operatorname{Ker} h^{t-2} = \{0\}$

Dim. Consideriamo un elemento appartenente all'intersezione:

$$h^{t-2}(a_1 h(u_1^t) + \dots + a_s h(u_s^t)) = 0$$

$$h^{t-2}(h(a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t)) = h^{t-1}(a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t) = 0$$

Si ha:

- $a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t \in U_t$, banalmente;
- $a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t \in \operatorname{Ker} h^{t-1}$.

Allora $a_1 u_1^t + \dots + a_s u_s^t = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_s = 0$

Allora

$$v \in \operatorname{Span}(h(u_1^t), \dots h(u_s^t)) \cap \operatorname{Ker} h^{t-2} \Rightarrow v = 0$$

$$\operatorname{Span}(h(u_1^t), \dots, h(u_s^t)) \cap \operatorname{Ker} h^{t-2} = \{0\}$$

Procediamo ora con la costruzione della base $\mathcal{B}$ di W, avente le proprietà volute.

Consideriamo, come prima riga, la seguente stringa di vettori:

$$u_1, u_2, \dots u_t, \quad t = m - d_{r-1}$$

Applichiamo h, ottenendo

$$h(u_1), h(u_2), \dots h(u_t)$$

Consideriamo ora:

$$\operatorname{Ker} h^{r-3} \subsetneq \operatorname{Ker} h^{r-2} \subsetneq \operatorname{Ker} h^{r-1},$$

e riapplichiamo il procedimento, imponendo stavolta però che la base di U sia formata da altri vettori $u_{t+1}, \dots u_{t'}$, oltre a $h(u_1), h(u_2) \dots h(u_t)$.

Applichiamo h, e otteniamo:

$$h^2(u_1) \dots h^2(u_t), h(u_{t+1}) \dots h(u_{t'}),$$

che è in accordo con la proprietà 3) dimostrata prima.

Iteriamo fin quando è possibile. Alla fine otteniamo:

$$\begin{array}{cccccccc}
u_1 & u_2 & \dots & u_t & & & & \\
h(u_1) & h(u_2) & \dots & h(u_t) & u_{t+1} & \dots & u_{t'} & \\
h^2(u_1) & h^2(u_2) & \dots & h^2(u_t) & h(u_{t+1}) & \dots & h(u_{t'}) & \dots \\
 & & & \dots & & & & \\
h^{r-1}(u_1) & h^{r-1}(u_2) & \dots & h^{r-1}(u_t) & h^{r-2}(u_{t+1}) & \dots & &
\end{array}$$

Questa scala di vettori forma la base B di W cercata. D'altronde, leggendo ciascuna colonna dal basso verso l'alto, riconosciamo le basi cicliche per le restrizioni di h.

Abbiamo dunque dimostrato l'esistenza della forma di Jordan per h:

$\exists\ B$ di W t.c. $M^B_B(h) = J(h)$

$$B = \{B_1, B_2 \dots B_t\}$$

$$M^B_B(h) = \begin{bmatrix} \boxed{} & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{} \end{bmatrix}$$

Sull'unicità della forma di Jordan, ci limitiamo a dire che la forma di Jordan è unica a meno di permutazioni dei blocchi, e che essa può essere "standardizzata", imponendo che i blocchi siano disposti in ordine decrescente di taglia.

Il Teorema è completamente dimostrato, c.v.d.

Dunque:

$\exists\ \mathcal{B}_0$ di V t.c. $N^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(h) = J\left(b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)\right)$

posso ricostruire $(m, r, d_1 \leq \ldots \leq d_r)$ a partire da b?

Sapendo che:

$$\sum_{j=1}^{m} b(j) \cdot j = m$$

Si ha:

$$r = \max\{ j \mid b(j) \neq 0 \}$$

$$d_1 = \dim \operatorname{Ker} J(b) = m - \operatorname{rk} J(b) = $$
$$= m - \sum_{j=1}^{m} b(j) \cdot (j-1) = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Dunque d_1 è poi il numero dei blocchi di Jordan.

Infine:

$\forall\ i = 1 \ldots r \qquad d_i = m - \sum_{j=1}^{m} b(j) \operatorname{rk}\left(J_j(0)^i\right)$

ESERCIZI VARI

1. Siano $A \in M(p, \mathbb{K})$, $B \in M(r, \mathbb{K})$. Sia:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \in M(p+r, \mathbb{K})$$

Allora $q_M(x) = [q_A(x), q_B(x)]$.

Dim.

1) $\forall g \in \mathbb{K}[x] : g(M) = M^m + a_{m-1} M^{m-1} + \dots + a_0$

$\forall j = 1, \dots, m : M^j = \left[\begin{array}{c|c} A^j & 0 \\ \hline 0 & B^j \end{array}\right]$

Dunque la somma di tutto il polinomio è una matrice a blocchi:

$$g(M) = \left[\begin{array}{c|c} g(A) & 0 \\ \hline 0 & g(B) \end{array}\right]$$

In questo caso:

$$0 = q_M(M) = \left[\begin{array}{c|c} q_M(A) & 0 \\ \hline 0 & q_M(B) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} q_M(A) = 0 \\ q_M(B) = 0 \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{cases} q_M \in I(A) = \langle q_A \rangle \\ q_M \in I(B) = \langle q_B \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_A \mid q_M \\ q_B \mid q_M \end{cases}$$

$$\text{m.c.m.}(q_A, q_B) \mid q_M$$

2) Se $g(M) = 0$, allora:

$$\begin{cases} g \in I(A) \\ g \in I(B) \end{cases} \Rightarrow g \in I(M) \Rightarrow q_M \mid g$$

Dunque:

$$\forall g \in \mathbb{K}[x] : q_A \mid g, \ q_B \mid g \Rightarrow q_M \mid g$$

Allora:

$$q_M(x) = [q_A(x), q_B(x)], \text{ c.v.d.}$$

2. Determinare la forma di Jordan e una base di Jordan della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $p_A(x)$:

$$p_A(x) = (-x)(-x) \det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & -2-x & -1 \\ 1 & 2 & 1-x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 \left[2 - 2x - 1 + (1-x)(x^2 + x - 1) \right] = x^2 \left[\cancel{2} - \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{1} + \right.$$
$$\left. - x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{x} \right] = x^2 (-x^3) = -x^5$$

Dunque $Sp\ A = \{0\}$. Ovviamente $rk\ A > 0$, dunque A non è diagonalizzabile.

Valutiamo $Ker\ A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rk\ A = 3 \quad dim\ Ker\ A = 2$$

Notiamo facilmente che:

$$Ker\ A = Span(e_1 - e_2 + e_5, e_3)$$

Valutiamo $Ker\ A^2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow dim\ Ker\ A^2 = 4$$

Si ha:

$$Ker\ A^2 = (e_1 - e_2 + e_5, e_3, e_1, e_4)$$

Dunque $Ker\ A^3$ ha dimensione 5, ossia $Ker\ A^3 = 5$.

Dunque, sia $W_2 = \mathrm{Span}(e_2)$. Si ha:

$$\begin{array}{ccc} e_2 & & \\ \downarrow & & \\ A e_2 = e_1 - 2e_2 + 2e_5 & & e_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^2 e_2 = -e_1 + e_2 - e_5 & & e_3 \end{array}$$

Dunque si ha:

$$\mathcal{B}_J = \{-e_1 + e_2 - e_5,\ e_1 - 2e_2 + 2e_5,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$$

$$J_A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RIPASSO DI TEORIA

Consideriamo:

$$M(n, \mathbb{C}) \rightsquigarrow A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

Descriviamo Sp A:

$$\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall\, i \neq j$$

Ovviamente:

$$\mu_a(\lambda_1) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) = n = \dim \mathbb{C}^n$$

OSSERVAZIONE

Se anche $\mu_g(\lambda_1) + \ldots + \mu_g(\lambda_k) = n$ (e solo se), allora A è anche diagonalizzabile.

Sappiamo che nella classe di similitudine di A c'è una "forma di Jordan", unica a meno di permutazioni dei blocchi. Se e solo se due matrici hanno (nella loro classe di similitudine) la stessa forma di Jordan, allora sono simili. La forma di Jordan, dunque, costituisce un invariante completo.

Consideriamo la somma diretta degli autospazi, e quella degli AUTOSPAZI GENERALIZZATI:

$$\begin{array}{ccccc} V(\lambda_1) & \oplus \ldots \oplus & V(\lambda_k) & = & \mathbb{C}^n \\ \cap & & \cap & & \\ V'(\lambda_1) & \oplus \ldots \oplus & V'(\lambda_k) & = & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Gli autospazi generalizzati sono della forma:

$$\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i \mathrm{Id})^r$$

ove r è l'esponente del fattore $(A - \lambda \mathrm{Id})$ in $q_A(x)$ (polinomio minimo). Essi godono delle seguenti proprietà:

- sono in posizione di somma diretta;
- la somma diretta genera $\mathbb{C}^n$, dunque $\forall\, i = 1, \ldots, k : \dim V'(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$;
- sono autospazi f-invarianti, dunque si può considerare le restrizioni di f ad ogni $V'(\lambda_i)$;
- si ha che $\mathrm{Sp}\, A|_{V'(\lambda_i)} = \{\lambda_i\}$.

Se io considero la funzione $h = \mathcal{A} - \lambda Id$ (funzione nilpotente associata), si ha:

$$Sp^{\mathcal{A} - \lambda_i Id}|_{V'(\lambda_i)} = \{0\}$$

<u>Dunque</u>:

$$\forall\, i = 1 \dots k : \quad Ker(\mathcal{A} - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)} = Ker(\mathcal{A} - \lambda_i Id)^{i}$$

ESERCIZI VARI

1. Determinare la forma di Jordan e una base di Jordan per la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M(5, \mathbb{C})$$

Si ha:

$$p_A(x) = (1-x)^2(-x)\left[(-1-x)(1-x)+1\right] =$$
$$= (1-x)^2(-x)\left[\cancel{-1} + x^2 \cancel{+1}\right] = -(1-x)^2 x^3$$

Dunque:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \mu_a(\lambda_1) = 3$$
$$\lambda_2 = 1 \qquad \mu_a(\lambda_2) = 2$$

Calcoliamo dim $V(0)$ e dim $V(1)$:

$$\text{rk}\, A = \text{rk} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow \dim V(0) = 1$$

$$\text{rk}(A - Id) = \text{rk} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow \dim V(1) = 1$$

A ovviamente non è diagonalizzabile. Si ha:

$$\text{Ker}\, A = \text{Span}(e_2 - e_5) \qquad \text{Ker}(A - Id) = \text{Span}(e_2)$$

Calcoliamo A^2 e $(A - Id)^2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A - Id)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Analizziamo dapprima $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id})^2$. Ovviamente:

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id})^2 = 2$$

Certamente $e_2 \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id})^2$. Completiamo facilmente a base:

$$\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Span}\,(e_2\,,\, e_4 + e_5)$$

Prima di continuare notiamo che la forma di Jordan poteva già essere completamente determinata. Infatti:

- $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1 \Rightarrow 1$ blocco relativo a 0;
- $\dim \mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id}) = 1 \Rightarrow 1$ blocco relativo a 1.

Dunque necessariamente:

$$J_A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ciò ci porta a prevedere che l'indice di nilpotenza del primo blocco è 3, perciò:

$$\dim \mathrm{Ker}\, A^2 = 2$$

Completiamo $\{e_2 - e_5\}$ a base di $\mathrm{Ker}\, A^2$:

$$\mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Span}\,(e_2 - e_5\,,\, e_3 - e_1)$$

Calcoliamo A^3 e completiamo $\{e_2 - e_5\,,\, e_3 - e_1\}$ a base di $\mathrm{Ker}\, A^3$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\, A^3 = \mathrm{Span}\,(e_2 - e_5\,,\, e_1 - e_3\,,\, e_1\,)$$

Costruiamo allora la base:

$\operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus U_3$

$U_3 = \operatorname{Span}(e_1)$

$A e_1 = e_3 - e_1$

$\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A \oplus U_2$

$U_2 = \operatorname{Span}(e_3 - e_1)$

$A^2 e_1 = A(e_3 - e_1) = -\cancel{e_1} + e_2 + \cancel{e_3} +$
$- e_5 + \cancel{e_1} - \cancel{e_3} = e_2 - e_5$

$\operatorname{Ker}(A - Id)^2 = \operatorname{Ker}(A - Id) \oplus W_2$

$W_2 = \operatorname{Span}(e_4 + e_5)$

$(A - Id)(e_4 + e_5) = -e_2$

$$\begin{array}{ccc} e_1 & & \\ \downarrow & & \\ A e_1 = e_3 - e_1 & & e_4 + e_5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^2 e_1 = e_2 - e_5 & & (A - Id)(e_4 + e_5) = -e_2 \end{array}$$

Allora una base di Jordan per A è:

$$\mathcal{B}_J = \{ e_2 - e_5 , e_3 - e_1 , e_1 , -e_2 , e_4 + e_5 \}$$

BASI CICLICHE E POLINOMI MINIMI

Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$.

Consideriamo la seguente stringa di vettori:

$$\{v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v\}$$

Per definizione, se quei vettori sono linearmente indipendenti, allora $\mathcal{B} = \{v, Av, \dots A^{n-1}v\}$ è una BASE CICLICA di $\mathbb{C}^n$ per A.

Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & * \\ 0 & & & 1 & * \end{bmatrix} = C_f$$

Riconosciamo la matrice compagna di un generico polinomio monico f. Perciò, dato che $A \sim C_f$:

$$p_{C_f}(x) = p_A(x) = \pm f$$

Se ho una matrice compagna, dunque, la base canonica è una base ciclica.

LEMMA

Supponiamo che $v, Av, \dots A^{r-1}v$ siano vettori linearmente indipendenti, con $r \leq n$.

Allora $\deg q_A \geq r$.

Dim. Per definizione:

$$I(A) = \{g \in \mathbb{K}[x] \mid g(A) = 0\} = \langle q_A \rangle$$

Consideriamo $g \in \mathbb{K}[x]$, $\deg g \leq r-1$, $g(A) = 0$. Dato che:

$$0 = g(A) = b_0 + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_{r-1} A^{r-1}$$

Allora:

$$0 = g(A)v = b_0 v + b_1 Av + b_2 A^2 v + \dots + b_{r-1} A^{r-1} v$$

Dato che quei vettori sono linearmente indipendenti:

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{r-1} = 0 \Rightarrow g = 0$$

Dunque la Tesi:

$$\deg q_A \geq r \quad , \text{c.v.d.}$$

TEOREMA

Sia A una matrice dotata di una base ciclica.

Allora:

$$q_A = \pm p_A$$

Dim.

Dal lemma precedente si ha immediatamente:

$$\deg q_A \geq n$$

Inoltre:

$$q_A \mid p_A \Rightarrow \deg q_A \leq \deg p_A = n$$

Allora $\deg q_A = n$. Dunque la Tesi:

$$q_A = \pm p_A \quad , \text{c.v.d.}$$

Consideriamo ora un blocco di Jordan di taglia n relativo all'autovalore λ:

$$J(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Analizziamo e_n:

- $J e_n = \lambda e_n + e_{n-1}$
- $J^2 e_n = \lambda^2 e_n + 2\lambda e_{n-1} + e_{n-2}$
- ...
- $J^k e_n = \lambda^k e_n + \dots$

Nella base canonica, questa lista di vettori si rappresenta con:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} & 0 & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & \\ & 1 & 2\lambda & * \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}$ è chiaramente invertibile, dunque:

$$\mathcal{B} = \{ e_n, Je_n, J^2 e_n, \dots J^{n-1} e_n \}$$

è una base ciclica di $J(\lambda, n)$.

Dunque anche per i blocchi di Jordan esiste una base ciclica. Infatti:

$$q_J = \pm p_J = \pm (x - \lambda)^n$$

Consideriamo, infine, una matrice "a blocchi":

$$A = \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & K \end{array} \right],$$

con $H \in \mathcal{M}(r, \mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}(n-r, \mathbb{C})$, con H, K tali che $p_H(x) = q_H(x)$, $p_K(x) = q_K(x)$, $(p_H, p_K) = 1$.

Anche in questo caso si ha $p_A(x) = \pm q_A(x)$. Infatti:

- $p_A(x) = p_H(x) \cdot p_K(x)$;
- $q_A(x) = m.c.m.(q_H(x), q_K(x)) = m.c.m.(p_H(x), p_K(x)) = p_H(x) \cdot p_K(x)$.

Una matrice in forma canonica di Jordan tale che per ogni autovalore si è un blocco solo verifica queste proprietà.

La questione, però, verrà analizzata più avanti.

ESERCIZI VARI

1. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2z-t=0,\ 2x-y+3z=0,\ x-2y+3t=0\}$$

1) Calcolare la dimensione di W e determinarne una base.

2) Sia $v = (3,1,0,1)$. Verificare che:

$$E = \{ f \in End(\mathbb{R}^4) \mid W \subseteq Ker\, f,\ v \text{ è autovettore per } f \}$$

è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^4)$, e calcolarne la dimensione.

1) Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x+2z-t=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x-2y+3t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2z+t \\ -4z+2t+3z = 2t-z = y \\ \cancel{-2z}+\cancel{t}-\cancel{4t}+\cancel{2z}+\cancel{3t}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2z+t \\ y = 2t-z \\ 0=0 \end{cases}$$

Allora:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -2z+t \\ 2t-z \\ z \\ t \end{bmatrix} \,\middle|\, t,z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dunque W ha dimensione 2.

2)
- $0 \in E$, poiché $W \subseteq V = Ker\, 0$ e $v \to 0 \cdot v$, dunque v è autovettore per 0 relativo all'autovalore 0;
- Notiamo che:
- $Ker\, \lambda a = \{ v \in V \ni (\lambda a)v = \lambda \cdot a(v) = 0 \Rightarrow a(v)=0 \} = Ker\, a$;
- $a(v) = \alpha v \Rightarrow (\lambda a)v = \lambda a(v) = (\lambda\alpha)v$

Dunque:

$a \in E \Rightarrow Ker\, a \supseteq W,\ v \to \alpha v \Rightarrow Ker\, \lambda a \supseteq W,\ v \to (\lambda\alpha)v \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda a) \in E$;

- $a, b \in E \Rightarrow (a+b)v = \alpha v + \beta v = (\alpha+\beta)v$; $\forall\, w \in W: a(w)=0$, $b(w)=0 \Rightarrow \forall\, w \in W: (a+b)(w)=0 \Rightarrow W \subseteq Ker\,(a+b) \Rightarrow a+b \in E$.

Per calcolare $\dim E$, consideriamo la seguente base completata a piacere:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Si Ra :

$$ {}^{t}M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} $$

Dunque evidentemente $\dim E = 5$.

RIEPILOGO E OBIETTIVI

La forma normale di Jordan è stata finora analizzata per endomorfismi triangolabili.

Riepilogando, data $f \in \mathcal{T}(V)$, abbiamo una serie di invarianti, tra cui i più importanti sono:

- $p_f(x)$, completamente fattorizzabile;
- $q_f(x)$, completamente fattorizzabile perché divisore di $p_f(x)$;
- $\forall \lambda \in Sp\, f$: $\mu_a(\lambda)$, $\mu_g(\lambda) = \dim V_\lambda$, r_λ (indice di nilpotenza);
- $\forall \lambda \in Sp\, f$: $(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_{r_\lambda}(\lambda) = \mu_a(\lambda))$.

Abbiamo poi enunciato il teorema di esistenza e unicità della forma canonica di Jordan per endomorfismi triangolabili.

Esso afferma che, data $f \in \mathcal{T}(V)$:

- (esistenza) $\exists\, \mathcal{B}$ (detta "di Jordan per f") $\ni M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è in "forma normale di Jordan", ossia è una matrice diagonale a blocchi, e ogni blocco è di Jordan del tipo $J(s, \lambda)$, per qualche $\lambda \in Sp\, f$;
- (unicità) a meno di permutazioni dei blocchi, la forma canonica di Jordan è unica.

La forma canonica di Jordan, univocamente determinata dal sistema di invarianti descritto sopra, costituisce quindi un sistema di invarianti COMPLETO.

Il nostro obiettivo, ora, è quello di estendere tutto ciò al caso di endomorfismi non triangolabili. È chiaro che se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora ogni endomorfismo è triangolabile. Se invece ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (o comunque $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso), allora $\mathcal{T}(V) \subsetneq End(V)$; il nostro studio, ora, si concentrerà su questo caso.

COMPLESSIFICAZIONE

Per i nostri scopi, un'idea è quella di "immergere" l'algebra lineare su $\mathbb{R}$ in quella su $\mathbb{C}$, per poi trarre conclusioni che abbiano delle "ricadute" negli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Introdurremo quindi i concetti di SPAZIO VETTORIALE COMPLESSIFICATO ed ENDOMORFISMO COMPLESSIFICATO.

$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$
V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale	$\rightarrow$	$V_{\mathbb{C}}$ spazio vettoriale complessificato (su $\mathbb{C}$)
$f: Hom(V, W)$ omomorfismo tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali	$\rightarrow$	$f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$ applicazione lineare complessificata

SPAZI VETTORIALI COMPLESSIFICATI

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Consideriamo $V \times V = V^2$:

$$V \times V$$
$$(v, w)$$

ora, ogni elemento $z \in V \times V$, $z = (v, w)$ lo consideriamo in questo modo:

$$z = v + iw \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

Definiamo allora le operazioni SOMMA e PRODOTTO PER SCALARE COMPLESSO ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = x + iy$):

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \overset{def}{=} (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$v_1 + iw_1 + v_2 + iw_2 = (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)$$

$$\alpha(v, w) = (x, y)(v, w) \overset{def}{=} (xv - yw, xw + yv)$$
$$(x + iy)(v + iw) = xv - yw + i(xw + yv)$$

Dimostriamo ora che V^2 è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, con le operazioni così definite, dando per postulato l'esistenza di $V_{\mathbb{R}}$:

- $\forall z \in V^2 : 1 \cdot z = (1 + 0 \cdot i)(v + iw) = v + iw = z$;
- $\forall z \in V^2 : (\alpha \cdot \beta) z = \alpha(\beta z)$. Infatti:
  - $[(a+ib)(c+id)](v+iw) = [(ac - bd) + i(ad + bc)](v + iw) =$
    $= (acv - bdv - adw - bcw) + i(adv + bcv + acw - bdw)$;
  - $(a+ib)[(c+id)(v+iw)] = (a+ib)[(cv - dw) + i(cw + dv)] =$
    $= (acv - adw - bcw - bdv) + i(bcv - bdw + acw + adv)$;
- $\forall z, t \in V^2 : \alpha(v + t) = \alpha v + \alpha t$. Infatti:
  - $(a+ib)[(v+iw) + (j+ie)] = (a+ib)((v+j) + i(w+e)) = (av + aj - bw - be) +$
    $+ i(bv + bj + aw + ae)$;
  - $(a+ib)(v+iw) + (a+ib)(j+ie) = ((av - bw) + i(bv + aw)) + ((aj - be) +$
    $+ i(ae + bj)) = ((av + aj - bw - be) + i(bv + aw + ae + aj))$;
- $\forall z \in V^2 : (\alpha + \beta) z = \alpha z + \beta z$. Infatti:
  - $[(a+ib) + (c+id)](v+iw) = [(a+c) + i(b+d)](v+iw) = (av + cv - bw - dw) +$
    $+ i(aw + cw + bv + dv)$;
  - $(a+ib)(v+iw) + (c+id)(v+iw) = [(av - bw) + i(aw + bv)] + [(cv - dw) +$
    $+ i(cw + dv)]$

La struttura $(V^2, +, \cdot)$ è dunque un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Per definizione, ponendo $V^2 = V_{\mathbb{C}}$, la struttura $(V_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ prende il nome di spazio complessificato o COMPLESSIFICAZIONE di V.

Ogni vettore di $V_{\mathbb{C}}$ è esprimibile in modo unico in questo modo:

$$z = a + ib, \quad a, b \in V$$

In particolare a e b sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di z ($\mathrm{Re}\, z$ e $\mathrm{Im}\, z$).

Un vettore si definisce REALE se $\mathrm{Im}\, z = 0$; IMMAGINARIO PURO se $\mathrm{Re}\, z = 0$.

Notiamo che $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$. Infatti V è l'insieme dei vettori reali di $V_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V_{\mathbb{C}} \\ v &\longmapsto (v, 0) = v + i \cdot 0 \end{aligned}$$

Notiamo anche che $iV = \{ iv \mid v \in V \} \cong V$, dato che tra i due spazi vige l'isomorfismo che manda $v \in V$ in $iv \in iV$.

Prendiamo in considerazione V e iV. Si ha:

- $\forall z \in V_{\mathbb{C}}: z = a + ib = a + 0 + 0 + ib \Rightarrow$
  $\Rightarrow z = (a, 0) + (0, b), \ (a, 0) \in V, \ (0, b) \in iV$;
- $V \cap iV = \{ v \in V_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Re}\, v = \mathrm{Im}\, v = 0 \} = \{0\}$.

Perciò:

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$$

Dunque $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n = 2 \dim_{\mathbb{R}} V$, se V è finitamente generato. Dimostriamo che $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$, allora $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$.

Dim.

Consideriamo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$, $i\mathcal{B} = \{iv_1, \dots, iv_n\}$ di $iV_{\mathbb{C}}$.

Sia $v \in V_{\mathbb{C}}$ allora:

$$v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, \quad k_i \in \mathbb{C} \ \forall i = 1 \dots n$$

$$v = \mathrm{Re}\, k_1 v_1 + \dots + \mathrm{Re}\, k_n v_n + \mathrm{Im}\, k_1 iv_1 + \dots \mathrm{Im}\, k_n iv_n,$$

dunque $\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ genera $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{R}$.

Inoltre:

$$0 = k_1 v_1 + \dots + k_m v_m, \quad k_i \in \mathbb{C}$$

$$0 = \operatorname{Re} k_1 v_1 + \dots \operatorname{Re} k_m v_m + i(\operatorname{Im} k_1 v_1 + \dots + \operatorname{Im} k_m v_m)$$

Sfruttando la nozione di base di $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$:

$$k_1 = k_2 = \dots k_m = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} k_1 = \operatorname{Re} k_2 = \dots = \operatorname{Re} k_m = 0, \ \operatorname{Im} k_1 = \dots = \operatorname{Im} k_m = 0,$$

dunque i vettori di $\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ sono anche linearmente indipendenti.

Allora, se $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$, c.v.d.

COROLLARIO

Come immediato corollario:

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V$$

Infatti, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V su $\mathbb{R}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base di $V_{\mathbb{C}}$ (detta BASE REALE).

Dim.

- $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori, infatti:

  $\forall\, v + iw = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i \in V_{\mathbb{C}}, \ \alpha_i \in \mathbb{C}$:

  - $v = \sum_{i=1}^{3} a_i v_i, \ a_i \in \mathbb{R}$;
  - $iw = i \sum_{i=1}^{3} b_i v_i, \ b_i \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{B}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 0, \ \alpha_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} (a_i + ib_i) v_i = 0, \ a_i, b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i v_i = 0, \ \sum_{i=1}^{3} b_i v_i = 0$$

Per ipotesi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \\ b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = 0 \Rightarrow b_1 = \dots = b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0, \text{ c.v.d.}$$

Ogni base di V, pertanto, è una base reale di $V_{\mathbb{C}}$.

Per concludere, con riferimento alla relazione di coniugio in $\mathbb{C}$:

$$c : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$
$$(v, w) \longrightarrow (v, -w)$$
$$z = v + iw \longrightarrow v + i(-w) = v - iw = \bar{z}$$

si ha che $(V, +, \cdot)$ è l'insieme dei punti fissi di c, ossia la PARTE REALE di $V_{\mathbb{C}}$:

$$V = \{ z \in V_{\mathbb{C}} \mid \bar{z} = z \}$$

(Infine, si ricordi che c è un'involuzione: $\bar{\bar{z}} = z$).

OMOMORFISMI COMPLESSIFICATI

Consideriamo $f \in Hom(V, W)$, ove V e W sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali:

$$f : V \longrightarrow W$$

Nel cercare di determinare $f_{\mathbb{C}}$, consideriamo il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{C}}} & W_{\mathbb{C}} \end{array}$$

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow W_{\mathbb{C}}$$

Una naturale richiesta da porre è la seguente:

$$f_{\mathbb{C}}|_V = f$$

Allora l'omomorfismo complessificato $f_{\mathbb{C}}$ di f è necessariamente quello così definito:

$$f_{\mathbb{C}}(v, w) \overset{def.}{=} (f(v), f(w))$$
$$f_{\mathbb{C}}(v + iw) \overset{def.}{=} f(v) + i(f(w))$$

Dimostriamo ora che la seguente definizione è compatibile con la composizione di funzioni:

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$$

Dim. Sia $z \in V_{\mathbb{C}}$. Siano $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$, $g_{\mathbb{C}} : W_{\mathbb{C}} \to Z_{\mathbb{C}}$.

Allora:

$$g_{\mathbb{C}}(f_{\mathbb{C}}(v, w)) = g_{\mathbb{C}}(f(v), f(w)) = (g(f(v)), g(f(w))) =$$
$$= ((g \circ f)v, (g \circ f)w)$$

Se consideriamo invece $g \circ f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to Z_{\mathbb{C}}$, si ha:

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}}(v, w) = ((g \circ f)v, (g \circ f)w)$$

Allora $(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$, c.v.d.

Sia ora V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $V_{\mathbb{C}}$ il suo complessificato.
Sia $f \in End(V)$, sia $f_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$ l'applicazione complessificata.
Sia $\mathcal{B}$ una base di V, dunque una "base reale" di $V_{\mathbb{C}}$.
Allora:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[f(v_1) \middle| f(v_2) \middle| \dots \middle| f(v_n) \right]$$

Analizzando $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = A_{\mathbb{C}}$, essa è costruita nella stessa maniera. Ma $f_{\mathbb{C}}|_V = f$, dunque:

$$A_{\mathbb{C}} = A$$

In particolare:

$$A \in M(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} \in M(n, \mathbb{R})$$

PRIME CONSEGUENZE

Senza perdere di generalità, consideriamo gli spazi standard. Consideriamo il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}^n \arrow[d, hook] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Una prima conseguenza è la seguente:

$$p_f(x) = p_{f_\mathbb{C}}(x) = p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Poiché $f_\mathbb{C}$ è triangolabile in $\mathbb{C}$ (ovvio):

$$p_{f_\mathbb{C}}(x) \in I(f_\mathbb{C})$$

$$\Downarrow$$

$$p_{f_\mathbb{C}}(f_\mathbb{C}) = 0$$

Restringendosi alla parte reale, si ha:

$$p_f(f) = 0 \Rightarrow p_f(x) \in I(f)$$

Dunque anche se $f \notin T(V)$, si ha $p_f(x) \in I(f)$.

FORMA NORMALE DI JORDAN REALE

Prima di introdurre l'argomento, dimostriamo un lemma preliminare.

LEMMA

Sia $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in \mathbb{R}[x]$. Allora, preso $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\alpha \text{ è radice di } P(x) \Leftrightarrow \bar{\alpha} \text{ è radice di } P(x)$$

Dim.

Supponiamo di aver dimostrato una implicazione: allora l'altra è automaticamente dimostrata, visto che $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Per ipotesi, dunque:

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_m \alpha^m = 0$$

Allora:

$$\overline{P(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_m \alpha^m} = \bar{0} = 0$$

Ma per come è definita la funzione coniugio ($c \in End(V)$) unito al fatto che il coniugio lascia fissi vettori reali:

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \dots + \bar{a}_m \bar{\alpha}^m = 0$$

$$a_0 + a_1 \bar{\alpha} + \dots + a_m \bar{\alpha}^m = 0$$

Ma questo è proprio $P(\bar{\alpha})$: $P(\bar{\alpha}) = 0$, c.v.d.

Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale finitamente generato, sia esso V, consideriamo $f \in End(V)$ e il suo complessificato $f_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$.

Per quanto già visto, $P_f(x) = P_{f_{\mathbb{C}}}(x)$. Allora se:

$$Sp.\ f = \{\lambda_1 \dots \lambda_r, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots \alpha_k \bar{\alpha}_k\},$$

dove i λ_i sono autovalori reali e gli α_i sono autovalori propriamente complessi, si ha:

- in $\mathbb{C}$:

$$P_{f_{\mathbb{C}}}(x) = \pm \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} \cdot \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{\mu_a(\alpha_j)} (x - \bar{\alpha}_j)^{\mu_a(\alpha_j)}$$

- in $\mathbb{R}$ (dato che i fattori lineari relativi ad autovalori complessi coniugati generano fattori di secondo grado irriducibili):

$$P_f(x) = \pm \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} \cdot \prod_{j=1}^{k} (x^2 - (\alpha_j + \bar{\alpha}_j)x + \alpha_j \bar{\alpha}_j)^{\mu_a(\alpha_j)}$$

DECOMPOSIZIONI PRIMARIE

Con le stesse notazioni di prima, dato $f \in \mathrm{End}(V)$ e il suo complessificato $f_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$, si ha:

- $P_{f_{\mathbb{C}}}(x) = P_f(x) \in \mathbb{R}[x]$;
- $\mathrm{Sp}\, f = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_k \}$;
- $P_{f_{\mathbb{C}}}(x) = \pm \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} \cdot \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{\mu_a(\alpha_j)} (x - \bar{\alpha}_j)^{\mu_a(\alpha_j)}$

Per comodità, sia $Q_\alpha(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = (x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha})$.

Allora:

$$P_f(x) = \pm \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} \cdot \prod_{j=1}^{k} Q_{\alpha_j}(x)^{\mu_a(\alpha_j)}$$

DECOMPOSIZIONE PRIMARIA DI $V_{\mathbb{C}}$ RISPETTO A $f_{\mathbb{C}}$

Si ha, in modo abbastanza naturale:

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \left[\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j \mathrm{Id})^{\mu_a(\alpha_j)} \oplus \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_j \mathrm{Id})^{\mu_a(\alpha_j)} \right]$$

DECOMPOSIZIONE PRIMARIA DI V RISPETTO A f

In questo caso, in maniera simile:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(Q_{\alpha_j}(f))^{\mu_a(\alpha_j)}.$$

I fattori diretti legati agli autovalori reali sono più semplici da trattare. Infatti:

$\forall \lambda_i,\ i = 1 \dots r$: $\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} = \left(\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} \right)_{\mathbb{C}}$

Dim.

$\forall (v, w) \in \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)}$: $(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)}(v, w) =$
$= ((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} v, (f - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} w) = (0, 0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (v, w) \in \left(\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} \right)_{\mathbb{C}}$

$\forall (v, w) \in \left(\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} \right)_{\mathbb{C}}$: $((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} v, (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)} w) =$
$= (f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)}(v, w) = (0, 0) = 0 \Rightarrow (v, w) \in \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)}$

Dunque la tesi, c.v.d.

Allora, per quanto dimostrato in precedenza, la parte reale è inclusa:

$\forall i = 1 \dots r$: $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} \subseteq \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_a(\lambda_i)}$

Una base di Jordan per $f|_{Ker(f-\lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}}$, dunque, è una base di Jordan anche per $f_{\mathbb{C}}|_{Ker(f_{\mathbb{C}}-\lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}}$.

Per quanto riguarda invece i fattori diretti legati agli autovalori cosiddetti "propriamente complessi", si ha:

$$\forall j=1\ldots k: Ker(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)} \oplus Ker(f_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)} =$$
$$= Ker(Q_{\alpha_j}(f_{\mathbb{C}}))^{\mu_a(\alpha_j)}$$

E per quanto appena dimostrato:

$$Ker(Q_{\alpha_j}(f_{\mathbb{C}}))^{\mu_a(\alpha_j)} = \left(Ker(Q_{\alpha_j}(f))^{\mu_a(\alpha_j)}\right)_{\mathbb{C}}$$

Dunque:

$$Ker\left(Q_{\alpha_j}(f)^{\mu_a(\alpha_j)}\right) \subseteq Ker\left(Q_{\alpha_j}(f_{\mathbb{C}})^{\mu_a(\alpha_j)}\right)$$

Dimostriamo ora un altro lemma.

LEMMA

Si ha, per $\alpha_j \in Sp\, f$, $\alpha_j \notin \mathbb{R}$:

$$\overline{Ker(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}} = Ker(f_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}$$

Dim.

Dimostrata un'inclusione, l'altra è automaticamente dimostrata, visto che $\bar{\bar{z}} = z$.

Dimostriamo dunque la seguente implicazione:

$$v \in Ker(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)} \Rightarrow \bar{v} \in Ker(f_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}$$

Sfruttando le proprietà del coniugio:

$$(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}(v) = 0 \Rightarrow \overline{(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}(v)} = \bar{0} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{(f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}}(\bar{v}) = 0 \Rightarrow (\overline{f_{\mathbb{C}}-\alpha_j Id})^{\mu_a(\alpha_j)}(\bar{v}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\bar{f}_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j \overline{Id})^{\mu_a(\alpha_j)}(\bar{v}) = 0$$

Dato che $f_{\mathbb{C}}$ e Id sono identificate da matrici di $M(n,\mathbb{R})$ il coniugio le manda in sé:

$$(f_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)}(\bar{v}) = 0 \Rightarrow \bar{v} \in Ker(f_{\mathbb{C}}-\bar{\alpha}_j Id)^{\mu_a(\alpha_j)},$$

c.v.d.

IDENTIFICAZIONE DELLA FORMA NORMALE

In base a quanto dimostrato nel lemma precedente, dato che $\alpha \neq \bar{\alpha}$ gli autospazi sono in somma diretta:

$$\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)} \oplus \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_j \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)} \leq V_{\mathbb{C}}$$

Questo addendo è invariante per il coniugio:

$$c: V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$
$$z \longmapsto \bar{z},$$

e manda vettori del primo dei due addendi nel secondo, e viceversa.

Consideriamo allora una base $\mathcal{B}$ di Jordan per $f_{\mathbb{C}}|_{\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)}}$:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$$

Allora $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k\}$ è una base di Jordan per $f_{\mathbb{C}}|_{\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_j \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)}}$.

A questo punto, uniamo le due basi, e per ogni coppia di vettori $v_i, \bar{v}_i$, consideriamo i seguenti vettori:

$$x_i = \frac{1}{2}(v_i + \bar{v}_i) \qquad y_i = \frac{1}{2i}(v_i - \bar{v}_i)$$

La stringa (di $2n$ vettori) ottenuta è una base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ di Jordan reale. Per dimostrarlo, dimostriamo ad esempio la lineare indipendenza, limitandoci a dimostrarla per x_i e y_i, dato che è sufficiente. Si ha:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}i = -\frac{1}{2}i \neq 0$$

Dunque:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$$

è una base di Jordan reale per $f|_{\mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j \mathrm{Id})^{m_j} \oplus \mathrm{Ker}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_j \mathrm{Id})^{m_j}}$.

La corrispondente matrice rappresentativa è detta "in forma di Jordan reale".

Ricapitolando, dato $f \in \mathrm{End}(V)$, si ha:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\, \mathrm{Id})^{ma(\lambda_i)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \left(Q_{\alpha_j}(f)\right)^{ma(\alpha_j)}$$

Una base di Jordan reale per V rispetto a f, dunque, è un'usuale base di Jordan per i primi vettori, unita a $\{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$, ottenuta con la procedura prima descritta, a partire da basi di Jordan usuali della forma $\mathcal{B}_{\alpha_j}$, $\overline{\mathcal{B}_{\alpha_j}} = \mathcal{B}_{\overline{\alpha}_j}$, per il corrispondente blocco $\mathrm{Ker}\,(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j\, \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)} \oplus \mathrm{Ker}\,(f_{\mathbb{C}} - \overline{\alpha}_j\, \mathrm{Id})^{ma(\alpha_j)}$.

Partiamo perciò dalla forma di Jordan per $f_{\mathbb{C}}$. Indichiamola:

$$M_J(f_{\mathbb{C}}) = \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} J(s,\lambda) & \\ & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} J(r,\alpha) & 0 & \\ 0 & J(r,\overline{\alpha}) & \\ & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right]$$

La matrice è dunque divisa in due grandi blocchi: il primo dei due, relativo agli autovalori reali, è la forma canonica di Jordan così come l'abbiamo studiata per endomorfismi triangolabili; il secondo dei due, relativo agli autovalori non reali, è composto da coppie di blocchi della stessa taglia, relativi ad autovalori coniugati.

La forma di Jordan reale, dunque, è la seguente:

$$M^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(f) = \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} J(s,\lambda) & \\ & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} * & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \\ & * & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ & & * \end{matrix} \end{array}\right.$$

Si può notare che nella sovradiagonale vi sono blocchi del tipo I_2.

Nei blocchi sulla diagonale, quelli segnati con (*), vi sono i seguenti valori (si tenga presente che $\alpha = |\alpha| e^{i\vartheta}$):

$$\begin{bmatrix} |\alpha| \cos\vartheta & |\alpha| \sin\vartheta \\ -|\alpha| \sin\vartheta & |\alpha| \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$|\alpha| \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

A questo punto, un immediato corollario:

COROLLARIO

Date $f, g \in End(V)$

$$f \sim g \iff f_{\mathbb{C}} \sim g_{\mathbb{C}}$$

ANCORA SULLE BASI CICLICHE

Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- $p_A(x) = q_A(x)$;
- $\exists\ \mathcal{B}$ base ciclica di $\mathbb{C}^n$ per A.

Dim.

Una delle due implicazioni è stata già dimostrata:
$\exists\ \mathcal{B}$ ciclica di $\mathbb{C}^n$ per $A \Rightarrow v, Av, \dots, A^{n-1}v$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \deg q_A(x) \geq n$, $q_A(x) \mid p_A(x)$, $\deg p_A(x) = n \Rightarrow$
$\Rightarrow \deg q_A(x) = n \Rightarrow q_A(x) = \pm p_A(x)$.

Dimostriamo allora l'altra implicazione. Prima però apriamo una parentesi.

POLINOMIO MINIMO DI UN VETTORE

Data $A \in M(n, \mathbb{C})$, consideriamo:

$$I(A) = \{ g \in \mathbb{C}[x] \mid g(A) = 0 \} = \langle q_A \rangle$$

Dato $v \in \mathbb{C}^n$, definiamo:

$$I(A, v) \overset{\text{def}}{=} \{ g \in \mathbb{C}[x] \mid g(A)(v) = 0 \} = \langle q_v \rangle$$

Il generatore monico q_v di $I(A, v)$ è detto POLINOMIO MINIMO di v.

Ovviamente, dato che un polinomio $p \in I(A)$ si annulla in ogni vettore di $\mathbb{C}^n$:

$$I(A) \subseteq I(A, v)$$

Allora:

$$q_A \in I(A, v) = \langle q_v \rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q_v \mid q_A \quad \forall\, v \in \mathbb{C}^n$$

A questo punto, possiamo considerare il seguente insieme finito (poiché finiti sono i divisori di q_A):

$$\{ q_v \mid v \in \mathbb{C}^n \}$$
$$\{ q_{v_1}, q_{v_2}, \dots, q_{v_p} \}$$

Poniamo poi:

$\forall j = 1 \dots p : W_j = \mathrm{Ker}\,(q_{v_j}(A)) = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid q_{v_j}(A)(x) = 0 \}$

Esso è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$:

- $\forall j : 0 \in \mathrm{Ker}\,(q_{v_j}(A))$, dato che $q_{v_j}(A)(0) = 0$;
- $\forall v, w \in W_j : \lambda v + \mu w \in W_j$, dato che
$$q_{v_j}(A)(\lambda v + \mu w) = \lambda q_{v_j}(A) v + \mu q_{v_j}(A) w = 0 + 0 = 0.$$

Si ha un'uguaglianza fondamentale:
$$\mathbb{C}^n = \bigcup_{j=1}^{p} W_j$$

Infatti, per ogni vettore z di $\mathbb{C}^n$, z ha il polinomio minimo che rientra in quella lista, perciò $z \in \bigcup_{j=1}^{p} W_j$. L'altra inclusione è ovvia.

Ma quando l'unione di sottospazi è ancora un sottospazio? Ciò si ha se e solo se esiste uno spazio che li contiene tutti.

Da qui è importante risultato:

$\exists i_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathbb{C}^n = W_{i_0} \Rightarrow \mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, q_{v_{i_0}}(A) \Rightarrow q_{v_{i_0}} = q_A$

Per quanto appena visto:

$\exists v \in \mathbb{C}^n$ t.c. $q_v = q_A = p_A$ (l'ultima uguaglianza si ha per ipotesi).

Dunque i tre polinomi hanno lo stesso grado, pari cioè a n.

Analizziamo la stringa di n vettori $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$. Essi sono linearmente indipendenti. Infatti, consideriamo una combinazione nulla:
$$b_0 v + b_1 Av + \dots + b_{n-1} A^{n-1} v = 0$$

Consideriamo:
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

Per ipotesi $g(A)v = 0$, dunque:

$g(A) \in I(A, v) = \langle q_v \rangle \Rightarrow q_v \mid g$

Dato che $\deg q_v = n$, $\deg g \le n-1$, si ha $g = 0 \Rightarrow b_i = 0 \ \forall i$.

Equivalentemente, sia $g(A)v = 0$, $g \neq 0$.
Allora v annullerebbe nell'ideale ad esso associato un polinomio di grado $\leq n-1$. Ciò è assurdo, visto che $I(A,v) = \langle q_v \rangle$, $\deg q_v = n$. Allora $g = 0$.

Dunque $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$ è una base ciclica di $\mathbb{C}^n$ per A, c.v.d.

Il teorema dimostra che, data $A \in M(n, \mathbb{C})$ tale che $p_A(x) = \pm q_A(x)$, esiste una base ciclica di $\mathbb{C}^n$ per A.
Trovare esplicitamente il vettore che la genera non è banale; tuttavia, in alcuni casi è piuttosto semplice.

Ad esempio, sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ la matrice seguente:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} J(\lambda, n_1) & 0 \\ \hline 0 & J(\mu, n_2) \end{array}\right],$$

con $\lambda \neq \mu$ e $n_1 + n_2 = n$. Siano $J_1 = J(\lambda, n_1)$, $J_2 = J(\mu, n_2)$.
Sappiamo che:

$$p_{J_1} = q_{J_1} = \pm (x - \lambda)^{n_1}$$

$$p_{J_2} = q_{J_2} = \pm (x - \mu)^{n_2}$$

Sappiamo inoltre che:

- il vettore $e_{n_1} \in \mathbb{C}^{n_1}$ genera una base ciclica di $\mathbb{C}^{n_1}$ per J_1;
- il vettore $e_{n_2} \in \mathbb{C}^{n_2}$ genera una base ciclica di $\mathbb{C}^{n_2}$ per J_2.

Allora dimostriamo che il seguente vettore $v \in \mathbb{C}^n$ genera una base ciclica di $\mathbb{C}^n$ per A:

$$v = \left[\begin{array}{c} e_{n_1} \\ \hline e_{n_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right]$$

Un passo fondamentale della dimostrazione è quello di dimostrare che, preso $I(A,v) = \langle q_v \rangle$, si ha $\deg q_v = n$.

Consideriamo i seguenti polinomi:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots b_r x^r, \quad g \neq 0$$

$$g(A) = b_0 I + b_1 A + \dots b_r A^r$$

Sappiamo che:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right] \Rightarrow \forall r \in \mathbb{N} : A^r = \left[\begin{array}{c|c} J_1^r & 0 \\ \hline 0 & J_2^r \end{array}\right]$$

Dunque:

$$g(A) = \left[\begin{array}{c|c} b_0 I + b_1 J_1 + \dots b_r J_1^r & 0 \\ \hline 0 & b_0 I + b_1 J_2 + \dots + b_r J_2^r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} g(J_1) & 0 \\ \hline 0 & g(J_2) \end{array}\right]$$

Per ipotesi $g(A)v = 0$. Dunque:

$$\begin{cases} g(J_1)v = 0 \\ g(J_2)v = 0 \end{cases}$$

Più precisamente:

$$0 = \left[\begin{array}{c|c} g(J_1) & 0 \\ \hline 0 & g(J_2) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} e_{m_1} \\ \hline e_{m_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} g(J_1) e_{m_1} \\ \hline g(J_2) e_{m_2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} g(J_1) e_{m_1} = 0 \\ g(J_2) e_{m_2} = 0 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} g \in I(J_1, e_{m_1}) = \langle (x-\lambda)^{m_1} \rangle \\ g \in I(J_2, e_{m_2}) = \langle (x-\mu)^{m_2} \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-\lambda)^{m_1} \mid g \\ (x-\mu)^{m_2} \mid g \end{cases}$$

Dato che $g \neq 0$ e $((x-\lambda)^{m_1}, (x-\mu)^{m_2}) = 1$:

$$(x-\lambda)^{m_1}(x-\mu)^{m_2} \mid g \Rightarrow \deg g \geq n.$$

Se dunque ogni polinomio di $I(A, v)$ ha grado non minore di n, il generatore di $I(A, v)$, sia esso q_v, ha grado non minore di n. Ma $q_v \mid q_A$, con $\deg q_A = n$ per ipotesi. Allora necessariamente $\deg q_v = n$, da cui $q_v = \pm q_A = \pm p_A$. Per quanto dimostrato, allora, la seguente è una base ciclica di $\mathbb{C}^n$ per A:

$$\mathcal{B} = \{ v, Av, \dots A^{n-1} v \}, \text{ c.v.d.}$$

Volendo generalizzare, data $A \in M(n, \mathbb{C})$ in forma di Jordan, si ha che:

$$p_A(x) = q_A(x) \Leftrightarrow \forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j,$$

ossia se e solo se ogni blocco di Jordan è relativo ad un autovalore differente.

Se così non fosse, infatti, si avrebbe $\deg p_A(x) = n$, $\deg q_A(x) < n$, da cui $p_A \neq q_A$.

Dunque, se:

$$A = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, s_1) & & & 0 \\ & J(\lambda_2, s_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_k, s_k) \end{bmatrix},$$

il vettore che genera una base ciclica sarà allora:

$$v = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ e_{s_2} \\ \vdots \\ e_{s_k} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow s_1 \\ \\ \vdots \\ \leftarrow s_1 + \dots + s_k = n \end{array} \in \mathbb{C}^n$$

ESERCIZI E OSSERVAZIONI

1. Sia $f \in End(\mathbb{C}^n)$; siano $\lambda_1 \dots \lambda_k$ gli autovalori distinti di f; sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$. Allora:

$$W \text{ è } f\text{-invariante} \Leftrightarrow W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$
$$\text{con } W_i \subseteq V'(\lambda_i),$$
$$W_i \ f\text{-invariante}$$

Dim.
La seconda implicazione è ovvia: se ogni addendo diretto è f-invariante, allora W è "a fortiori" f-invariante.
Dimostriamo dunque la prima implicazione. Per ipotesi, sia W f-invariante.
Sia:

$$q_f = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\dots(x-\lambda_k)^{m_k}, \ m_i \geq 1$$

Consideriamo $f|_W \in End(W)$. Certamente q_f calcolato su f (che annulla tutto $\mathbb{C}^n$) annulla tutto W, dunque:

$$q_f \in I(f|_W)$$
$$q_{f|_W} \mid q_f,$$

ove $I(f|_W) = \langle q_{f|_W} \rangle$.
Allora:

$$q_{f|_W} = (x-\lambda_1)^{h_1}(x-\lambda_2)^{h_2}\dots(x-\lambda_k)^{h_k},$$

con $0 \leq h_i \leq m_i \ \forall i = 1\dots k$. Si noti che in questo caso gli esponenti h_i possono essere anche nulli.

Per definizione, dunque:

$$W = Ker(f|_W - \lambda_1 Id)^{h_1} \oplus \dots \oplus Ker(f|_W - \lambda_k Id)^{h_k} =$$
$$= [W \cap Ker(f-\lambda_1 Id)^{h_1}] \oplus \dots \oplus [W \cap Ker(f-\lambda_k Id)^{h_k}]$$

Poniamo $W_i = [W \cap (Ker \ f - \lambda_i Id)^{h_i}]$. Dunque:

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

Inoltre, dato che $h_i \leq m_i$, si ha $W_i \subseteq V'(\lambda_i) = Ker(f-\lambda_i Id)^{m_i}$.
Infine, per il Teorema di decomposizione primaria, gli addendi diretti sono f-invarianti.

OSSERVAZIONE

A questo punto è immediato dimostrare che, se f è diagonalizzabile e W è f-invariante allora $f|_W$ è diagonalizzabile.

Dim.

f diagonalizzabile $\Rightarrow$ q_f è libero da quadrati, $q_{f|_W} \mid q_f$ $\Rightarrow$ $q_{f|_W}$ è libero da quadrati $\Rightarrow$ $f|_W$ è diagonalizzabile c.v.d.

4. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ non simili fra di loro, tali che $p_A = p_B$, $q_A = q_B$. Allora:

1) A e B non sono diagonalizzabili;

2) $n \geq 4$;

3) $p_A \neq q_A$.

1) Supponiamo che A sia diagonalizzabile. Allora:
A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ q_A è libero da quadrati $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ q_B è libero da quadrati $\Rightarrow$ B è diagonalizzabile

Ma se $p_A = p_B$, allora $A \sim B$, assurdo.
Dunque A e B non sono diagonalizzabili.

2) Anche in questo caso ragioniamo per assurdo. La filosofia di fondo è quella di dimostrare che due endomorfismi con quelle proprietà non possono esistere se $n < 4$ quasi per mancanza di spazio.

$n = 1$

A e B sono banalmente diagonalizzabili: per quanto dimostrato al punto 1, perciò, questo caso è da scartare.

$n = 2$

Necessariamente:

$$p_A = q_A = p_B = q_B = (x - \lambda)^2,$$

altrimenti si ricadrebbe nel caso diagonalizzabile.
La forma (comune) di Jordan di A e B, allora, è necessariamente la seguente:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

da cui $A \sim B$, assurdo. Anche questo caso è da scartare.

$n = 3$

Le possibilità sono 2:

$$p_A = p_B = \begin{cases} (x-\lambda)^2 (x-\mu) \\ (x-\lambda)^3 \end{cases}$$

Riguardo a $q_A = q_B$ i casi sono tre:

- $q_A = q_B = (x-\lambda)^2 (x-\mu)$.

  La forma (comune) di Jordan è necessariamente:

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mu \end{array}\right];$$

- $q_A = q_B = (x-\lambda)^2$

  La forma (comune) di Jordan è necessariamente:

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \lambda \end{array}\right];$$

- $q_A = q_B = (x-\lambda)^3$

  La forma (comune) di Jordan è necessariamente:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

In tutti i casi si ha $A \sim B$, assurdo. Dunque anche questo caso è da scartare.

Dunque $m \leq 2$.

3) Per assurdo, sia $p_A = p_B = q_A = q_B$.

Allora:

- $\exists$ $\mathcal{B}$ ciclica per $A \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) = C_{p_A}$, la matrice compagna del polinomio p_A;
- $\exists$ $\mathcal{D}$ ciclica per $B \Rightarrow M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(B) = C_{p_B}$, la matrice compagna del polinomio p_B.

Dato che $p_A = p_B$, si ha $C_{p_A} = C_{p_B}$.

Allora:

$$A \sim C_{p_A} = C_{p_B} \sim B \Rightarrow A \sim B, \text{ assurdo.}$$

3. Sia $J = J(\lambda, n)$ un blocco di Jordan. Calcolare $J(J^k)$, al variare di $k \in \mathbb{N}$.

Innanzitutto, notiamo che:

- $\lambda \neq 0 \Rightarrow J$ è invertibile $\Rightarrow J^k$ è invertibile $\forall\, k \in \mathbb{N}$;
- $\lambda = 0 \Rightarrow J$ è nilpotente.

Dunque, consideriamo $\lambda \neq 0$.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & * \\ & \lambda^k & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ 0 & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Dunque $\mathrm{Sp}\, J^k = \{\lambda^k\}$. Notiamo che:

$$\mathrm{rk}\,(J^k - \lambda^k I) = \mathrm{rk} \begin{bmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim V(J^k, \lambda^k) = 1$$

Quest'informazione equivale a dire che J^k è formata da un solo blocco. Dunque $J(J^k)$ è necessariamente:

$$J(J^k) = \begin{bmatrix} \lambda^k & 1 & & 0 \\ & \lambda^k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora $\lambda = 0$. Si ha:

$$[J(0, n)]^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \in M(n, K)$$

In particolare:

$f(e_1) = \dots = f(e_k) = 0$

$f(e_{k+1}) = e_1 \qquad f(e_{2k+1}) = e_{k+1} \dots$

$f(e_{k+2}) = e_2 \qquad f(e_{2k+2}) = e_{k+2} \dots$

$\dots$

Dunque, effettuiamo una semplice divisione intera:

$$n = qh + r$$

Il seguente riordinamento della base, ottenuto affiancando e ordinando i vettori della base canonica indicizzati con indici congrui modulo k fornisce una base di Jordan per J^k:

$$\mathcal{B} = \{ e_1, e_{k+1}, e_{2k+1} \dots e_2, e_{k+2} \dots e_3 \dots e_{qk+r} \}$$

Dunque, è evidente che $J(J^k)$ è formata da r blocchi di Jordan di autovalore 0 e taglia $(q+1)$, e i restanti $(k-r)$ blocchi di Jordan di taglia q, sempre di autovalore 0.

UN ESERCIZIO

1. Calcolare una base di Jordan reale per la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innanzitutto:

$$p_A(x) = (x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2$$

$$\mu_1 = i \qquad m_1 = 2$$
$$\mu_2 = \bar{i} = -i \qquad m_2 = 2$$

Analizziamo $\dim V(i)$ in $\mathbb{C}^4$:

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} = 3,$$ dato che $ie_3 + e_4 \in \operatorname{Ker}(A - iI)$ e il minore 3×3 in basso a sinistra ha $\det \neq 0$.

Dunque $\dim V(i) = 1$.

Abbiamo:

- $\{ie_3 + e_4\}$ base di $\operatorname{Ker}(A - iI)$;
- $\{ie_3 + e_4,\ ie_1 + e_2 + e_4\}$ base di $\operatorname{Ker}(A - iI)^2$.

Allora:

$$ie_1 + e_2 + e_4 = v_2$$
$$\downarrow$$
$$-e_3 + ie_4 = v_1$$

Dunque, dato che $\operatorname{Re} v_1 = -e_3$, $\operatorname{Im} v_1 = e_4$, $\operatorname{Re} v_2 = e_2 + e_4$ e $\operatorname{Im} v_2 = e_1$, la seguente è una base di Jordan reale per A:

$$\mathcal{B} = \{-e_3,\ e_4,\ e_2 + e_4,\ e_1\}$$

La forma di Jordan reale, dato che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, è:

$$J_{\mathbb{R}}(A) = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{I_2}} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ & & -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

PRODOTTI SCALARI

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Consideriamo le applicazioni del tipo:

$$\phi : V \times V \to \mathbb{K}$$

che siano bilineari.
Alcune di queste sono simmetriche, ossia:
$\forall\, v, w \in V : \phi(v,w) = \phi(w,v)$

Alcune di queste sono antisimmetriche, o alternanti, ossia:
$\forall\, v, w \in V : \phi(v,w) = -\phi(w,v)$

Un'applicazione $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica è detta PRODOTTO SCALARE. La seguente struttura:

$$(V, \phi)$$

indica un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale arricchito di un prodotto scalare. La notazione che indica $\phi(v,w)$ è $\langle v, w \rangle$.
Altre proprietà di cui gode un prodotto scalare sono le seguenti:

- $\forall (v,w) \in V \times V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;
- $\forall (v,w) \in V \times V,\ \forall k \in \mathbb{K} : k\langle v, w \rangle = \langle kv, w \rangle = \langle v, kw \rangle$;
- $\forall (v,w,z) \in V \times V \times V : \langle v+z, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle z, w \rangle$;
- $\forall (v,w,z) \in V \times V \times V : \langle v, w+z \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, z \rangle$.

Un'altra nota degna di rilievo è che, dato V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, l'insieme delle forme bilineari $Bil(V)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, e gli insiemi delle forme simmetriche e alternanti, rispettivamente $Sym(V)$ e $Alt(V)$, sono suoi sottospazi.

Le operazioni sono così definite:

- $(\phi + \psi)(v,w) = \phi(v,w) + \psi(v,w)$;
- $(\lambda \phi)(v,w) = \lambda \cdot \phi(v,w)$.

PRODOTTO SCALARE STANDARD SU $\mathbb{R}^2$

Sia $V = \mathbb{R}^2$.

Definiamo ora il PRODOTTO SCALARE STANDARD SU $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \langle v , w \rangle \overset{def}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Che quest'applicazione sia simmetrica, è un ovvietà.
Anche la bilinearità è abbastanza semplice da dimostrare. Se ad esempio fissiamo v, e facciamo variare w moltiplicandolo per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\phi(v, w+z) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2 = \phi(v, w) + \phi(v, z);$$

$$\phi(v, \lambda w) = a_1 \lambda b_1 + a_2 \lambda b_2 = \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2) = \lambda \phi(v, w),$$

e la bilinearità è dimostrata.

Ex. La distanza di un punto $P(x_1, y_1)$ dall'origine si può calcolare mediante il teorema di Pitagora, ma anche mediante il prodotto scalare standard:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1 x_1 + y_1 y_1 = \langle v , v \rangle$$

Ex. Date due rette in $\mathbb{R}^2$:

$$\text{Span}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \; ; \; \text{Span}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

esse sono perpendicolari se e solo se:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,$$

ossia se $\langle v , w \rangle = 0$.

Ex. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$, la distanza è:

$$d^2(v, w) = \langle v - w , v - w \rangle$$

Questa è nota come DISTANZA EUCLIDEA tra due punti.

PRODOTTI SCALARI E MATRICI

Sia $\mathbb{K}^n$ lo spazio vettoriale standard di dimensione n su $\mathbb{K}$.
Consideriamo la base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Sia ϕ una forma bilineare, dunque $\phi \in Bil(\mathbb{K}^n)$.
Allora poniamo:

$$a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$$

La matrice $A_\phi = \{a_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$ è detta MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA BILINEARE ϕ nel riferimento, in questo caso, canonico.

Data $A_\phi \in M(n, \mathbb{K})$, ricostruiamo ϕ. Dati:

$$v = (d_1 e_1 + d_2 e_2 + \dots + d_n e_n)$$
$$w = (b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n),$$

si ha, dato che ϕ è bilineare:

$$<v, w> = <d_1 e_1 + \dots + d_n e_n, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n> =$$

$$= \sum_{i,j=1\dots n} d_i b_j <e_i, e_j> = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij} d_i b_j,$$

dunque la forma bilineare è determinata.
Viceversa, data ϕ forma bilineare, attraverso la valutazione dei prodotti scalari dei vettori della base canonica, possiamo identificare A_ϕ.
Chiaramente:

$$<\ ,\ >_{A_\phi} = \phi$$

Ritornando al punto precedente:

$$<v, w> = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij} d_i b_j$$

E con abuso di notazione indichiamo con v e w i vettori colonna in $\mathbb{K}^n$ con le coordinate di v e w, si ha:

$$<v, w> = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij} d_i b_j = w^t A_\phi v$$

Questa prende il nome di ESPRESSIONE MATRICIALE (nella base canonica) di $\phi \in Bil(\mathbb{K}^n)$.

In effetti, la forma trovata è bilineare. In fatti (fissato v):

$<v, w+z> = \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} d_i (b_j + c_j) = \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} d_i b_j + \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} d_i c_j = <v,w> + <v,z>$;

$<v, \alpha w> = \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} d_i (\alpha b_j) = \alpha \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} d_i b_j = \alpha <v, w>$.

TEOREMA

L'applicazione:

$$\Omega : \mathrm{Bil}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$$
$$\phi \longrightarrow A_\phi$$

è un isomorfismo.

Dim.

Banale, dopo le considerazioni effettuate, c.v.d.

COROLLARIO

Si ha:

$$\dim \mathrm{Bil}(\mathbb{K}^n) = \dim M(n, \mathbb{K}) = n^2.$$

Restringiamoci ora a $\mathrm{Sym}(\mathbb{K}^n)$: consideriamo, cioè, i prodotti scalari.

Dato che i prodotti scalari sono simmetrici:

$\forall (v, w) \in V \times V : <v, w> = <w, v>$,

è banalmente vero che la matrice A_ϕ associata al prodotto scalare ϕ è simmetrica:

$$A_\phi \in S(n, \mathbb{K})$$

Viceversa, sia $A_\phi \in S(n, \mathbb{K})$. Allora $\phi \in \mathrm{Bil}(\mathbb{K}^n)$. Ma:

$<v, w> = w^t A_\phi v = (w^t A_\phi v)^t = v^t A_\phi^t w = v^t A_\phi w = <w, v>$,

dunque $\phi \in \mathrm{Sym}(\mathbb{K}^n)$, ossia è un prodotto scalare.

Stesso discorso per $\mathrm{Alt}(\mathbb{K}^n)$: se ϕ è alternante, $A_\phi \in A(n, \mathbb{K})$; viceversa, se $A \in A(n, \mathbb{K})$:

$<v, w> = w^t A_\phi v = (w^t A_\phi v)^t = v^t A_\phi^t w = v^t (-A_\phi) w =$
$= -(w^t A_\phi v) = -<w, v>$,

dunque $\phi \in \mathrm{Alt}(\mathbb{K}^n)$.

TEOREMA

Le seguenti due applicazioni:

$$\Omega_S : Sym(\mathbb{K}^n) \to S(n, \mathbb{K})$$
$$\phi \longrightarrow A_\phi = A_\phi^t$$

$$\Omega_A : Alt(\mathbb{K}^n) \to A(n, \mathbb{K})$$
$$\phi \longrightarrow A_\phi = -A_\phi^t$$

sono isomorfismi.

Dim.

Banale, per quanto appena visto, c.v.d.

COROLLARIO

Si ha:

$$\dim Sym(\mathbb{K}^n) = \dim S(n, \mathbb{K}) = [n(n+1)]/2$$
$$\dim Alt(\mathbb{K}^n) = \dim A(n, \mathbb{K}) = [n(n-1)]/2$$

COROLLARIO

Abbiamo già dimostrato che:

$$M(n, \mathbb{K}) = S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K})$$

Allora è anche vero che:

$$Bil(\mathbb{K}^n) = Sym(\mathbb{K}^n) \oplus Alt(\mathbb{K}^n)$$

OSSERVAZIONE

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ munito del suo prodotto scalare standard.
Consideriamo $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, base canonica di $\mathbb{R}^2$.
Si ha:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si dice, allora, che la base canonica è ORTONORMALE per $(\mathbb{R}^2, \langle\,,\rangle_2)$.

SPAZIOTEMPO DI MINKOWSKI

Uno spazio vettoriale standard su $\mathbb{R}$, munito di un prodotto scalare rappresentato da una matrice del tipo:

$$A_\phi = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$$

è detto SPAZIO DI MINKOWSKI.

Ad esempio:

$$\left(\mathbb{R}^4, \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \right)$$

è detto spazio di Minkowski 3+1 (3 valori positivi, uno negativo).

D'ora in poi, per semplicemente, consideriamo $(\mathbb{R}^3, \phi)$ spazio di Minkowski 2+1.

Dato un generico vettore di $\mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$<v, v> = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Dunque, v si dice:

- di tipo SPAZIO, se $<v,v> > 0$;
- di tipo LUCE, se $<v,v> = 0$;
- di tipo TEMPO, se $<v,v> < 0$.

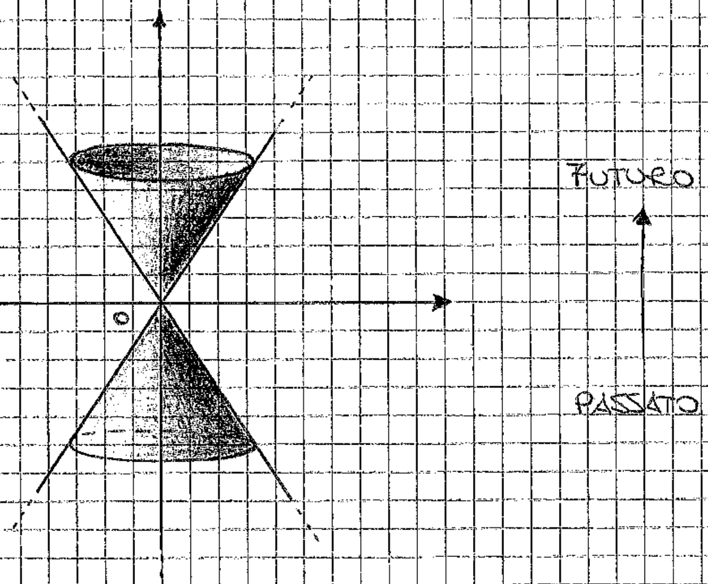
In questo caso, infatti, ogni vettore ha due coordinate spaziali, le prime due, e una temporale, l'ultima.

Il luogo dei punti di tipo luce, a livello grafico genera un (doppio) cono, centrato per comodità nell'origine.

I punti sulla superficie del cono sono di tipo luce: di fatti, si parla di CONO DI LUCE uscente da O (o centrato in O).

I punti all'interno sono di tipo tempo; quelli all'esterno sono di tipo spazio.

Nella rappresentazione che segue, si suppone il piano orizzontale come spazio e l'asse verticale come tempo, orientato verso il futuro:



POSTULATO

Una particella che si muove dall'origine verso il futuro ha un vettore tangente alla traiettoria che è di tipo tempo.

Il caso limite si ha quando il vettore tangente è di tipo luce.

Di conseguenza, un oggetto puntiforme qualsiasi non può viaggiare ad una velocità superiore a quella della luce; esso viaggia a questa velocità se e solo se il vettore tangente alla sua traiettoria non è di tipo tempo, ma di tipo luce.

FORME QUADRATICHE

Consideriamo un prodotto scalare $\Phi \in \mathrm{Sym}(V)$:

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(v, w) \longrightarrow \langle v, w \rangle$$

Si definisce FORMA QUADRATICA ASSOCIATA a Φ la seguente applicazione:

$$q_\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$v \longrightarrow \Phi(v, v)$$

(In realtà possiamo definire le forme quadratiche a partire da generiche forme bilineari $\psi \in \mathrm{Bil}(V)$, ma ci siamo ristretti ai prodotti scalari).

Alcune osservazioni:

- $q_\Phi(kv) = \Phi(kv, kv) = k^2 \Phi(v, v) = k^2 q_\Phi(v)$;
- L'applicazione:

$$\Omega_\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(v, w) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[q_\Phi(v+w) - q_\Phi(v) - q_\Phi(w) \right]$$

è un prodotto scalare, detto FORMA POLARE di q_Φ o PRODOTTO SCALARE ASSOCIATO, tale che q_Φ è la forma quadratica associata a Ω_Φ. Questa forma bilineare simmetrica, inoltre, è unica.

Infatti:

$$\Omega_q(v, w) = \left[q_\Phi(v+w) - q_\Phi(v) - q_\Phi(w) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left[\Phi(v+w, v+w) - \Phi(v, v) - \Phi(w, w) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left[\cancel{\Phi(v, v)} + \Phi(v, w) + \Phi(w, v) + \cancel{\Phi(w, w)} - \cancel{\Phi(v, v)} - \cancel{\Phi(w, w)} \right] \cdot \frac{1}{2} = \left[\Phi(v, w) + \Phi(w, v) \right] \cdot \frac{1}{2},$$

dunque Ω_q è bilineare. Inoltre:

$$\Omega_q(v, w) = \Omega_q(w, v),$$

dunque Ω_q è simmetrica. Inoltre, la forma quadratica associata a Ω_q è q_Φ.

Dato che Φ è un prodotto scalare:

$$\Omega_q(v, w) = \Phi(v, w)$$

TEOREMA

La seguente applicazione:

$$F: \mathrm{Sym}(V) \longrightarrow Q(V),$$

che ad ogni prodotto scalare associa la forma quadratica ad esso associata, è un isomorfismo.

Dim.

Consideriamo:

$$P: Q(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V),$$

(la cosiddetta FORMULA DI POLARIZZAZIONE), che ad ogni forma quadratica associa una forma bilineare.

Si ha, per la seconda osservazione:

$$\phi = \Omega_{F(\phi)} = P(F(\phi))$$

$$q = F(\Omega_q) = F(P(q))$$

Dunque $F = P^{-1}$, $P = F^{-1}$, e F è un isomorfismo.

OSSERVAZIONE

Si è supposto $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$; in altre parole, si è supposto:

$$\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2.$$

ISOMETRIE

Consideriamo due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali muniti di prodotto scalare:

$$(V, \phi) \qquad (W, \psi)$$

Consideriamo $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$.
f si dice OMOMORFISMO METRICO o ISOMETRIA da (V, ϕ) in (W, ψ) se:

- f è un isomorfismo tra spazi vettoriali;
- $\forall\, v, w \in V : \quad \phi(v, w) = \psi(f(v), f(w))$

Con $End(V, \phi)$, in particolare, si denotano gli endomorfismi metrici. È d'obbligo notare che, in generale, $End(V, \phi)$ NON è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di $End(V)$. Si parla allora di ISOMETRIE di (V, ϕ).

OSSERVAZIONE
Siano V e (W, ψ) $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, il secondo dei quali munito di prodotto scalare; sia f un isomorfismo di spazi vettoriali:

$$(V, *) \xrightarrow{f} (W, \psi)$$

Definisco:

$$\begin{aligned} f^*(\psi) : V \times V &\to \mathbb{K} \\ (v, w) &\to \psi(f(v), f(w)) \end{aligned}$$

I seguenti fatti sono evidenti:

- $f^*(\psi)$ è un prodotto scalare;
- f è un'isometria.

CAMBIAMENTI DI BASE: MATRICI CONGRUENTI

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$. Sia:

$$\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$$

una base di V.

Consideriamo l'isomorfismo di passaggio alle coordinate: vogliamo che sia un'isometria:

$$(V, \phi) \xrightarrow{[\;]_{\mathcal{B}}} (\mathbb{K}^n, <\,,\,>_A)$$

Necessariamente:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \{ a_{ij} \}_{i,j=1,\dots,n} \quad , \quad a_{ij} = \phi(v_i, v_j)$$

Inoltre, sappiamo che:

$\forall\, v, w \in V : \phi(v, w) = [w]^t_{\mathcal{B}}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, [v]_{\mathcal{B}}$

Cosa succede se opero un cambiamento di base?

Sia $\mathcal{B}' = \{ w_1, \dots, w_n \}$ un'altra base di (V, ϕ).

Sappiamo che:

$\forall\, v \in V : [v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'} \quad , \quad P \in GL(n, \mathbb{K})$

Dunque:

- $\phi(v, w) = [w]^t_{\mathcal{B}'}\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi)\, [v]_{\mathcal{B}'}$;
- $\phi(v, w) = [w]^t_{\mathcal{B}}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, [v]_{\mathcal{B}} = (P[w]_{\mathcal{B}'})^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)(P[v]_{\mathcal{B}'}) =$
  $= [w]^t_{\mathcal{B}'}\, P^t\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, P\, [v]_{\mathcal{B}'}$.

Allora:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P^t \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot P \quad , \quad P \in GL(n, \mathbb{K})$$

In generale, due matrici $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ si dicono CONGRUENTI se e solo se

$\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $A = P^t \cdot B \cdot P$

NOTAZIONE

Per comodità scriveremo $A \sim_c B$. Tuttavia, non è una notazione universalmente riconosciuta.

TEOREMA

Siano (V, ϕ), (W, ψ) due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali muniti di prodotto scalare.

I seguenti fatti sono fra loro equivalenti:

- (V, ϕ) e (W, ψ) sono isometrici;
- $\forall\, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W : M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \sim_c M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$;
- $\exists\, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W \text{ t.c. } M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\psi)$.

Dim.

Dimostriamo che 1) e 3) sono equivalenti.

Per ipotesi, siano (V, ϕ) e (W, ψ) isometrici. Sia $\mathcal{B}'_V = \{v_1, \dots v_n\}$ una base di V. Allora la seguente è una base di W visto che f è un isomorfismo

$$W = \{f(v_1), f(v_2) \dots f(v_n)\},$$

e in più, dato che $\phi(v, w) = \psi(f(v), f(w))$, si ha:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\psi).$$

Viceversa, se ho due basi $\mathcal{B}'_V$ e $\mathcal{B}'_W$ tali che $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\psi)$, allora l'applicazione f che manda il vettore i-esimo della base $\mathcal{B}'_V$ nel vettore i-esimo della base $\mathcal{B}'$ è un'isometria: infatti è un isomorfismo, e per costruzione $\phi(v, w) = \psi(f(v), f(w))$.

Dimostriamo ora, sulla scorta di questo fatto, che 1) e 2) sono equivalenti.

Per ipotesi, siano (V, ϕ) e (W, ψ) isometrici. Allora

$\forall\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \sim_c M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Ma per quanto visto prima:

$\forall\, \mathcal{B}_V \;\exists\, \mathcal{B}_W$ t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$;

$\forall\, \mathcal{B}_W \;\exists\, \mathcal{B}_V$ t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Dunque:

$\forall\, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W : M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \sim_c M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

Viceversa, se ho la 2) come ipotesi, dato $\mathcal{B}_W$ considero:

$$\mathcal{B}'_V = \{f^{-1}(w_1), \dots f^{-1}(w_n)\}$$

La funzione f^{-1} così definita, per motivi simili a quelli visti prima, è un'isometria, c.v.d.

NOZIONI DI ORTOGONALITÀ

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare.
Due vettori $v, w \in V$ si dicono ORTOGONALI rispetto a ϕ se:

$$\phi(v, w) = \langle v, w \rangle = 0$$

In simboli: $v \perp w$.
Dato che ϕ è un prodotto scalare:

$$v \perp w \Leftrightarrow w \perp v$$

Sia ora W un sottoinsieme di V.
Si definisce COMPLEMENTO ORTOGONALE di W:

$$W^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$$

Il complemento ortogonale di V si chiama RADICALE di V:

$$V^{\perp} = \mathrm{Rad}(V, \phi)$$

$$\mathrm{Rad}(V, \phi) = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V \}$$

(V, ϕ) si dice allora:

- NON DEGENERE, se $\mathrm{Rad}(V, \phi) = \{0\}$;
- DEGENERE, se $\mathrm{Rad}(V, \phi) \neq \{0\}$.

Ex. $(\mathbb{R}^n, \langle \, , \, \rangle_I)$ è non degenere. Infatti, sia $v \in \mathbb{R}^{n\perp}$.
Allora:
$\forall w \in V: v \perp w \Rightarrow v \perp v \Rightarrow x_1^2 + \dots x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow v = 0$.

Ex. (M^{3+1}, ϕ) è non degenere.

TEOREMA
I seguenti fatti sono equivalenti:
1) ϕ è degenere;
2) esiste $v \in W$, $v \neq 0$, $v \in \mathrm{Rad}(V, \phi)$;
3) $rk(\phi) < n$.

Dim.
Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Sia:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \in S(n, \mathbb{K})$$

Sia ora $v \in Rad(\phi)$. Allora $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V$.
Passando in coordinate, la proposizione diventa:
$\exists \ x = [v]_{\mathcal{B}}$ t.c. $\forall \ y = [w]_{\mathcal{B}}, w \in V: \ y^t A x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall i = 1..n: \ e_i^t A x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$

A questo punto l'analogia con il nucleo di un omomorfismo è evidente.
Perciò:

$$\dim Rad(V, \phi) = n - rk A,$$

dunque 1) è equivalente a 3).
Ma 1) è equivalente anche a 2) per definizione di prodotto scalare non degenere, cosicché il teorema è dimostrato c.v.d.

COROLLARIO
ϕ è non degenere se e solo se, fissata $\mathcal{B}$ base qualsiasi di V, e considerata:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi),$$

si ha $\det A \neq 0$, ossia $rk A = n$.

Siano H, K sottoinsiemi di V.
Si dice che H e K sono ortogonali (e si scriverà $H \perp K$) se $K \subseteq H^\perp$ o, equivalentemente, $H \subseteq K^\perp$.
Se:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m,$$

e $V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$, allora si parla di SOMMA DIRETTA ORTOGONALE:

$$V = V_1 \hat{\oplus} V_2 \hat{\oplus} \ldots \hat{\oplus} V_m$$

VETTORI ISOTROPI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare.
Sia $v \in V$.
v si dice:

- ISOTROPO, se $\Phi(v,v) = 0$;
- NON ISOTROPO $\Phi(v,v) \neq 0$.

Notiamo subito che se Φ è degenere, vi sono vettori isotropi in V. Non è vero però che, se esistono vettori isotropi in V, allora Φ è degenere. Consideriamo infatti:

$$(\mathbb{R}^2, h),$$

ove $h(v, w) = x_1 y_2 + x_2 y_1$.
Si ha:

$$M_e^e(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dunque h è non degenere.
Eppure:

$$h(e_1, e_1) = 0, \qquad h(e_2, e_2) = 0,$$

dunque esistono in $\mathbb{R}^2$ vettori isotropi.

TEOREMA
Se W è un sottospazio di V tale che la restrizione del prodotto scalare a W sia degenere, allora W contiene qualche vettore isotropo.

Dim.
Per ipotesi, $Rad(W, \Phi|_W)$ è diverso dal solo 0. Sia $w \neq 0$, $w \in Rad(W, \Phi|_W)$. Allora:
$\forall v \in W : \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \langle w, w \rangle = 0$

Dunque w è un vettore isotropo, c.v.d.

LEMMA

Sia $v \in V$ un vettore NON isotropo, sia ϕ un prodotto scalare qualsiasi. Allora:

$$V = \text{Span}(v) \hat{\oplus} [\text{Span}(v)]^{\perp}$$

Dim.

Certamente $\text{Span}(v) \perp [\text{Span}(v)]^{\perp}$. Ci resta da dimostrare che:

$$V = \text{Span}(v) \oplus [\text{Span}(v)]^{\perp}$$

Allora:

$\forall\, w \in V: w = \lambda v + z,\ z \in [\text{Span}(v)]^{\perp} \Rightarrow z = w - \lambda v$

Certamente, per ipotesi, vale $\phi(v, z) = 0$. Ma:

$\phi(v, z) = \phi(v, w - \lambda v) = \phi(v, w) - \lambda \phi(v, v)$

Dato che per ipotesi v è non isotropo:

$$\lambda = \frac{\phi(v, w)}{\phi(v, v)}$$

λ è detto COEFFICIENTE DI FOURIER di w rispetto a v.

Sia dunque $w \in \text{Span}(v) \cap [\text{Span}(v)]^{\perp}$. Allora

- $w = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{K}$;
- $\phi(\lambda v, v) = \lambda \phi(v, v) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow w = 0$

Dunque $\text{Span}(v) \cap [\text{Span}(v)]^{\perp} = \{0\}$.

Dunque ho tesi:

$$V = \text{Span}(v) \hat{\oplus} [\text{Span}(v)]^{\perp}, \text{ c.v.d.}$$

BASI ORTOGONALI E LORO ESISTENZA

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare.
Una base $\mathcal{B}$ di V si definisce:

- ORTOGONALE per Φ se $\forall\, i \neq j : \Phi(v_i, v_j) = 0$, ossia se:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(n, \mathbb{K});$$

- ORTONORMALE per Φ, se: $\forall\, i \neq j : \Phi(v_i, v_j) = 0 \wedge \forall\, i : \Phi(v_i, v_i) = 1$, ossia se:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

TEOREMA

Ammesso che $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, ogni (V, Φ) ammette una base ortogonale.

Dim.

Operiamo per induzione su $n = \dim V$.

CASO INIZIALE

$n = 1$

La matrice è diagonale, dunque una base qualsiasi è ortogonale.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Dividiamo i due casi:

- $\forall\, v \in V : v$ è isotropo. In questo caso, necessariamente $\Phi \equiv 0$, dunque, per qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = 0 \in \mathcal{D}(n, \mathbb{K}),$$

e $\mathcal{B}$ è ortogonale;

- $\exists\, v \in V$, v non isotropo. Allora:

$$V = \mathrm{Span}(v) \oplus [\mathrm{Span}(v)]^{\perp},$$

con $\dim [\mathrm{Span}(v)]^{\perp} = n-1$.
Per comodità, $Z_v = [\mathrm{Span}(v)]^{\perp}$. Consideriamo:

$$\left(Z_v , \Phi\big|_{Z_v} \right)$$

Per ipotesi induttiva:
$\exists\, \mathcal{B}$ di $\left(Z_v , \Phi\big|_{Z_v} \right)$: $\mathcal{D} = \{ w_1 \dots w_{n-1} \}$
Allora:

$$\mathcal{G} = \{ v, w_1, \dots w_{n-1} \}$$

è una base ortogonale per (V, Φ), e con ciò l'induzione è completata, c.v.d.

OSSERVAZIONE

A meno di riordinare gli elementi, esistono basi ortogonali $\mathcal{B} = \{ v_1 \dots v_k, z_1 \dots z_s \}$, $k+s = n$, tali che:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \left[\begin{array}{cccc|c} c_1 & & & & \\ & c_2 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & c_k & \\ \hline & & & & 0 \\ & & 0 & & \ddots \\ & & & & 0 \end{array} \right]$$

Dunque:

- $\mathrm{rk}\, A = k$;
- $\dim \mathrm{Rad}(\Phi) = n - k = s$. Ciò implica che

$$\mathcal{D} = \{ z_1 \dots z_s \}$$

è una base di $\mathrm{Rad}(\Phi)$.
In fatti, certamente:

$$\mathrm{Span}(z_1 \dots z_s) \subseteq \mathrm{Rad}(\Phi)$$

Ma dato che le dimensioni sono uguali:

$$\mathrm{Span}(z_1 \dots z_s) = \mathrm{Rad}(\Phi),$$

e $\mathcal{D}$ è una base di $\mathrm{Rad}(\Phi)$.

ALGORITMO DI ORTOGONALIZZAZIONE

Sia $\mathcal{B} = \{w_1 \dots w_n\}$ una base di (V, ϕ), $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare.
Certamente:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & * \\ & a_{2,2} & \\ * & & \ddots \\ & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \in S(n, \mathbb{K})$$

Vogliamo determinare un algoritmo adatto a generare una base ortogonale.
Analizziamo A:

- $A = 0 \Rightarrow$ tutti i vettori sono isotropi $\Rightarrow \mathcal{B}$ è una base ortogonale;
- $A \neq 0 \Rightarrow \exists\, v \in V$ non isotropo. Dunque:
  - se un elemento non nullo è sulla diagonale (ad esempio $a_{i,i} \neq 0$), allora w_i è non isotropo, visto che $\langle w_i, w_i \rangle = a_{ii} \neq 0$;
  - se tutti gli elementi sulla diagonale sono nulli, allora c'è un elemento non nullo altrove (ad esempio $a_{i,j} \neq 0$, $i \neq j$). Allora $(w_i + w_j)$ è non isotropo:

    $$\langle w_i + w_j, w_i + w_j \rangle = \cancel{\langle w_i, w_i \rangle} + \cancel{\langle w_j, w_j \rangle} + 2\langle w_i, w_j \rangle$$

    Dato che $\langle w_i, w_j \rangle = a_{ij} \neq 0$, $(w_i + w_j)$ è non isotropo.

Allora, tramite un riordinamento o una sostituzione, posso generare $\mathcal{B}^\circ = \{w_1^\circ, w_2^\circ, \dots w_n^\circ\}$, con w_1° non isotropo. Allora:

$$V = \operatorname{Span}(w_1^\circ) \hat{\oplus} [\operatorname{Span}(w_1^\circ)]^\perp$$

Dunque:

$$w_2^\circ = \lambda_2 w_1^\circ + z_2$$
$$w_3^\circ = \lambda_3 w_1^\circ + z_3$$
$$\vdots$$
$$w_n^\circ = \lambda_n w_1^\circ + z_n$$

In particolare, $z_1, z_2, \dots z_n \in [\operatorname{Span}(w_1^\circ)]^\perp$.

È facile dimostrare, ora, che $\{z_2, \dots z_n\}$ è una base di $[\mathrm{Span}(\omega_1^\circ)]^\perp$. Come numero di vettori, ci siamo: dimostriamo allora che sono linearmente indipendenti, ad esempio:

$$z_2 = \omega_2^\circ - \lambda_2 \omega_1$$
$$z_3 = \omega_3^\circ - \lambda_3 \omega_1$$
$$\vdots$$
$$z_n = \omega_n^\circ - \lambda_n \omega_1$$

Supponiamo:

$$z_n = \sum_{i=2}^{n-1} K_i z_i$$

Allora:

$$\omega_n^\circ = \sum_{i=2}^{n-1} K_i (\omega_i^\circ - \lambda_i \omega_1^\circ) + \lambda_n \omega_1^\circ$$

ω_n°, allora, sarebbe esprimibile come combinazione lineare di $\omega_1 \dots \omega_{n-1}$, ma ciò è assurdo.

A questo punto considero:

$$\left([\mathrm{Span}(\omega_1^\circ)]^\perp, \; \Phi\big|_{[\mathrm{Span}(\omega_1^\circ)]^\perp}\right),$$

che ha dimensione $(n-1)$, e ricomincio l'algoritmo dall'inizio.

Ex. La matrice A sottostante induce un prodotto scalare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Determinare una base ortogonale per A.

Sia $A = M_e^e(\Phi)$, con $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Allora, ad esempio, e_3 è un vettore non isotropo.

Allora:

$$\mathcal{B}_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

ove

$\omega_1 = e_3 \qquad \omega_2 = e_1 - \dfrac{\Phi(e_1, e_3)}{\Phi(e_3, e_3)} e_3 = e_1 \qquad \omega_3 = e_2 - \dfrac{\Phi(e_2, e_3)}{\Phi(e_3, e_3)} e_3 =$

$= e_2 - 2e_3$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{e_3, e_1, e_2 - 2e_3\}$

Si ha:

- $\langle e_1, e_1 \rangle = 0$;
- $\langle e_1, e_2 - 2e_3 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle - 2\langle e_1, e_3 \rangle = 1 - 2 \cdot 0 = 1$;
- $\langle e_2 - 2e_3, e_2 - 2e_3 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle - 4\langle e_2, e_3 \rangle + 4\langle e_3, e_3 \rangle =$
$= 0 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -4$.

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ripetiamo l'algoritmo considerando $(W, \phi|_W)$, $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$:
Si ha:

$$M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(\phi|_W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_2, w_3\}$$

Allora, dato che w_3 è non isotropo:

$$t_2 = w_2 - \frac{\phi(w_2, w_3)}{\phi(w_3, w_3)} w_3 = e_1 + \frac{1}{4}(e_2 - 2e_3) = e_1 + \frac{1}{4} e_2 - \frac{1}{2} e_3.$$

$$t_2 = w_2 + \frac{1}{4} w_3$$

$$\mathcal{B} = \{w_3, t_2\}$$

Dato che:

$\langle t_2, t_2 \rangle = \langle w_2 + \frac{1}{4} w_3, w_2 + \frac{1}{4} w_3 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle w_2, w_3 \rangle +$
$+ \frac{1}{16} \langle w_3, w_3 \rangle = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot (-4) = \frac{1}{4}$

Allora una base ortogonale per A è:

$$\mathcal{G} = \left\{e_3, e_2 - 2e_3, e_1 + \frac{1}{4} e_2 - \frac{1}{2} e_3\right\},$$

e si ha:

$$M_{\mathcal{G}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

ESEMPI DI PRODOTTI SCALARI

Sia $V = \mathbb{K}^n$.

Sia $A \in S(n, \mathbb{K})$. Allora A induce un prodotto scalare:

$$\phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(X, Y) \longrightarrow Y^t A X$$

CASI ESTREMI

Se $A = 0$, allora $\phi = 0$.

Se $A = I$, allora ϕ è il prodotto scalare standard.

Sia $V = M(n, \mathbb{K})$.

Siano $A, B \in V$. Le applicazioni:

$$\phi_1, \phi_2 : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\phi_1(A, B) = Tr(A^t B)$$
$$\phi_2(A, B) = Tr(AB)$$

sono forme bilineari (banale) e simmetriche, dunque sono prodotti scalari.

Infatti:

- $\phi_1(A, B) = tr(A^t B) = tr((A^t B)^t) = tr(B^t A) = \phi_1(B, A)$;
- $\phi_2(A, B) = tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} [B]_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [B]_{ji} [A]_{ij} = tr(BA) = \phi_2(B, A)$.

Sia $V = \mathbb{K}_n[x]$.

Siano $a_1, a_2 \ldots a_s \in \mathbb{K}$.

Allora:

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$b(p, q) = \sum_{i=1}^{s} p(a_i)\, q(a_i)$$

è un prodotto scalare.

ESERCIZI VARI

Ex. Sia $J \in M(n, \mathbb{C})$ un blocco di Jordan.

1) Provare che $I, J, J^2 \dots J^{n-1}$ sono linearmente indipendenti
2) Si consideri, $\forall B \in M(n, \mathbb{C})$:

$$f_B : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$$
$$X \longrightarrow BX - XB$$

Si provi che, se B e B' sono simili, allora:

$$\dim \operatorname{Imm} f_B = \dim \operatorname{Imm} f_{B'}$$

3) Si provi che $\dim \operatorname{Imm} f_B \leq n^2 - n \quad \forall B \in M(n, \mathbb{C})$

1) Sappiamo che, se $J = J(\lambda, n)$, allora:

$$q_J = \pm (x - \lambda)^n$$
$$\deg q_J = n$$

Consideriamo ora una combinazione nulla di $I, J \dots J^{n-1}$:

$$a_0 + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = 0$$

Allora si avrebbe $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \in I(J) =$
$= \langle q_J \rangle$, e inoltre $\deg g < n$. Allora necessariamente $g = 0$, ossia:

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

2) Per ipotesi, se $B \sim B'$:

$\exists M \in GL(n, \mathbb{C}) \ni' B' = M^{-1} B M$

Per la formula delle dimensioni, il problema è risolto se si dimostra che:

$$\dim \operatorname{Ker} f_B = \dim \operatorname{Ker} f_{B'}$$

Consideriamo $L \in \operatorname{End}(M(n, \mathbb{C}))$:

$$L : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$$
$$L(X) \longrightarrow M^{-1} X M$$

L è un isomorfismo, infatti è ad esempio iniettiva:

$$X \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow M^{-1} X M = 0 \Rightarrow \cancel{M M^{-1}} X \cancel{M M^{-1}} = X = M \cdot 0 \cdot M^{-1} = 0$$

Ora:

- $L(\mathrm{Ker}\, f_B) \subseteq \mathrm{Ker}\, f_{B'}$. Infatti:

$$f_{B'}(M^{-1}XM) = B'M^{-1}XM - M^{-1}XMB' = M^{-1}B\cancel{MM^{-1}}XM +$$
$$- M^{-1}X\cancel{MM^{-1}}BM = M^{-1}BXM - M^{-1}XBM = M^{-1}(BX - XB)M = 0;$$

- $L^{-1}(\mathrm{Ker}\, f_{B'}) \subseteq \mathrm{Ker}\, f_B$. Infatti:

$$f_B(MXM^{-1}) = BMXM^{-1} - MXM^{-1}B = MB'\cancel{M^{-1}M}XM^{-1} +$$
$$- MX\cancel{M^{-1}M}B'M^{-1} = MB'XM^{-1} - MXB'M^{-1} = M(B'X - XB')M^{-1} = 0.$$

Dunque $\dim \mathrm{Ker}\, f_B = \dim \mathrm{Ker}\, f_{B'}$.

3) È equivalente provare che $\dim \mathrm{Ker}\, f_B \geq n$.

Data $B \in M(n, \mathbb{C})$, per il punto 2) posso richiamare la sua forma di Jordan J. J, in particolare, è della forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & O \\ & J_2 & \\ O & & \ddots \end{bmatrix}$$

Ora, se considero $X \in M(n, \mathbb{C})$ formata da blocchi della stessa taglia, il problema si semplifica:

$$X \begin{bmatrix} X_1 & & O \\ & X_2 & \\ O & & \ddots \end{bmatrix}$$

Si tratta infatti di analizzare le matrici per cui:
$\forall\, i = 1 \ldots p: \; J_i X_i = X_i J_i$

Ma per il punto 1), se J_i è un blocco di Jordan di taglia K_i, allora i vettori $I, J_i, \ldots J_i^{K_i - 1}$ (che sono K_i) sono linearmente indipendenti e commutano.
Posso quindi facilmente generare $K_1 + \ldots + K_p = n$ matrici quadrate che commutano con B. Allora:

$$\dim \mathrm{Ker}\, f_B \geq n.$$

Ex. Sia $f \in End(\mathbb{C}^4)$, tale che $P_f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$, e tale che esistono un numero finito di sottospazi di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 2 f-invarianti.

Provare che tali sottospazi vettoriali f-invarianti sono esattamente tre.

Analizziamo $q_f(x)$:

$$q_f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2) \\ (x-1)^2(x-2) \\ (x-1)(x-2)^2 \\ (x-1)^2(x-2)^2 \end{cases}$$

CASO 1

$q_f(x) = (x-1)(x-2)$

La forma di Jordan è la seguente:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 2 & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & 2 \end{array}\right],$$

ottenuta mediante un'opportuna base (di autovettori):

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

Notiamo però che:

$\forall v \in V(1), \forall w \in V(2)$: $Span(v, w)$ è f-invariante

Infatti:

$f(\alpha v + \beta w) = \alpha v + 2\beta w \in Span(v, w)$

Dunque gli spazi f-invarianti sono

CASO 2

$q_f(x) = (x-1)^2(x-2)$

La forma di Jordan, ottenuta con $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, è:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 2 & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & 2 \end{array}\right]$$

Anche in questo caso gli spazi di dimensione 2 f-invarianti sono infiniti:

$\forall\ w \in V(2)$: Span (v_1, w) è f-invariante

$\forall\ w \in V(2)$: $f(\alpha v_1 + \beta w) = \alpha v_1 + 2\beta w \in$ Span (v_1, w)

Anche questo caso è quindi da scartare

CASO 3

$q_f(x) = (x-1)(x-2)^2$

Anche questo caso, del tutto simile al caso 2, è da scartare.

CASO 4

$q_f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$

Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di Jordan per f. Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & & \\ \hline 0 & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right]$$

Tre spazi di dimensione 2 f-invarianti sono evidenti:

- Span $(w_1, w_2) = W_1$;
- Span $(w_3, w_4) = W_2$;
- Span $(w_1, w_3) = W_3$

Sia ora W uno spazio di dimensione 2 f-invariante.

Allora:

$$q_{f|_W}(x) = \begin{cases} (x-1) \\ (x-2) \\ (x-1)^2 \\ (x-2)^2 \\ (x-1)(x-2) \end{cases}$$

CASO 1

$q_{f|_W}(x) = (x-1)$

Si ha:

$$f|_W = \mathrm{Id}_W$$
$$\Downarrow$$
$$W \subseteq V(1)$$

Ma $\dim W = 2$, $\dim V(1) = 1$: essendo.

CASO 2

$$q_{f|_W}(x) = (x-2)$$

Da scartare, del tutto simile al caso 1.

CASO 3

$$q_{f|_W}(x) = (x-1)^2$$

Si ha:

$$\operatorname{Ker}(f|_W - \operatorname{Id})^2 = W$$
$$W \subseteq V'(1)$$

Ma $\dim W = \dim V'(1) = 2$, allora

$$W = V'(1) = W_1$$

CASO 4

$$q_{f|_W}(x) = (x-2)^2$$

Del tutto simile al caso 3: si ottiene $W = V'(2) = W_2$.

CASO 5

$$q_{f|_W}(x) = (x-1)(x-2)$$

In questo caso, $f|_W$ è diagonalizzabile, dunque ha una base di autovettori. Dunque forzatamente:

$$W = \operatorname{Span}(w_1, w_3) = W_3,$$

visto che v_1 e v_3 sono gli unici autovettori per f, a meno di prodotti per scalari.

Dunque:

$$W = W_3,$$

e con ciò l'esercizio è concluso.

SOMME DIRETTE ORTOGONALI E PRODOTTI NON DEGENERI

PROPOSIZIONE

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare. Sia W un sottospazio vettoriale di V, sia $\phi|_W$ la restrizione a W di ϕ. Allora:

$$V = W \hat{\oplus} W^\perp \Leftrightarrow \phi|_W \text{ è non degenere}$$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per ipotesi $W \cap W^\perp = \{0\}$. Ma:

$$W \cap W^\perp = \{ w \in W \ni' \langle w, w' \rangle = 0 \ \forall \ w' \in W \} \overset{\text{def}}{=} \text{Rad}(\phi|_W)$$

Dunque $\text{Rad}(\phi|_W) = \{0\}$, e $\phi|_W$ è non degenere.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Per ipotesi $\phi|_W$ è non degenere. Sia $\mathcal{B}$ una base ortogonale per $\phi|_W$, supponiamo $\dim W = k$:

$$\mathcal{B} = \{ w_1, w_2, \dots, w_k \}$$

Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi|_W) = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_k \end{bmatrix} \in S(k, \mathbb{K})$$

Inoltre, per ipotesi:

$\forall \ j = 1 \dots k : c_j = \phi(w_j, w_j) \neq 0$

Sempre per ipotesi:

$$\text{Rad}(\phi|_W) = \{0\} \Leftrightarrow W \cap W^\perp = \{0\}$$

Abbiamo dunque provato che l'intersezione è nulla. L'ortogonalità è ovvia. Resta da dimostrare la somma. Chiediamo z:

$$\forall \ v \in V : v = w + z, \ w \in W, \ z \in W^\perp \Rightarrow v = (\lambda_1 w_1 + \dots \lambda_k w_k) + z$$

Se così fosse:

$$z = v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j$$

Imponiamo che $\forall \ s = 1 \dots k : \phi(z, w_s) = 0$.

Allora:

$$\forall\ s = 1 \dots k : \quad \phi\left(v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j , w_s\right) = 0$$

Sfruttando la nozione di base ortogonale:

$$\forall\ s = 1 \dots k : \ \phi(v, w_s) - \phi(\lambda_s w_s, w_s) = 0$$

Quindi:

$$\lambda_s = \frac{\phi(v, w_s)}{\phi(w_s, w_s)}, \quad \phi(w_s, w_s) = c_s \neq 0$$

Dunque effettivamente, con questi coefficienti, ho la tesi:

$$V = W \hat{\oplus} W^{\perp}, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Un caso particolare è stato già analizzato.

Dato v non isotropo (ossia $\phi|_{Span(v)}$ non degenere) si ha:

$$V = Span(v) \hat{\oplus} (Span(v))^{\perp}$$

PRODOTTI NON DEGENERI E DIMENSIONI

PROPOSIZIONE

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare ϕ non degenere.
Sia W un sottospazio vettoriale di V.
Allora:

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

In altre parole, anche se non si ha $V = W \hat{\oplus} W^{\perp}$, questa relazione di dimensioni sussiste.

Dim.
Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2 \dots w_k\}$ di W arbitraria, e estendiamola (arbitrariamente) a base di V:

$$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots w_k, v_1, \dots v_s\}$$

Allora:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k+s} \end{bmatrix}$$

Passando in coordinate, si ha
$\forall w \in W$:

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Y$$

$\forall w' \in W^{\perp} : [w']_{\mathcal{B}} = X \ni' Y^t M X = 0$

E' sufficiente imporre dunque che:

$\forall i = 1 \dots k : e_i^t M X = 0$

In altre parole

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_k \\ \hline \end{bmatrix} X = 0$$

Dato che ϕ è non degenere, le righe di M sono linearmente indipendenti.

Dunque a maggior ragione:

$$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix} = k$$

Allora $\dim W^\perp = s$, da cui la tesi:

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp, \text{ c.v.d.}$$

Ex. Consideriamo:

$$\left(\mathbb{R}^2, \Phi\right), \quad A_\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che Φ è non degenere, ma (e_1+e_2) è isotropo.
Infatti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Notiamo ora che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathrm{Span}(1,1))^\perp = \mathrm{Span}(1,1)$$

Dunque certamente la somma diretta ortogonale non sussiste, però:

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Span}(1,1) + \dim(\mathrm{Span}(1,1))^\perp = 1+1.$$

COMPLEMENTI VARI

OSSERVAZIONE

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare non degenere. Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $\Phi|_W$ è non degenere. Allora:

$$V = W \hat{\oplus} W^\perp$$

Aprendo una parentesi, certamente $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Infatti:

$\forall w \in W^\perp : \langle w, w' \rangle = 0 \ \forall w \in W \Rightarrow W \subseteq (W^\perp)^\perp$

Ma se Φ è non degenere:

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp = \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp$$

$$\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$$

Se dunque Φ è non degenere:

$$V = W \hat{\oplus} W^\perp = W^\perp \hat{\oplus} (W^\perp)^\perp,$$

cosicché anche $\Phi|_{W^\perp}$ è non degenere.

OSSERVAZIONE

Sia (V, Φ) arbitrario, W un sottospazio vettoriale di V.

Se Φ è non degenere:

$$\dim W^\perp = n - k$$

In generale, però:

$$k \geq rk \text{ righe} \Rightarrow \dim W^\perp \geq n - k$$

In particolare:

$$\dim W^\perp = n - k + \dim(W \cap \mathrm{Rad}\, \Phi)$$

ISOMETRIE CANONICHE

Supponiamo di poter scrivere:

$$V = Rad(\Phi) \oplus Z$$

Allora, dato che $Rad(\Phi) = Z^{\perp}$:

$$V = Rad(\Phi) \hat{\oplus} Z$$

Supponiamo inoltre:

$\Phi_{|Z}$ non degenere $\Rightarrow rk\,\Phi = rk\,\Phi_{|Z} = \dim Z$

Supponiamo di avere due decomposizioni di questo tipo:

$$V = Rad(\Phi) \hat{\oplus} Z$$
$$V = Rad(\Phi) \hat{\oplus} Z'$$

LEMMA

$(Z, \Phi_{|Z})$ e $(Z', \Phi_{|Z'})$ sono canonicamente isometrici.

Dim.

Per ipotesi

$\forall z \in Z \; \exists! \; h \in Rad(\Phi), z' \in Z' \; \ni' \; z = h + z'$

Dunque considero la seguente applicazione

$$Z \xrightarrow{f} Z'$$
$$z \longrightarrow f(z) = z'$$

Allora:

- f è un omomorfismo. Infatti:
- $0 = 0 + 0 \Rightarrow f(0) = 0$;
- $a = h_1 + z_1, \; b = h_2 + z_2', \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a + \mu b = (\lambda h_1 + \mu h_2) + (\lambda z_1' + \mu z_2') \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$;
- f è un isomorfismo. Infatti è un omomorfismo iniettivo tra spazi aventi uguale dimensione:
  $f(z) = z' = 0 \Rightarrow z \in Rad(\Phi) \cap Z \Rightarrow z = 0$;
- $\Phi(z, z) = \cancel{\Phi(h, h)} + \cancel{2\Phi(h, z')} + \Phi(z', z') = \Phi(z', z')$.

Allora f è un isometria ottenuta in modo canonico, e i due spazi sono canonicamente isometrici, c.v.d.

ALGORITMO DI LAGRANGE E DETERMINANTE

Analizziamo due matrici congruenti:

$$B = N^t A N$$

Dato che $\det N^t = \det N$, si ha:

$$\det B = \det A\, (\det N)^2,$$

quindi:

$$\operatorname{sgn} \det B = \operatorname{sgn} \det A$$

Consideriamo l'algoritmo di Lagrange. Esso è costituito da:

- trasformazioni ausiliarie, ossia riordinamenti di base in modo da avere il primo vettore non isotropo;
- trasformazioni di base, dove intervengono i coefficienti di Fourier.

Consideriamo queste ultime trasformazioni.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$, o in generale di V ($\dim V = n$), munito di prodotto scalare Φ. Sia $\Phi(v_1, v_1) \neq 0$. Allora possiamo usare l'algoritmo:

$$v_1' = v_1$$
$$v_2' = v_2 - \frac{\Phi(v_2, v_1)}{\Phi(v_1, v_1)} v_1$$
$$\vdots$$

$$\mathcal{B}' = \{v_1' \dots v_n'\}$$

La matrice che rappresenta la base è:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det N = 1$$

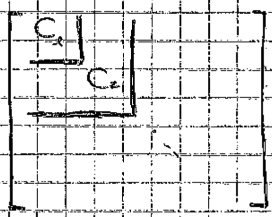
Dunque, se B è ottenuta da A mediante una trasformazione di base con l'algoritmo di Lagrange:

$$\det B = \det A \cdot 1^2 = \det A$$

Siano ora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ come prima, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$, $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi)$.
Dunque in particolare:

$$\det B = \det A$$

Data una matrice quadrata, si definisce MINORE PRINCIPALE di taglia i il minore ottenuto considerando le prime i righe e le prime i colonne:

$C =$ 

Nel nostro caso:
$\forall\, i = 1 \dots n : A_i = M_{\{v_1, \dots, v_i\}}(\Phi|_{Span(v_1, v_2, \dots, v_i)})$;
$\forall\, i = 1 \dots n : B_i = M_{\{v_1', \dots, v_i'\}}(\Phi|_{Span(v_1', \dots, v_i')})$.

Ma è facile notare che, dato che la matrice di cambiamento di base è triangolare e invertibile:

$\forall\, i = 1 \dots n : Span(v_1 \dots v_i) = Span(v_1' \dots v_i')$

Allora $\forall\, i = 1 \dots n : A_i \sim_c B_i$.
Ma c'è di più. Sia N la matrice tale che $B = N^t A N$. Allora:
$\forall\, i = 1 \dots n : \det N_i = \det N_i^t = 1$;
$\forall\, i = 1 \dots n : B_i = N_i^t A_i N_i$.

Quindi:
$\forall\, i = 1 \dots n : \det B_i = \det A_i$.

TEOREMA DI JACOBI

Sia Φ un prodotto scalare, sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di Φ.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V. Sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$.

Supponiamo che:

$\forall\, i = 1 \dots r$: $D_i = \det A_i \neq 0$, ove $\operatorname{rk} \Phi = r$,

ove A_i è il minore principale di A di taglia i.

Allora esiste una base $\mathcal{S}$ di V tale che:

$$M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\Phi) = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \frac{D_3}{D_2} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Dim.

Per ipotesi $D_1 \neq 0$, dunque $[a]_{1,1} \neq 0$ e dunque v_1 è non isotropo.

Allora procedo con una trasformazione di base:

$$A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = \left[\begin{array}{cc|ccc} D_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & x & & & \\ \hline \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

Sappiamo che $\det A_2 = D_2 = \det \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, dunque necessariamente $[a]_{2,2} = \frac{D_2}{D_1}$.

Iterando, si ottiene $\mathcal{S}$ di V tale che:

$$M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\Phi) = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix}, \text{ c.v.d.}$$

ISOMETRIE CANONICHE

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare. Consideriamo $Rad(\Phi)$, quindi la seguente proiezione:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V/_{Rad(\Phi)} \\ v &\longrightarrow [v] \end{aligned}$$

Vogliamo allora definire un prodotto scalare $\hat{\Phi}$ per $V/_{Rad(\Phi)}$, tale che:

$\forall\, v, w \in V: \ \Phi(v, w) = \hat{\Phi}([v], [w])$.

Bisogna accertarsi che $\hat{\Phi}$ sia ben definito. Ma ciò è semplice:

$v' = v + h,\ h \in Rad\,\Phi$
$w' = w + k,\ k \in Rad\,\Phi$

$$\Phi(v', w') = \Phi(v, w) + \cancel{\Phi(v, k)} + \cancel{\Phi(h, w)} + \cancel{\Phi(h, k)}$$

Sia ora W tale che $V = Rad(\Phi) \oplus W = Rad(\Phi) \hat{\oplus} W$.

Allora

$$\pi|_W : (W, \Phi|_W) \longrightarrow \left(V/_{Rad(\Phi)}, \hat{\Phi}\right)$$

è un'isometria. Infatti:

- è un isomorfismo, poiché è un omomorfismo iniettivo tra spazi di dimensione uguale. Sia infatti $w \in W$, $[w] = [0]$. Allora: $w \in Rad(\Phi) \Rightarrow w \in W \cap Rad(\Phi) \Rightarrow w = 0$;
- $\Phi(v_1, v_2) = \hat{\Phi}([v_1], [v_2])\ \forall\, v_1, v_2 \in V$, dunque a maggior ragione:
  $\forall\, w_1, w_2 \in W: \ \Phi(w_1, w_2) = \hat{\Phi}([w_1], [w_2])$.

Consideriamo ora due diverse decomposizioni in somma diretta ortogonale, e due proiezioni associate:

$$V = W \oplus Rad(\Phi) \qquad \pi|_W : (W, \Phi|_W) \to \left(V/_{Rad(\Phi)}, \hat{\Phi}\right)$$

$$V = W' \oplus Rad(\Phi) \qquad \pi|_{W'} : (W', \Phi|_{W'}) \to \left(V/_{Rad(\Phi)}, \hat{\Phi}\right)$$

Vi è l'isometria canonica che segue:

$$\begin{tikzcd}
(W, \Phi|_W) \arrow[rr, "(\pi|_{W'})^{-1} \circ (\pi|_W)"] \arrow[dr] & & (W', \Phi|_{W'}) \\
& \left(V/_{Rad(\Phi)}, \hat{\Phi}\right) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

CLASSIFICAZIONE DI (V, Φ) A MENO DI ISOMETRIE NEL CASO $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Per quanto visto, non è restrittivo supporre che Φ sia non degenere. Dunque sia (V, Φ) un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale ($\dim V = n$), munito di un prodotto scalare Φ non degenere.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale per Φ:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 \ddots & \\ 0 & & c_n \end{bmatrix},$$

ove $\forall i = 1 \dots n : c_i = \Phi(v_i, v_i) \neq 0$.

Vogliamo allora normalizzare $\mathcal{B}$, ottenendo $\hat{\mathcal{B}}$ tale che:

$$M_{\hat{\mathcal{B}}}^{\hat{\mathcal{B}}}(\Phi) = I_n .$$

Determinare $\hat{\mathcal{B}}$ è però semplice. Infatti:

$\forall i = 1 \dots n : \hat{v}_i = \lambda_i v_i \; , \; \lambda_i = \sqrt{c_i}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i = 1 \dots n : \Phi(\hat{v}_i, \hat{v}_i) = \lambda^2 \Phi(v_i, v_i) = \frac{1}{\cancel{c_i}} \cdot \cancel{c_i} = 1$

Così facendo determino la base $\hat{\mathcal{B}}$ ortonormale per Φ.

TEOREMA

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, o se in $\mathbb{K}$ esistono tutte le radici quadrate, allora:

(V, Φ) è isometrico a $(V, \Phi') \Leftrightarrow \dim \operatorname{Rad} \Phi = \dim \operatorname{Rad} \Phi'$

In particolare, tutti i prodotti scalari non degeneri sono isometrici.

Dim.

Per quanto visto, posso ricondurmi ad una matrice espressa mediante una base ortonormale della forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad r \leq n$$

dunque i due spazi sono isometrici se e solo se:

$$\operatorname{rk} \Phi = \operatorname{rk} \Phi'$$

ossia se e solo se $\dim \operatorname{Rad} \Phi = \dim \operatorname{Rad} \Phi'$, c.v.d.

CLASSIFICAZIONE DI (V, Φ) A MENO DI ISOMETRIE NEL CASO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Il campo $\mathbb{R}$ contiene al suo interno tutte le radici dei numeri non negativi. Sia Φ un prodotto scalare non degenere. Dunque, con un argomentazione simile al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, posso ricavare una base Φ ortogonale ottenendo $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_p, w_1 \dots w_q\}$ tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_p & & & \\ \hline & & & b_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_q \end{array}\right],$$

ove (supposto Φ non degenere):

- $\forall i = 1 \dots p : c_i = \Phi(v_i, v_i) > 0$;
- $\forall j = 1 \dots q : c_j = \Phi(w_j, w_j) < 0$.

Le basi normalizzate di $\mathcal{B}$ (sia essa $\hat{\mathcal{B}}$), allora, sono della forma:

$$\hat{\mathcal{B}} = \{\lambda_1 v_1 \dots \lambda_p v_p, \mu_1 w_1 \dots \mu_q w_q\},$$

ove $\forall i = 1 \dots p : \lambda_i \neq 0$ e $\forall j = 1 \dots q : \mu_j \neq 0$.

Ponendo:

$$\lambda_i = \sqrt{c_i}^{-1}, \qquad \mu_j = \sqrt{-b_j}^{-1},$$

ottengo:

$$M_{\hat{\mathcal{B}}}^{\hat{\mathcal{B}}}(\Phi) = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right]$$

A priori però, i valori p e q possono dipendere dalla base considerata.

INDICE DI POSITIVITÀ E NEGATIVITÀ

Un prodotto scalare si dice DEFINITO POSITIVO se:

$\forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v,v) > 0;$

Un prodotto scalare si dice DEFINITO NEGATIVO se:

$\forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v,v) < 0;$

Un prodotto scalare si dice SEMIDEFINITO POSITIVO se:

$\forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v,v) \geq 0;$

Un prodotto scalare si dice SEMIDEFINITO NEGATIVO se:

$\forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v,v) \leq 0$

Si definisce allora INDICE DI POSITIVITÀ $i_+(\phi)$:

$$i_+(\phi) = \max\left\{ \dim W \;\middle|\; \begin{array}{l} W \text{ è sottospazio di } V \\ \phi|_W \text{ è definito positivo} \end{array} \right\}$$

Analogamente si definisce INDICE DI NEGATIVITÀ $i_-(\phi)$:

$$i_-(\phi) = \max\left\{ \dim W \;\middle|\; \begin{array}{l} W \text{ è sottospazio di } V \\ \phi|_W \text{ è definito negativo} \end{array} \right\}$$

Infine, si definisce INDICE DI NULLITÀ $i_0(\phi)$:

$$i_0(\phi) = \dim \mathrm{Rad}(\phi)$$

Si definisce infine SEGNATURA di ϕ la seguente stringa associata a ϕ:

$$\sigma(\phi) = (i_+(\phi), i_-(\phi), i_0(\phi))$$

TEOREMA DI SYLVESTER

Sia (V, Φ) un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare. Sia $\mathcal{B}$ una qualsiasi base ortogonale di (V, Φ), eventualmente riordinata secondo i segni della forma quadratica. Allora:

$$\begin{cases} p_{\mathcal{B}} = i_+(\Phi) \\ q_{\mathcal{B}} = i_-(\Phi) \end{cases}$$

In altre parole i valori p e q non dipendono dalla base scelta, ma sono quantità intrinseche del prodotto scalare.

Dim.

Sia $\hat{\mathcal{B}}$ una base ortogonale, riordinata e normalizzata, di $\mathcal{B}$. Allora $\left(\hat{\mathcal{B}} = \{v_1 \dots v_p, w_1 \dots w_q, z_1 \dots z_s\}\right)$:

$$M^{\hat{\mathcal{B}}}_{\hat{\mathcal{B}}}(\Phi) = \left[\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right]$$

Sappiamo già che $i_0(\Phi) = \dim \operatorname{Rad}(\Phi)$ è un dato intrinseco. Se allora dimostriamo, ad esempio, $p = i_+(\Phi)$, la dimostrazione è conclusa.

- $p \leq i_+(\Phi)$

  Considero $W = \operatorname{Span}(v_1 \dots v_p)$, $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_p\}$. In questo modo, ho:

  $$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi|_W) = I_p,$$

  dunque W è un sottospazio di dimensione p di V tale che la restrizione di Φ è definita positiva.
  Allora certamente $i_+(\Phi) \geq p$, essendo $i_+(\Phi)$ la dimensione massima.

- $p \geq i_+(\Phi)$

  Sia W un sottospazio di V, avente dimensione pari a $i_+(\Phi)$, avente $\Phi|_W$ definito positivo.
  Sia $Z = \operatorname{Span}\{w_1 \dots w_q, z_1 \dots z_s\}$. Allora $\Phi|_Z$ è semidefinito negativo.

Sia ora $v \neq 0$, $v \in W \cap Z$. Si avrebbe:
- $v \in W \Rightarrow \phi(v,v) > 0$;
- $v \in Z \Rightarrow \phi(v,v) \leq 0$.

ciò è assurdo. Dunque $W \cap Z = \{0\}$.
In più, $\dim W + Z \leq n = \dim V$ (definiamo $\dim W + Z = n - i$, $i \geq 0$).
Per la formula di Grassmann:

$$\dim W + Z = \dim W + \dim Z + \dim W \cap Z$$

$$n \geq n - i = i_+(\phi) + n - p + 0$$

$$\cancel{n} \geq i_+(\phi) + \cancel{n} - p$$

$$p \geq i_+(\phi), \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO
Siano (V, ϕ) e (V, ϕ') lo stesso $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di prodotti scalari differenti. Allora:

$$(V, \phi) \text{ è isometrico a } (V, \phi')$$
$$\Updownarrow$$
$$(V, \phi) \text{ e } (V, \phi') \text{ hanno la stessa segnatura}$$

La segnatura di ϕ rispetto a V, per il Teorema di Sylvester, è facilmente calcolabile. Infatti, considerata una qualsiasi base ortogonale per ϕ di V, si ha:
- $i_+(\phi) = \# [a]_{ii} \ni' [a]_{ii} > 0$;
- $i_-(\phi) = \# [a]_{ii} \ni' [a]_{ii} < 0$;
- $i_0(\phi) = \# [a]_{ii} \ni' [a]_{ii} = 0$.

La segnatura, quindi, costituisce un invariante completo per la congruenza, nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

LA FORMA NORMALE DI WITT SU $\mathbb{C}$

Sia Φ un prodotto scalare non degenere associato ad un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale V.
Allora sappiamo che si può determinare una base ortonormale per Φ, tale che:

$$M_{\hat{B}}^{\hat{B}}(\Phi) = I_n$$

Verrà ora introdotta una nuova forma normale detta FORMA NORMALE DI WITT.
Supponiamo n pari:

$$\hat{B} = \{v_1, v_2 \dots v_{2k-1}, v_{2k}\}$$

Raggruppiamo i vettori a coppie, e definiamo P_i come segue:
$\forall\, i = 1 \dots k : P_i = \mathrm{Span}(v_{2i-1}, v_{2i})$

Ad esempio, $P_1 = \mathrm{Span}(v_{2\cdot 1-1}, v_{2\cdot 1}) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Alcune proprietà di questi spazi sono le seguenti:

- $\forall\, i = 1 \dots k : \dim P_i = 2$. La dimostrazione è banale;
- $\forall\, i = 1 \dots k : \Phi|_{P_i}$ è non degenere. Infatti le matrici hanno tutte rango massimo;
- $\forall\, i = 1 \dots k : \Phi|_{P_i}$ contiene un vettore isotropo non nullo. Infatti:

$$\mathcal{G} = \{v_{2i-1}, v_{2i}\}$$

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(\Phi|_{P_i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = (1, i) \text{ è isotropo non nullo, infatti:}$$

$$\Phi|_{P_i}(x, x) = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1^2 + (i)^2 = 0$$

Un piano con queste tre proprietà è detto PIANO IPERBOLICO.
Uno spazio vettoriale di dimensione $2k$ munito di prodotto scalare non degenere è allora somma diretta ortogonale di K piani iperbolici:

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{m}} P_i$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} I_2 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_2 \end{bmatrix}$$

LEMMA

Sia (P, Φ) un piano iperbolico, e sia $v \neq 0$ un vettore isotropo. Sia Φ non degenere.

Allora esiste $\mathcal{B}$ base di P tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dim.

Consideriamo un completamento di $\{v\}$ a base di P:

$$\mathcal{B} = \{v, t\}$$

Si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \end{bmatrix},$$

ma dato che Φ è non degenere, $a \neq 0$, da cui:

$$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = -a^2 \neq 0$$

Sia ora $z = \lambda v + \mu t$. Imponiamo che $\Phi(z,z) = 0$, $\Phi(v,z) = 1$. Allora:

- $\Phi(v, \lambda v + \mu t) = \lambda \cancel{\Phi(v,v)} + \mu \Phi(v,t) = \mu a \Rightarrow \mu = a^{-1}$;
- $\Phi(\lambda v + a^{-1} t, \lambda v + a^{-1} t) = \lambda^2 \cancel{\Phi(v,v)} + 2\lambda a^{-1} \Phi(v,t) + a^{-2} \Phi(t,t) =$
  $= 2\lambda \cancel{a^{-1}} \cdot \cancel{a} + a^{-2} b \Rightarrow \lambda = -\dfrac{a^{-2} b}{2}$

Dunque $\mathcal{C} = \{v, -\dfrac{a^{-2}b}{2} v + a^{-1} t\}$, ricavata da $\mathcal{B} = \{v, t\}$, è tale che:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Sia (V, Φ) un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione pari. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ è in FORMA NORMALE DI WITT, ossia:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Supponiamo ora che la dimensione sia dispari.

La base normalizzata sarà del tipo:

$$\mathcal{B} = \left\{ t, v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}, v_{2k} \right\}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} * & \\ & I_{2k} \end{bmatrix}$$

Allora in questo caso la forma normale di Witt sarà:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

LA FORMA NORMALE DI WITT SU $\mathbb{R}$

Supponiamo per semplicità $i_+(\phi) \geq i_-(\phi)$, ossia $p \geq q$.
Il caso opposto è analogo.
Data $\mathcal{B}$ ortogonale normalizzata per ϕ di V:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_p, w_1 \dots w_q\},$$

si può effettuare il seguente riordinamento:

$$\hat{\mathcal{B}} = \{v_1, w_1 \dots v_q, w_q, v_{q+1} \dots v_p\},$$

in modo da ottenere:

$$M_{\hat{\mathcal{B}}}(\phi) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix} & & & & & & \\ & \begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

In particolare:
$\forall i = 1 \dots q$: $\mathrm{Span}(v_i, w_i) = P_i$ piano iperbolico, visto che per ciascuna restrizione il vettore $(1, 1)$ è isotropo non nullo.

Si ottiene allora:

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{q}} P_i \ \hat{\oplus}\ A,$$

ove $A = \mathrm{Span}(v_{q+1} \dots v_p)$, dunque $\dim A = p - q$.
Il numero dei piani iperbolici è invece q.

In generale:

$$\dim A = |p - q|$$
$$\# P_i = \min\{p, q\}$$

Si noti infine che $\phi|_A$ è definito, in questo caso positivo.

SPAZI ANISOTROPI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare non degenere.
(V, Φ) si dice ANISOTROPO se e solo se:
$\forall v \in V, v \neq 0 : \Phi(v,v) \neq 0$

Procediamo allora ad una caratterizzazione degli spazi anisotropi su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda $\mathbb{C}$ la risposta la sappiamo già:

$$(V, \Phi)_{\mathbb{C}} \text{ è anisotropo} \iff \dim V = 1$$

Infatti, se $\dim V \geq 2$, considerando $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_j\}$ e la restrizione a $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ si ha (supposta $\mathcal{B}$ ortogonale normalizzata):

$$M^{\{v_1,v_2\}}_{\{v_1,v_2\}}(\Phi|_{\mathrm{Span}(v_1,v_2)}) = I_2,$$

dunque $(1, i) \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ è un vettore isotropo non nullo.
Se $\dim V = 1$, $V = \mathrm{Span}(v)$: dato che Φ è non degenere, $\Phi(v,v) \neq 0$, e V è anisotropo.

Per quanto riguarda $\mathbb{R}$, vale la seguente equivalenza:

$$(V, \Phi)_{\mathbb{R}} \text{ è anisotropo} \iff \Phi \text{ è definito}$$

Se Φ non è definito, allora, considerata una base $\mathcal{B}$ ortogonale normalizzata, si ha $p, q > 0$. Allora, se $[e_{ii}] = 1$ e $[e_{jj}] = -1$, il vettore $v_i + v_j$ è isotropo non nullo.
Se Φ è definito, con un argomentazione simile si ha $p = 0$ o $q = 0$. Supponiamo $q = 0$, l'altro caso è analogo. Allora:
$\forall i = 1 \dots n : e_i = 1 > 0$.
Sia $\hat{\mathcal{B}} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base ortogonale normalizzata, sia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ un vettore tale che $\Phi(v,v) = 0$. Allora

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

ossia $v = 0$.
Allora V è anisotropo.

OSSERVAZIONE

Analizziamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. A differenza di $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ non contiene le radici quadrate di tutti i suoi elementi positivi, dunque qualcosa potrebbe cambiare.

La dimostrazione usata prima per dimostrare che:

$$\Phi \text{ è definito} \Rightarrow (V, \Phi)_{\mathbb{R}} \text{ è anisotropo}$$

resiste ancora, dunque:

$$\Phi \text{ è definito} \Rightarrow (V, \Phi)_{\mathbb{Q}} \text{ è anisotropo}$$

Il viceversa non è più vero. Come controesempio:

$$\left(V = \mathbb{Q}^2 , \; A_\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) , \quad a = \frac{1}{3} \qquad b = -\frac{1}{2}$$

Φ è palesemente non definito, ma V risulta anisotropo.

Infatti:

$$v \in V , \; v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{3} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 = \frac{3}{2} x_2^2$$

Quest'equazione non ha soluzioni, eccetto $(0,0)$, poiché $\frac{3}{2}$ non è un quadrato in $\mathbb{Q}$.

ANALISI DI PRODOTTI SCALARI

Consideriamo $V = M(n, \mathbb{R})$ e il prodotto scalare così definito:

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B), \ \forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$$

Si può dimostrare che Φ è definito positivo, dunque la segnatura sarà $\sigma(\Phi) = (n^2, 0, 0)$. Infatti:

$$\forall A \neq 0 : \Phi(A, A) = \mathrm{Tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^{n} [A^t A]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A^t]_{ij} [A]_{ji} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ji} [A]_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ji}^2 > 0$$

Infatti: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ji}^2 = 0 \iff A = 0$.

Osserviamo ora che $(S(n, \mathbb{R}))^\perp = A(n, \mathbb{R})$.

Infatti, dato che Φ è definito positivo ed è quindi non degenere

$$\dim V = \dim S(n, \mathbb{R}) + \dim (S(n, \mathbb{R}))^\perp$$
$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \dim (S(n, \mathbb{R}))^\perp \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim (S(n, \mathbb{R}))^\perp = \frac{n(n-1)}{2} =$$
$$= \dim A(n, \mathbb{R})$$

Inoltre $A(n, \mathbb{R}) \subseteq (S(n, \mathbb{R}))^\perp$, infatti:

$$\forall A \in A(n, \mathbb{R}), \forall B \in S(n, \mathbb{R}) : \Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B) =$$
$$= \mathrm{Tr}(-A B^t) = -\mathrm{Tr}(B^t A) = -\Phi(B, A) = \Phi(B, A) \Rightarrow \Phi(A, B) = 0.$$

Consideriamo ora $V = M(n, \mathbb{R})$ munito del prodotto scalare ψ così definito:

$$\psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\psi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB) \quad \forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$$

Possiamo verificare che ψ è non degenere.

Sia $A \in V$ t.c. $\psi(A, B) = 0 \quad \forall B \in M(n, \mathbb{R})$

In particolare:

$$\psi(A, A^t) = \Phi(A, A) = 0,$$

ove Φ è il prodotto scalare definito prima.

Dato che Φ è definito positivo, $\lambda = 0$. Dunque ψ è non degenere.

Analizziamo il caso $n = 2$. Dunque:

$$\mathcal{B} : \{ E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \}$$

$$\psi(E_{ij}, E_{hk}) = \operatorname{tr}(E_{ij} E_{hk})$$

Ma:

$$E_{ij} E_{hk} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq h \\ E_{ik}, & \text{se } j = h \end{cases}$$

$$\operatorname{tr} E_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq k \\ 1, & \text{se } i = k \end{cases}$$

Dunque:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In generale:

$\forall A \in S(n, \mathbb{R}) : \psi(A, B) = \Phi(A, B)$, infatti $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A^t B)$.

Ma dato che Φ è definito positivo, $i_+(\psi) \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Analogamente, $\forall A \in A(n, \mathbb{R}) : \psi(A, B) = -\Phi(A, B) \Rightarrow i_-(\Phi) \geq \frac{n(n-1)}{2}$

Ma $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, dunque necessariamente

$$\sigma(\psi) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, 0 \right)$$

(Dunque, per $n = 2$, $\sigma(\psi) = (3, 1, 0)$).

ESERCIZI SUGLI SPAZI ORTOGONALI

- $A \subseteq B \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$

Dim.

$\forall v \in B^\perp : \Phi(v, b) = 0 \ \forall b \in B \Rightarrow \Phi(v, a) = 0 \ \forall a \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow v \in A^\perp \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, c.v.d.

- $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Dim.

$\forall v \in A^\perp \cap B^\perp : \Phi(v, x) = 0 \ \forall x \in A, \forall x \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(v, x) = 0 \ \forall x \in A + B \Rightarrow v \in (A+B)^\perp$;
$\forall v \in (A+B)^\perp : \Phi(v, x) = 0 \ \forall x \in A + B \Rightarrow \Phi(v, x) = 0$
$\forall x \in A, \forall x \in B \Rightarrow v \in A^\perp \cap B^\perp$, c.v.d.

Equivalentemente (riguardo la seconda implicazione):

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A + B \Rightarrow (A+B)^\perp \subseteq A^\perp \\ B \subseteq A + B \Rightarrow (A+B)^\perp \subseteq B^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow (A+B)^\perp \subseteq A^\perp \cap B^\perp .$$

- $(A \cap B)^\perp \supseteq A^\perp + B^\perp$; se Φ è non degenere, vale l'uguaglianza.

Dim.

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \Rightarrow A^\perp \subseteq (A \cap B)^\perp \\ A \cap B \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq (A \cap B)^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow A^\perp + B^\perp \subseteq (A \cap B)^\perp .$$

Se Φ è non degenere, considerata la relazione precedente per $A^\perp$ e $B^\perp$:

$$(A^\perp + B^\perp)^\perp = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} = A \cap B$$
$$\Downarrow$$
$$(A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = A^\perp + B^\perp = (A \cap B)^\perp, \text{ c.v.d.}$$

ALTRI ESERCIZI

Ex. Siano $A, B_h \in M(3, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_h = \begin{bmatrix} 0 & 2 & h \\ 2 & 1 & 0 \\ h & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ h \in \mathbb{R}$$

Per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha $A \sim_c B_h$?

Sappiamo che $A \sim_c B_h$ se e solo se $\sigma(A) = \sigma(B_h)$.

Calcoliamo $\sigma(A)$. Innanzitutto:

$$\det A = 3 \cdot (2-4) = -6 < 0 \Rightarrow i_0(A) = 0$$

Dato che il determinante è negativo, $i_-(A)$ è dispari. Le possibilità sono $(0,3,0)$ e $(2,1,0)$. Ma $A(v_1, v_1) = 3$, dunque A non è definito negativo. Perciò:

$$\sigma(A) = (2,1,0)$$

Calcoliamo ora $\sigma(B_h)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\det B_h = -h^2 - 4 < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}$$

Inoltre $B_h(v_2, v_2)$; dunque B_h non è definito negativo.

Dunque:

$\forall h \in \mathbb{R}: \sigma(B_h) = (2,1,0) \Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}: A \sim_c B_h$.

Ex. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare Φ di segnatura $\sigma(\Phi) = (2,1,0)$.

È vero o no che:

$\exists\, W$ sottospazio di V, $\dim W = 2$ t.c. $\sigma(\Phi|_W) = (0,1,1)$?

Per ipotesi:

$\exists\, Z$ sottospazio di V, $\dim Z = 2$ t.c. $\Phi|_Z$ è definito positivo.

Inoltre $\Phi|_W$ è semidefinito negativo.

Consideriamo $Z \cap W$. Si ha che $\dim Z \cap W \geq 1$, ma si ha avere che $\Phi|_{Z \cap W}$ è sia definito positivo che semidefinito negativo, e ciò è assurdo.

Dunque la domanda ha come risposta FALSO.

Ex. Sia Φ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $\sigma(\Phi) = (1, 2, 0)$. Sia $v \neq 0$ un vettore isotropo. Sia $U = (\mathrm{Span}(v))^\perp$.
È vero o no che $\sigma(\Phi|_U) = (0, 1, 1)$?

Dato che Φ è non degenere, $\dim U = 3 - 1 = 2$.
Inoltre $\Phi(v, v) = 0$, dunque $v \in U$. Inoltre:
$\forall u \in U$: $\Phi(u, v) = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Rad}(\Phi|_U) \Rightarrow \dim \mathrm{Rad}(\Phi|_U) \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow i_0(\Phi|_U) \geq 1$

Inoltre:
$\exists\, W$ sottospazio di V, $\dim W = 2$ t.c. $\Phi|_W$ è definito negativo.

Allora, dato che $\dim U \cap W \geq 1$, $\Phi|_{U \cap W}$ è definito negativo, quindi $i_-(\Phi) \geq 1$.
Allora la segnatura $\sigma(\Phi|_U)$ è necessariamente:

$$\sigma(\Phi|_U) = (0, 1, 1)$$

Dato che questa è uguale a quella presentata nella traccia, la risposta è: VERO.

Ex. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare definito positivo. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Consideriamo:

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$b(x, y) = \Phi(f(x), f(y))$$

Dimostrare che b è un prodotto scalare, e calcolare $\sigma(b)$.

Fissiamo x. Al variare di $y \in V$, sia f che Φ sono lineari, dunque la composizione è lineare. Il caso in cui si fissa y è analogo. Infine:

$$b(x, y) = \Phi(f(x), f(y)) = \Phi(f(y), f(x)) = b(y, x),$$

dunque b è un prodotto scalare.

Consideriamo:

$$\Phi(f(x), f(x)) = b(x, x) \begin{cases} > 0, & \text{se } f(x) \neq 0 \\ = 0, & \text{se } f(x) = 0 \end{cases}$$

Allora b è semidefinito positivo, quindi $i_-(b) = 0$.

Ora:

$\forall x \in \operatorname{Ker} f : b(x, y) = \phi(0, f(y)) = 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Rad} b$

$\forall x \in \operatorname{Rad} b : b(x, y) = 0 = \phi(f(x), f(y)) \quad \forall y \in V$

In particolare:

$\forall x \in \operatorname{Rad} b : b(x, x) = \phi(f(x), f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f$

Allora $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Rad} b$.

Dunque:

$$\sigma(b) = (\dim \operatorname{Imm} f, 0, \dim \operatorname{Ker} f)$$

FORMA DI SYLVESTER E FORMA DI WITT

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $\dim V = 2$, e sia $\mathcal{B}$ di V tale che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo una base $\mathcal{D}$ di V tale che $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Se:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\};$$

allora:

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}\, i} \right\} = \{w_1, w_2\}$$

$\mathcal{D}$ è effettivamente una base, infatti:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\, i} & -\frac{1}{\sqrt{2}\, i} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D} \text{ è una base.}$$

Inoltre:

$$\phi(w_1, w_1) = \phi\left(\frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\phi(v_1+v_2, v_1+v_2) = \frac{1}{2}\left[\cancel{\phi(v_1, v_1)} + \cancel{\phi(v_2, v_2)} + 2\phi(v_1, v_2)\right] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}(1) = 1;$$

$$\phi(w_2, w_2) = \phi\left(\frac{v_1-v_2}{\sqrt{2}\, i}, \frac{v_1-v_2}{\sqrt{2}\, i}\right) = -\frac{1}{2}\left[\cancel{\phi(v_1, v_1)} + \cancel{\phi(v_2, v_2)} - 2\phi(v_1, v_2)\right] = -\frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{2})(1) = 1;$$

$$\phi(w_1, w_2) = \phi\left(\frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_1-v_2}{\sqrt{2}\, i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\cancel{\phi(v_1, v_1)} - \cancel{\phi(v_2, v_2)} + \cancel{\phi(v_2, v_1)} - \cancel{\phi(v_1, v_2)}\right] = 0$$

Dunque:

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se V invece è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di V tale che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

allora esiste $\mathcal{D}$ di V tale che $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Infatti:

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}} \right\}$$

Infatti:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è una base}$$

Inoltre:

$\phi(w_1, w_1) = 1$, visto prima;

$\phi(w_1, w_2) = \left[\phi\cancel{(v_1, v_1)} + \phi\cancel{(v_2, v_1)} - \phi\cancel{(v_2, v_2)} - \phi\cancel{(v_1, v_2)}\right]\frac{1}{2} = 0$;

$\phi(w_2, w_2) = \frac{1}{2}\left[\phi\cancel{(v_1, v_1)} + \phi\cancel{(v_2, v_2)} - 2\phi(v_1, v_2)\right] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (-\cancel{2}) = -1$.

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

RIEPILOGO SULLE FORME NORMALI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con Φ non degenere.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le forme normali "diagonale cartesiana" e "di Witt" sono rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = I_n \quad ; \quad \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ oppure } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

(In particolare, la forma normale di Witt dipende dalla parità o disparità di $n = \dim V$).

Nel caso della forma normale diagonale cartesiana, esiste una una base ORTONORMALE per Φ, ossia tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = I_n$$

Nel caso della forma normale di Witt, le basi "normalizzate" sono le seguenti (a seconda che n sia pari o dispari):

$$\mathcal{B}_p = \{ s_1, t_1, \dots, s_k, t_k \}$$
$$\mathcal{B}_d = \{ u, s_1, t_1, \dots, s_k, t_k \}$$

Su $\mathbb{C}$, il rango di Φ è invariante completo per congruenza.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, invece, le forme normali "diagonale cartesiana" e "di Witt" sono le seguenti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \end{array}\right] \quad ; \quad 2k\left\{\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ & & & A \end{bmatrix}\right\} n-2k, \quad k = \min\{ i_+(\Phi), i_-(\Phi) \}$$

(In particolare, $A = I \vee A = -I$ a seconda che $\Phi|_A$ sia definito positivo o negativo, ossia a seconda che $i_+(\Phi) \geq i_-(\Phi)$ o $i_-(\Phi) \geq i_+(\Phi)$).

In questo caso ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), la segnatura è invariante completo per congruenza:

$$\sigma(\Phi) = (i_+(\Phi), i_-(\Phi), i_0(\Phi))$$

Nel caso della forma normale diagonale cartesiana, esiste quindi una base ortogonale normalizzata tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \end{array}\right]$$

Nel caso della forma normale di Witt, invece, le basi normalizzate sono del tipo:

$$\mathcal{B} = \{ s_1, t_1, \dots s_k, t_k, a_1 \dots a_h \}$$

Dato che il rango di ϕ (nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e la segnatura di ϕ (nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sono invarianti completi, anche il numero di piani iperbolici, in ogni caso, è invariante per congruenza.

Analizzeremo, in seguito, che tipo di invariante è il numero di piani iperbolici.

INDICE DI WITT

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare non degenere ($\mathbb{K}$ arbitrario).

Si definisce INDICE DI WITT la dimensione massima dei sottospazi di V tali che $\phi|_Z \equiv 0$:

$$\omega(\phi) \overset{def}{=} \max \left\{ \dim Z \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ è sottospazio di } V \\ \phi|_Z \equiv 0 \end{array} \right\}$$

LEMMA

Il numero dei piani iperbolici di (V, ϕ) è minore o uguale dell'indice di Witt:

$$\# hP \leq \omega(\phi)$$

Dim.

Sia $\mathcal{B}$ una base di V tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ è in forma normale di Witt:

$$\mathcal{B} = \{\ldots, z_1, t_1, \ldots z_k, t_k\}$$

È evidente che i piani iperbolici siano k. Ma si noti che:

$$Z = \operatorname{Span}(z_1, z_2 \ldots z_k)$$

$$\phi|_Z \equiv 0$$

$$\dim Z = k$$

Dunque:

$$\# hP = k = \dim Z \Rightarrow \# hP \leq \omega(\phi), \text{ c.v.d.}$$

LEMMA

(Valido su $\mathbb{K}$ arbitrario)

- $\omega(\phi) = 0 \iff \phi$ è anisotropo;
- $\omega(\phi) \leq \left[\frac{\dim V}{2}\right]$ (si legge "parte intera").

Dim.

- $\omega(\phi) = 0 \Rightarrow \forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v, v) \neq 0 \Rightarrow \phi$ è anisotropo;
  ϕ è anisotropo $\Rightarrow \forall v \in V, v \neq 0 : \phi(v, v) \neq 0 \Rightarrow \omega(\phi) = 0$.

- Sia W un sottospazio di V, $\dim W = w(\Phi) = k$, tale che $\Phi|_W \equiv 0$.

Allora, presa una base $\mathcal{B}$ di W e un completamento $\mathcal{B}'$ a base $\mathcal{B}$ di V:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}',$$

si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \left[\begin{array}{c|c} O_w & * \\ \hline * & * \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \}\, n-w \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{n-w}$$

Quindi:

- dato che Φ è non degenere: $\operatorname{rk} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = n$;
- $\operatorname{rk} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) \leq n - w + n - w = 2n - 2w$

Allora:

$$n \leq 2n - 2w \implies n \geq 2w \implies w \leq \left[\frac{n}{2}\right], \text{ c.v.d}$$

PROPOSIZIONE

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vale la seguente uguaglianza:

$$w(\Phi) = \# hP$$

Dim.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'asserto è banalmente vero. Infatti le forme normali di Witt su $\mathbb{C}$ sono due, e dipendono esclusivamente dalla parità di $n = \dim V$ (supposto Φ non degenere). Si ha:

$$w(\Phi) = \frac{n}{2} \quad \text{o} \quad w(\Phi) = \frac{n-1}{2}$$

In entrambi i casi

$$w(\Phi) = \left[\frac{n}{2}\right] = \# hP.$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sappiamo che:

$$\# hP = \min\{i_+(\Phi), i_-(\Phi)\} \leq w(\Phi)$$

Per assurdo, valga la disuguaglianza stretta: $<$.

Prima di continuare, siano $m = \min\{i_+(\Phi), i_-(\Phi)\}$,

$r = \max\{i_+(\Phi), i_-(\Phi)\}$. È banalmente vero che $m + r = n$.

Sia ora Z un sottospazio vettoriale di dimensione k, ove $\Phi|_Z$ è definito. Dato che per assurdo $\omega(\Phi) > m$, sia T un sottospazio di V di dimensione $\omega(\Phi)$ tale che $\Phi|_T \equiv 0$.

Allora:

$$\omega(\Phi) > m \Rightarrow \omega(\Phi) + r > m + r = n$$

Valutando la seguente formula di Grassmann:

$$\dim Z + T = \dim Z + \dim T - \dim Z \cap T,$$

dato che $\dim Z + T \leq n$, necessariamente $\dim Z \cap T \geq 1$.

Ma ciò è assurdo, in quanto in teoria si avrebbe $\Phi|_{Z \cap T}$ allo stesso tempo definito e identicamente nullo.

Dunque anche in questo caso $\# hP = \omega(\Phi)$, c.v.d.

DECOMPOSIZIONI CARTESIANE E DI WITT

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare ϕ non degenere.

Allora, secondo una DECOMPOSIZIONE CARTESIANA:

$$\mathcal{B} = \{ v_1 \dots v_p, w_1 \dots w_q \}$$

$$V = A_1^+ \hat{\oplus} \dots \oplus A_p^+ \hat{\oplus} A_1^- \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} A_q^-$$

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{p}} A_i^+ \hat{\oplus} \hat{\bigoplus_{i=1}^{q}} A_i^-,$$

ove $A_i^+ = \mathrm{Span}(v_i)$, $A_i^- = \mathrm{Span}(w_i)$.

In particolare:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \end{array} \right]$$

Invece, secondo una DECOMPOSIZIONE DI WITT:

$$\mathcal{B} = \{ z_1, t_1, \dots z_w, t_w, e_1 \dots e_h \}, \; w = w(\phi)$$

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{w}} P_i \hat{\oplus} A_h$$

$$V = P_1 \hat{\oplus} P_2 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} P_w \hat{\oplus} A_h,$$

ove A è anisotropo, con $\phi|_A$ definito (positivo o negativo).

In particolare:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} & & & \\ & \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \\ & & & & I_A \end{bmatrix},$$

ove I_A in realtà può essere una matrice identità o opposta dell'identità.

Prima di continuare, una definizione.

Si definisce GRUPPO ORTOGONALE per (V, Φ) il seguente sottogruppo di $GL(V)$:

$$O(\Phi) = \{ f \in GL(V) \mid f \text{ è un'isometria per } \Phi \} =$$
$$= \{ f \in GL(V) \mid \forall v, w \in V : \Phi(v,w) = \Phi(f(v), f(w)) \}$$

PROPOSIZIONE

Due decomposizioni cartesiane (rispettivamente di Witt) di $(V_{\mathbb{K}}, \Phi)$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sono tra loro congruenti.

Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è un caso particolare, che sarà comunque contemplato nella dimostrazione.

Dim.

Nel caso della decomposizione cartesiana:

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{p}} A_i^+ \ \hat{\oplus} \ \hat{\bigoplus_{j=1}^{q}} A_j^-$$
$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{p}} A_i'^+ \ \hat{\oplus} \ \hat{\bigoplus_{j=1}^{q}} A_j'^-$$

Inoltre, siano le seguenti basi normalizzate per (V, Φ):

$$\mathcal{B} = \{ v_1 \dots v_p, w_1 \dots w_q \}$$
$$\mathcal{B}' = \{ v_1' \dots v_p', w_1' \dots w_q' \}$$

Allora la tesi è equivalente a dimostrare che:

$\exists \ f \in O(\Phi) \ \ni' \ f(A_i^+) = A_i'^+ \ \wedge \ f(A_j^-) = A_j'^- \ \ \forall i, \forall j.$

Ma una tale funzione esiste (ed è unica), ed è quella così definita:

$$\begin{cases} \forall i = 1 \dots p : f(v_i) = v_i' \\ \forall j = 1 \dots q : f(w_j) = w_j' \end{cases}$$

Si ha:

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) \Rightarrow f \in O(\Phi)$, dunque la tesi.

Nel caso della decomposizione di Witt invece

$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{\omega}} P_i \ \hat{\oplus} \ A_h$$
$$V = \hat{\bigoplus_{i=1}^{\omega}} P_i' \ \hat{\oplus} \ A_h'$$

Inoltre:

$$\mathcal{B} = \{ z_1, t_1 \dots z_w, t_w, a_1 \dots a_h \}$$
$$\mathcal{B}' = \{ z'_1, t'_1 \dots z'_w, t'_w, a'_1 \dots a'_h \}$$

In maniera del tutto simile, e per gli stessi motivi, la funzione f così definita:

$$\begin{cases} \forall i = 1 \dots w : f(z_i) = z'_i \\ \forall i = 1 \dots w : f(t_i) = t'_i \\ \forall j = 1 \dots h : f(a_j) = a'_j \end{cases}$$

è un'isometria, dunque la tesi, c.v.d.

GRUPPO ORTOGONALE E RIFLESSIONI

Sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ($\mathbb{K}$ arbitrario) munito di prodotto scalare ϕ non degenere.

Sia $v \in V$, $v \neq 0$ un vettore non isotropo:

$$\phi(v,v) \neq 0$$

Allora sappiamo che:

$$V = \mathrm{Span}(v) \hat{\oplus} (\mathrm{Span}(v))^{\perp}$$

Se indichiamo $(\mathrm{Span}(v))^{\perp}$ con Z_v, allora:

$\forall\, w \in V : w = \lambda v + z,\ \lambda = \dfrac{\phi(w,v)}{\phi(v,v)},\ z \in Z_v$ in modo unico

Definiamo allora la seguente applicazione lineare:

$$\rho_v : V \longrightarrow V$$
$$\rho_v(w) = -\lambda v + z$$

L'applicazione lineare così definita è detta RIFLESSIONE PARALLELA a v.

LEMMA

- $\rho_v^2 = \mathrm{Id}$
- $\rho_v \in O(\phi)$.

Dim.

Sia $\mathcal{B} = \{v, w_1, w_2 \ldots w_{n-1}\}$ una base ortogonale per ϕ. Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho_v) = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right],$$

da cui è evidente che $\rho_v^2 = \mathrm{Id}$. Analogamente:

$$\rho_v^2(\lambda v + z) = \rho_v(-\lambda v + z) = \lambda v + z \implies \rho_v^2 = \mathrm{Id}.$$

Inoltre:

- $\phi(\lambda v + z, \lambda v + z) = \lambda^2 \phi(v,v) + \phi(z,z) + 2\lambda\, \cancel{\phi(v,z)}$;
- $\phi(\rho_v(\lambda v + z), \rho_v(\lambda v + z)) = \phi(-\lambda v + z, -\lambda v + z) = \lambda^2 \phi(v,v) + \phi(z,z) +$
$- 2\lambda\, \cancel{\phi(v,z)}$.

Allora $\rho_v \in O(\phi)$, c.v.d.

TEOREMA

$O(\Phi)$ è generato dalle riflessioni. Precisamente, ogni $f \in O(\Phi)$, $f \neq Id$, può essere ottenuta come composizione di un numero finito di riflessioni parallele ad opportuni vettori non isotropi:

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_k$$

Dim.

Useremo il principio di induzione su $n = \dim V \geq 0$.

CASO INIZIALE

$n = 0$

L'asserto è banalmente vero, in quanto $V = \{0\}$, dunque non esistono applicazioni diverse dall'identità.

$n = 1$

Si ha $V = Span(v)$, con $\Phi(v,v) \neq 0$ poiché Φ è non degenere. Ogni $f \in GL(V)$ è del tipo $f(v) = \lambda v$, $\lambda \neq 0$. Sia allora $f \in O(\Phi)$. Necessariamente:

$$\Phi(v,v) = \Phi(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \Phi(v,v) \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Esclusa l'identità, resta $f(v) = -v$, che è una riflessione.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Supponiamo (ipotesi aggiuntiva) che:

$\exists\, w \in V,\ w \neq 0,\ \Phi(w,w) \neq 0 \ \ni'\ f(w) = w$

Allora, supposto $\dim V = n$, $f \in O(\Phi)$:

$$V = Span(w) \oplus Z_w$$

$$f(w) = w \Rightarrow Z_w \text{ è } f\text{-invariante}$$

Inoltre $\Phi|_{Z_w}$ è non degenere. Dunque, considerato:

$$(Z_w, \Phi|_{Z_w}),$$

si ha $f|_{Z_w} \in O(\Phi|_{Z_w})$, $\dim Z_w = n-1$.

Per ipotesi induttiva:

$$f|_{Z_w} = \hat{\rho}_1 \circ \dots \circ \hat{\rho}_k,$$

per opportune riflessioni parallele a vettori di Z_w (e quindi anche di V) non isotropi.

Ogni $\tilde{\rho}_j$ infine, si estende in modo naturale a $\rho_j \in O(\Phi)$.
Inoltre:

$\forall\, j = 1 \dots k : \rho_j(w) = w$

Dunque:

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_k$$

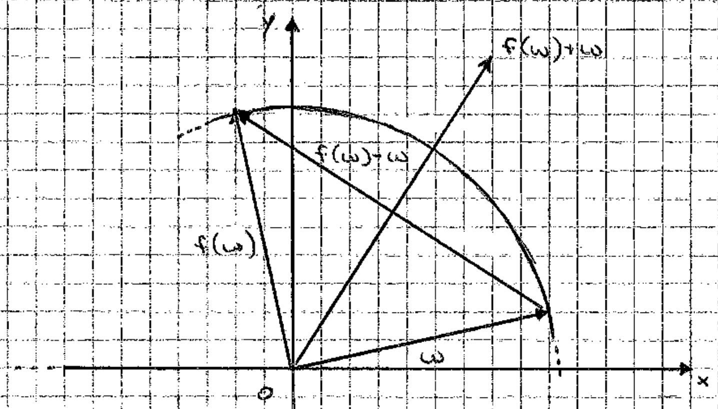
Supponiamo ora che:

$\forall\, w \in V,\ w \neq 0,\ \Phi(w,w) \neq 0 : f(w) \neq w$

Se dimostrassimo che esiste una riflessione $\rho \in O(\Phi)$ tale che $(\rho \circ f)(w) = w$, allora:

$$\rho \circ f = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$$
$$\rho \circ \rho \circ f = \rho \circ \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$$
$$f = \rho \circ \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$$

Il caso $V = \mathbb{R}^2$ può essere d'aiuto:



I vettori $(f(w)+w)$ e $(f(w)-w)$, almeno in $\mathbb{R}^2$, sono ortogonali. Ma, tenuto conto che $f \in O(\Phi)$, in generale:

$\Phi(f(w)+w,\ f(w)-w) = \Phi(f(w), f(w)) - \Phi(w,w) + \Phi(w, \cancel{f(w)}) +$
$- \Phi(\cancel{f(w)}, w) = \Phi(f(w), f(w)) - \Phi(w,w) = 0$

Dunque i vettori $(f(w)+w)$, $(f(w)-w)$ sono tra loro ortogonali in ogni caso.

I due vettori sopra citati non possono essere entrambi isotropi. Se infatti lo fossero (si ricordi che $\mathrm{car}(K) \neq 2$):

$$\begin{cases} \Phi(f(w)-w,\ f(w)-w) = 0 \\ \Phi(f(w)+w,\ f(w)+w) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(f(w), f(w)) + \Phi(w,w) - 2\Phi(f(w), w) = 0 \\ \Phi(f(w), f(w)) + \Phi(w,w) + 2\Phi(f(w), w) = 0 \end{cases}$$

Allora, valutando la somma:

$$2\Phi(f(w), f(w)) + 2\Phi(w,w) = 4\Phi(w,w) \neq 0 \ \lightning$$

Ciò è assurdo, perché $4 \neq 0$ in $\mathbb{K}$, e $\Phi(w,w) \neq 0$ per ipotesi.

Osserviamo infine che:

$$w = \frac{1}{2}(f(w)+w) - \frac{1}{2}(f(w)-w)$$

$$f(w) = \frac{1}{2}(f(w)-w) + \frac{1}{2}(f(w)+w)$$

Siano, per comodità, $u = f(w) - w$, $u' = f(w) + w$.

Supponiamo u non isotropo. Allora:

$$V = \operatorname{Span}(u) \hat{\oplus} \mathcal{Z}_u$$

$$\rho_u(f(w)) = \rho_u\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}(f(w)+w)\right) = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(f(w)+w) =$$

$$= \frac{1}{2}(w - f(w)) + \frac{1}{2}(f(w)+w) = w$$

Dunque:

$\exists\ \rho_u \in O(\Phi) \ \ni' (\rho_u \circ f)(w) = w$

Ritornando al caso precedentemente discusso:

$$\rho_u \circ f = \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_k$$

$$f = \rho_u \circ \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_k$$

Supponiamo ora u isotropo (dunque u' non isotropo).

Innanzitutto osserviamo che, presa $\mathcal{B} = \{t_1 \ldots t_m\}$ base ortogonale per Φ di V, allora

$$-\mathrm{Id} = \rho_{t_1} \circ \ldots \rho_{t_m}$$

Osserviamo allora che:

$$\rho_{u'}((-f)(w)) = \rho_{u'}\left(-\frac{1}{2}u' - \frac{1}{2}(f(w)-w)\right) = \frac{1}{2}u' - \frac{1}{2}(f(w)-w) =$$

$$= \frac{1}{2}(w + f(w)) - \frac{1}{2}(f(w)-w) = w$$

Dunque:

$$\rho_{u'} \circ (-\mathrm{Id}) \circ f = \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_k$$

$$f = \rho_{t_1} \circ \ldots \circ \rho_{t_m} \circ \rho_{u'} \circ \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_k \text{ , c.v.d.}$$

SOTTOSPAZI CONGRUENTI E TEOREMA DI ESTENSIONE

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sia (V, ϕ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di prodotto scalare ϕ non degenere.
Siano W_1 e W_2 sottospazi di V.

Essi si dicono CONGRUENTI se:
$\exists\ f \in O(\phi)$ t.c. $f(W_1) = W_2$

Chiaramente, condizione necessaria affinché due spazi siano congruenti è che essi abbiano la stessa dimensione.

Altra condizione necessaria affinché W_1 e W_2 siano congruenti è che:

$$f| : (W_1, \phi|_{W_1}) \longrightarrow (W_2, \phi|_{W_2})$$

sia un'isometria. A priori l'esistenza di $f \in O(\phi)$ non garantisce che una qualche restrizione $\beta : W_1 \to W_2$ sia un'isometria.

Dimostriamo ora un teorema, detto TEOREMA DI ESTENSIONE, che dimostra che tale condizione non è solo necessaria, ma anche sufficiente. Dimostreremo il caso particolare in cui $\phi|_{W_1}$ e $\phi|_{W_2}$ sono entrambi non degeneri.

TEOREMA (DI ESTENSIONE) - CASO PARTICOLARE
Se esiste un'isometria $\beta : (W_1, \phi|_{W_1}) \longrightarrow (W_2, \phi|_{W_2})$, e inoltre $\phi|_{W_1}$ e $\phi|_{W_2}$ sono non degeneri, allora esiste $f \in O(\phi)$ tale che $f|_{W_1} = \beta$. Di conseguenza, W_1 e W_2 sono congruenti se e solo se sono isometrici, una volta muniti della restrizione di ϕ a loro associata.

Dim.
Useremo il principio di induzione su $n = \dim W_1 \geq 0$.

CASO INIZIALE $n = 0$
In questo caso $W_1 = W_2 = \{0\}$, dunque ogni $f \in O(\phi)$ è tale che $f(0) = 0$. L'asserto allora è banalmente vero.

PASSO INDUTTIVO

$m-1 \Rightarrow m$

Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base ortogonale per W_1 rispetto a $\Phi|_{W_1}$.
Poiché $\Phi|_{W_1}$ è non degenere, ogni w_j è non isotropo.

Dato che β è un'isometria, si ha che $\mathcal{B}' = \{u_1 = \beta(w_1), \dots, u_m = \beta(w_m)\}$ è una base di W_2 ortogonale per $\Phi|_{W_2}$ formata da vettori non isotropi: anche $\Phi|_{W_2}$, allora, è non degenere.

Siano allora $W_1' = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{m-1})$ e $W_2' = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_{m-1})$. Sia

$$\beta' \overset{def}{=} \beta| : W_1' \to W_2'$$

Applicando l'ipotesi induttiva:

$\exists\ g \in O(\Phi)$ t.c. $g|_{W_1'} = \beta'$

Se $g(w_m) = u_m$, g è l'isometria cercata, e abbiamo concluso.

Se $g(w_m) \neq u_m$, allora consideriamo i seguenti vettori:

$$\alpha = g(w_m) - u_m \quad ; \quad \alpha' = g(w_m) + u_m$$

Per quanto visto precedentemente, essi sono ortogonali e non entrambi isotropi.

Se α è non isotropo, allora:

$$\rho_\alpha(g(w_m)) = u_m$$
$$(\rho_\alpha \circ g)|_{W_1'} = g|_{W_1'} = \beta'$$

Dunque $\rho_\alpha \circ g \in O(\Phi)$ è l'estensione di β cercata.

Se α' è non isotropo, allora:

$$\rho_{\alpha'}(g(w_m)) = -u_m$$
$$(\rho_{u_m} \circ \rho_{\alpha'} \circ g)(w_m) = u_m$$

Dunque $\rho_{u_m} \circ \rho_{\alpha'} \circ g \in O(\Phi)$ è l'estensione di β cercata, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Si noti che in questo teorema non si fa ipotesi su $\mathbb{K}$.

ESERCIZI DAL "FORTUNARIO"

1. Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e siano $f: V \to W$ e $g: V \to Z$ applicazioni lineari. Si dimostri che:

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g \iff \exists\, L: W \to Z \text{ lineare tale che } g = L \circ f$$

Dimostriamo prima la seconda implicazione. Per ipotesi:
$\exists\, L: W \to Z$ lineare tale che $g = L \circ f$

Allora:
$\forall\, x \in V: \quad g(x) = (L \circ f)(x)$
In particolare:
$\forall\, x \in \operatorname{Ker} f: \quad g(x) = L(f(x)) = L(0) = 0 \quad \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} g$

Allora $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

Dimostriamo ora la prima implicazione. Per ipotesi, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.
Consideriamo una base di $\operatorname{Ker} f$ estesa a base di V:

$$\mathcal{B}_V = \{ v_1 \dots v_k, \overline{v_{k+1}} \dots \overline{v_n} \}$$

Dato che:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Imm} f,$$

i vettori $f(\overline{v_{k+1}}), \dots, f(\overline{v_n})$ sono una base di $\operatorname{Imm} f$. Estendiamola a base di W:

$$\mathcal{B}_W = \{ f(\overline{v_{k+1}}) \dots f(\overline{v_n}), w_1 \dots w_p \}$$

Imponiamo allora:

$$L(f(\overline{v_i})) = g(\overline{v_i}) \qquad \forall\, i = k+1 \dots n$$
$$L(w_j) = 0 \qquad \forall\, j = 1 \dots p,$$

e otteniamo l'applicazione lineare L cercata.

2. a) Sia $A \in M(m, \mathbb{K})$ una matrice di rango r. Si dimostri che ogni minore B di A ottenuto scegliendo r righe e r colonne linearmente indipendenti di A è invertibile.

b) Si dimostri che il rango di una matrice simmetrica M coincide con il massimo degli ordini dei minori invertibili di M aventi la diagonale sulla diagonale di M.

a) Consideriamo la matrice $A \in M(m, \mathbb{K})$ e, dato r, con $r \leq \min\{m, n\}$, sia $\hat{A} \in M(r, n, \mathbb{K})$ la matrice ottenuta da A considerando solamente r righe linearmente indipendenti di A.

Allora chiaramente $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \hat{A} = r$, visto che il rango di una matrice può essere visto come rango per righe o per colonne.

Dato che $\operatorname{rk} A = r$, esistono r-uple di colonne linearmente indipendenti. Scegliamo allora r colonne linearmente indipendenti di $\hat{A}$, e consideriamo $B \in M(r, \mathbb{K})$.

Dato che, se $k_1, k_2 \dots k_r$ sono gli indici delle colonne selezionate, si ha che:

$$\forall\, j \neq k_1, k_2 \dots k_r \; : \; \hat{A}^j = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} \hat{A}^{k_i}$$

allora:

$$\forall\, j \neq k_1 \dots k_r \; : \; B^j = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} B^{k_i}$$

Dato che $B^{k_1} \dots B^{k_r}$ sono r colonne e $\operatorname{rk} \hat{A} = r$, $B^{k_1} \dots B^{k_r}$ sono linearmente indipendenti. Allora $B \in M(r, \mathbb{K})$ ha rango r, quindi è invertibile.

b) Innanzitutto, notiamo che un minore di una matrice quadrata ha la diagonale sulla diagonale della matrice originale se e solo se gli indici delle righe e delle colonne selezionate sono gli stessi.

Sappiamo che, se $\operatorname{rk} M = r$, allora r è il massimo degli ordini dei minori invertibili. Inoltre, dal punto (a), unito al fatto che $M \in S(n, \mathbb{K})$, selezionate r colonne linearmente indipendenti, e considerando le righe aventi gli stessi indici, otteniamo $B \in GL(r, \mathbb{K})$ del tipo voluto.

Di qui la tesi.

3. Sia $M \in T(n, \mathbb{R})$ una matrice tale che sulla diagonale vi sono solamente 1. Si dimostri che, se esiste $k \geq 1$ tale che $M^k = I$, allora $M = I$.

Per induzione su n.

CASO INIZIALE

Per $n=1$ è banalmente vero; analizziamo $n=2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque, se per qualche k si ha $ka = 0$, allora $a = 0$ (in $\mathbb{R}$).

Dunque $M^k = I \Rightarrow M = I$.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Sia:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & O & & 1 \end{bmatrix} \in T(n, \mathbb{R})$$

Per quanto visto prima, l'elemento di posto $(1,2)$ di M^k sarà ka; perciò: $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $M^k = I \Rightarrow a = 0$.

Dunque, riconsideriamo M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & O & a & \dots \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & \\ O & & & \ddots \end{bmatrix} \in T(n, \mathbb{R})$$

Anche in questo caso, l'elemento di M^k di posto $(1,3)$, in virtù dello 0 in posizione $(1,2)$, sarà ka; stesso discorso di prima, quindi. Induttivamente otteniamo:

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & * \\ \vdots & & 1 & \\ 0 & O & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline 0 & B \end{array}\right], \quad B \in T(n-1, \mathbb{R}) \quad ; \quad M^k = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & B^k \end{array}\right]$$

Applicando l'ipotesi induttiva, allora, si ottiene la tesi. Infatti, se $B^k = I \Rightarrow B = I$, allora $M^k = I \Rightarrow M = I$.

4. Si consideri la seguente successione di spazi vettoriali e applicazioni lineari:

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0,$$

e si suppone che per ogni $i = 0, 1 \dots n-1$ valga:

$$\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Imm} f_{i+1}.$$

Si dimostri che:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$$

Analizziamo la prima parte della stringa. Siano $n_0 = 0, n_1 \dots n_n, n_{n+1} = 0$ le dimensioni degli spazi vettoriali. Abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{f_0} & V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_3 \dots \\ 0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 \end{array}$$

Essendo il primo spazio vettoriale noto ($\dim 0 = 0$), si ha:

- $\dim \operatorname{Ker} f_0 = 0$;
- $\dim \operatorname{Ker} f_1 = \dim \operatorname{Imm} f_0 = 0$;
- $\dim \operatorname{Ker} f_2 = \dim \operatorname{Imm} f_1 = n_1 - 0 = n_1$;
- $\dim \operatorname{Ker} f_3 = \dim \operatorname{Imm} f_2 = n_2 - n_1$;
- $\dim \operatorname{Ker} f_4 = \dim \operatorname{Imm} f_3 = n_3 - n_2 + n_1$;

Induttivamente, una volta arrivati all'$n+1$-esimo spazio, possiamo affermare che:

$$0 = \dim \operatorname{Imm} f_n = \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i,$$

dunque la tesi. Più in generale:

$$\dim \operatorname{Imm} f_n = \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i,$$

anche se $\dim \operatorname{Imm} f_n \neq 0$.

6. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right], \quad A \in M(n, \mathbb{K}), \quad B \in M(q, \mathbb{K})$$

Analizziamo prima $\det M$ in funzione di $\det A$ e $\det B$.
Si noti che:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$\det M = \det B \cdot \det A$$

Allora:

$$P_M(x) = \det(M - xI) = \det(B - xI) \cdot \det(A - xI) =$$
$$= P_A(x) \cdot P_B(x)$$

17. Si dimostri che il polinomio minimo della matrice:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi di A e B.

Sia $q_M(x)$ il polinomio minimo di M; $q_A(x)$ e $q_B(x)$ quelli di A e B.
Allora:

$$q_M(M) = \left[\begin{array}{c|c} q_M(A) & 0 \\ \hline 0 & q_M(B) \end{array}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_A(x) \mid q_M(x) \\ q_B(x) \mid q_M(x) \end{cases}$$

Allora $m.c.m.(q_A(x), q_B(x)) \mid q_M(x)$.

D'altronde, sia $g = m.c.m.(q_A(x), q_B(x))$, si ha:

$$g(M) = 0,$$

noto che $g(A) = 0$ e $g(B) = 0$.
Allora:

$$g \in I(M) \Rightarrow q_M(x) \mid g \Rightarrow g = q_M(x), \text{ c.v.d.}$$

7. Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con $\dim V = n$, $\dim W = m$. Sia V_1 un sottospazio vettoriale di V di dimensione $n_1 \leq n$; sia W_1 un sottospazio vettoriale di W di dimensione $m_1 \leq m$. Si consideri:

$$\mathbb{F} = \{ f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Ker} f \supseteq V_1 \ ; \ \operatorname{Imm} f \subseteq W_1 \}$$

Si dimostri che $\mathbb{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V,W)$, e se ne calcoli la dimensione.

- $0 \in \mathbb{F}$, visto che $\operatorname{Ker} 0 = V \supseteq V_1$ e $\operatorname{Imm} 0 = 0 \subseteq W_1$;
- siano $f, g \in \mathbb{F}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Allora:
- $\forall\, v \in V_1 : (\lambda f + \mu g)(v) = \lambda \cdot f(v) + \mu \cdot g(v) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow V_1 \subseteq \operatorname{Ker} f$;
- $\forall\, w \in V : f(w), g(w) \in W_1 \Rightarrow \operatorname{Imm}(\lambda f + \mu g) \subseteq W_1$.

Per quanto riguarda la dimensione, consideriamo delle basi di V_1 e W_1 estese a basi di V e W:

$$\mathcal{B}_V = \{ v_1 \ldots v_{n_1}, v'_{n_1+1} \ldots v'_n \}$$
$$\mathcal{B}_W = \{ w_1 \ldots w_{m_1}, w'_{m_1+1} \ldots w'_m \}$$

Allora, sia $f \in \mathbb{F}$:

- $\forall\, v \in V_1 : f(v) = 0$;
- $\forall\, v \in V : f(v) \in W_1$.

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \underbrace{0}_{n_1} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \}\, m_1 \\ \end{array}$$

Dunque $\dim \mathbb{F} = m_1 (n - n_1)$.

9. Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^8 \to M(3,\mathbb{R})$ tale che:

$$\operatorname{Imm} f \supseteq \{A \in M(3,\mathbb{R}) \mid \operatorname{rk} A = 2\}$$

Certamente vale $M(3,\mathbb{R}) \supseteq \operatorname{Imm} f \supseteq \mathbb{S}$, dove con $\mathbb{S}$ vogliamo indicare il minimo sottospazio vettoriale che contiene tutte le matrici di rango 2.

Notiamo ora che:

- la matrice nulla si ottiene facendo la differenza tra due matrici identiche, viene esse di rango 2;
- ogni matrice di rango 3 si può scrivere come somma di due matrici di rango 2, visto che C_1, C_2, C_3 sono linearmente indipendenti:

$$A = \left[C_1 \middle| C_2 \middle| C_3 \right] = B + C = \left[C_1 \middle| \tfrac{1}{2}C_2 \middle| 0 \right] + \left[0 \middle| \tfrac{1}{2}C_2 \middle| C_3 \right]$$

- ogni matrice di rango 1 si può scrivere come differenza di una matrice di rango 3 e una di rango 2, dunque come somma di 3 matrici di rango 2. Senza perdere di generalità, supponiamo che C_1 sia non nulla, e che che $C_2 = \lambda C_1$, $C_3 = \mu C_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora esistono certamente due colonne B_1 e B_2 tali che:

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{C_1, B_1, B_2\}$$

Dunque:

$$A = \left[C_1 \middle| \lambda C_1 \middle| \mu C_1 \right] = B - C = \left[C_1 \middle| \lambda C_1 + B_1 \middle| \mu C_1 + B_2 \right] - \left[0 \middle| B_1 \middle| B_2 \right]$$

Allora:

$$M(3,\mathbb{R}) \supseteq \operatorname{Imm} f \supseteq \mathbb{S} \supseteq M(3,\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Imm} f = \mathbb{S} = M(3,\mathbb{R})$$

In particolare:

$$\dim \operatorname{Imm} f = 9 > 8 = \dim \mathbb{R}^8$$

Dunque una tale applicazione lineare non esiste.

STIME SUL NUMERO DI RIFLESSIONI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\mathbb{K}$ campo arbitrario, munito di un prodotto scalare Φ non degenere. Sia $n = \dim V$. Definiamo:

$$C(\Phi) = \min \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall f \in O(\Phi),\ f \neq \mathrm{Id},\ f \text{ si può scrivere come composizione di } k \text{ riflessioni, con } k \leq n \}$$

Vogliamo stimare $C(\Phi)$.

PROPOSIZIONE

$\forall\ \Phi$ su V, se $\dim V = n$:

$$C(\Phi) \geq n$$

Dim.

Esibiamo una isometria che non può essere decomposta in meno di n riflessioni.

Supponiamo per assurdo che $k < n$, e:

$$-\mathrm{Id} = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$$

Consideriamo allora il luogo dei punti fissi:

$$\mathrm{Fix}(-\mathrm{Id}) = \{ v \in V \mid (\rho_1 \circ \rho_2 \dots \rho_k)(v) = v \}$$

Sappiamo che $\mathrm{Fix}(-\mathrm{Id}) = \{0\}$, dunque $\dim \mathrm{Fix}(-\mathrm{Id}) = 0$.

Ma dato che per ogni riflessione il luogo dei punti fissi è un iperpiano, si avrebbe:

$$\mathrm{Fix}(\rho_j) = \mathrm{Fix}(\rho_{v_j}) = (\mathrm{Span}(v_j))^{\perp}$$
$$\dim \mathrm{Fix}(\rho_j) = n-1$$

$$\mathrm{Fix}(-\mathrm{Id}) \supseteq \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Fix}(\rho_j), \quad \dim \left[\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Fix}(\rho_j) \right] = n-k > 0 \ \lightning$$

Dunque $(-\mathrm{Id})$ è necessariamente composizione di n riflessioni e $C(\Phi) \geq n$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Vale la seguente stima:

$$C(\Phi) \leq C(n),$$

ove $C(n)$ è un valore univocamente determinato dalla dimensione di V.

Dim.

Ricordando la dimostrazione per induzione su $n = \dim V$ usata per dimostrare che le riflessioni generano $O(\Phi)$, ragioniamo per induzione su $n = \dim V$.

CASO INIZIALE

$n = 1$

In questo caso, ogni $f \in O(\Phi)$, $f \neq Id$ è una riflessione. Dunque:

$\forall\ \Phi$ su V, $\dim V = 1$: $C(\Phi) = C(1) = 1$

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Supponiamo che:

$\forall\ \Phi$ su V, $\dim V = n-1$: $C(\Phi) \leq C(n-1)$

Ora:

- se $\exists\ w \neq 0$, $w \in V$, $\Phi(w,w) \neq 0$ $\ni'$ $f(w) = w$, allora:

$$C(\Phi) = C(n-1);$$

- se $\forall\ w \neq 0$, $w \in V$, $\Phi(w,w) \neq 0$: $f(w) \neq w$, $f(w) - w$ non isotropo:

$$C(\Phi) = C(n-1) + 1;$$

- se $\forall\ w \neq 0$, $w \in V$, $\Phi(w,w) \neq 0$, $f(w) \neq w$: $f(w) - w$ è isotropo $\Rightarrow$ $f(w) + w$ non isotropo:

$$C(\Phi) = C(n-1) + n + 1.$$

Definendo allora in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} C(1) = 1 \\ C(n) = C(n-1) + n + 1 \end{cases}$$

si ha quanto voluto, c.v.d.

COROLLARIO

Dato che $C(\Phi) \leq C(n)$, e $C(\Phi) \geq n$:

$$C(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROPOSIZIONE

Se Φ è anisotropo:

$$C_{an}(n) = n$$

Dim.

Sappiamo che in generale $C(\Phi) \geq n$.

Notiamo però che:

$$\begin{cases} C_{an}(1) = 1 \\ C_{an}(n) = C_{an}(n-1) + 1 \end{cases}$$

Di qui la tesi, ossia:

$$C_{an}(n) = n, \text{ c.v.d.}$$

Nel caso anisotropo, dunque, $C_{an}(\Phi) \leq n$, da cui:

$\forall\ \Phi$ anisotropo su V, $\dim V = n$: $C_{an}(\Phi) = n$.

TEOREMA (DI CARTAN - DIEUDONNÉ) (SOLO ENUNCIATO)

$\forall\ (V, \Phi)$, $\dim V = n$, Φ non degenere

$$C(\Phi) \leq C(n) = n$$

RIFLESSIONI E PUNTI FISSI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$, munito di un prodotto scalare Φ anisotropo.
Per ogni $f \in O(\Phi)$, definiamo:

$$\mathrm{Fix}(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

OSSERVAZIONE
Si ha:

$$\dim \mathrm{Fix}(f) = n \Leftrightarrow f = \mathrm{Id}$$

Dim.
Ovvia, c.v.d.

LEMMA 1
Sia $f \in O(\Phi)$ tale che $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$. Allora:
$\exists\, \rho$ riflessione tale che $\dim \mathrm{Fix}(\rho \circ f) = 1$.

Dim.
Sia $w \in V$, $w \neq 0$. Allora w è non isotropo, $f(w) \neq w$.
Consideriamo il vettore anisotropo $u = f(w) - w \neq 0$. Si ha:

$$\rho_u(f(w)) = w$$
$$(\rho_u \circ f)(w) = w$$
$$\dim \mathrm{Fix}(\rho_u \circ f) \geq 1$$

Ora:

$$V = \mathrm{Span}(u) \hat{\oplus} (\mathrm{Span}(u))^{\perp} =$$
$$= \mathrm{Span}(u) \hat{\oplus} Z_u,$$

con $\dim Z_u = n-1$. Inoltre, $\mathrm{Fix}(\rho_u) = Z_u$.

Consideriamo allora $f^{-1}(Z_u)$, che (visto che $f \in O(\Phi)$) ha dimensione $(n-1)$.
Inoltre:

$$\rho_u \circ f\big|_{f^{-1}(Z_u)} = f\big|_{f^{-1}(Z_u)}$$

Queste due funzioni (equivalenti) non hanno punti fissi per ipotesi, infatti:

$$\mathrm{Fix}(f) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \cap f^{-1}(Z_u) = \{0\}$$

Dato che $\dim f^{-1}(\mathcal{Z}_u) = n-1$, si ha:

$$\dim Fix(\rho_u \circ f) \leq 1,$$

da cui:

$$\dim Fix(\rho_u \circ f) = 1, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Se $\dim Fix(f) = k$, allora f è composizione di al minimo $(n-k)$ riflessioni, nel senso che si può esprimere in tale modo.

Dim.

Innanzitutto:

$$V = Fix(f) \hat{\oplus} (Fix(f))^{\perp} =$$
$$= Fix(f) \hat{\oplus} H$$

Abbiamo:

- $\dim H = n-k$;
- $\phi|_H$ è anisotropo;
- $f(H) = H$, visto che f è un'isometria;
- $f|_H \in End(H)$, anzi addirittura $f|_H \in O(\phi|_H)$.

Per il lemma appena dimostrato:

$\exists\, u \in H,\ u \neq 0$ t.c. $\hat{\rho}_u$ è la riflessione in H parallela a u e $\dim(Fix(\hat{\rho}_u \circ f|_H)) = 1$.

Possiamo estendere la riflessione di H parallela a u $(\hat{\rho}_u)$ a una riflessione di V parallela a u (ρ_u).

Abbiamo:

$$Fix(\rho_u) = (Span(u))^{\perp} = \mathcal{Z}_u$$

Inoltre:

$\forall\, v \in Fix(f): (\rho_u \circ f)(v) = \rho_u(v) = v$, visto che che $u \in H$

Allora:

$$Fix\ f \subseteq Fix(\rho_u)$$

Anzi, volendo essere più precisi:

$$Fix(\rho_u \circ f) \supseteq Fix(f) \oplus Fix(\hat{\rho}_u \circ f|_H)$$

$$\dim Fix(\rho_u \circ f) \geq k+1$$

Ma notiamo ora che:
$\forall x \in Fix(\rho_u \circ f)$, dato che:

$$V = Fix(f) \hat{\oplus} (Fix(f))^\perp$$

si ha:

$$x = a + b \quad , a \in Fix(f) \quad , b \in H$$

Applicando $(\rho_u \circ f)$ si ha:

$$(\rho_u \circ f)x = (\rho_u \circ f)a + (\rho_u \circ f)(b)$$
$$x = a + (\hat{\rho_u} \circ f|_H)(b)$$
$$\Downarrow$$
$$(\hat{\rho_u} \circ f|_H)(b) = b \quad , b \in Fix(\hat{\rho_u} \circ f|_H)$$

Dunque:

$$Fix(\rho_u \circ f) \subseteq Fix(f) \oplus Fix(\hat{\rho_u} \circ f|_H)$$

$$\dim Fix(\rho_u \circ f) \leq K + 1$$

Allora vale l'uguaglianza:

$$Fix(\rho_u \circ f) = Fix(f) \oplus Fix(\hat{\rho_u} \circ f|_H)$$

$$\dim Fix(\rho_u \circ f) = K + 1$$

Iterando, si ha che:
$\exists \; \rho_1, \rho_2 \ldots \rho_{n-k}$ riflessioni tali che:

$$\dim Fix(\rho_{n-k} \circ \ldots \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ f) = n$$

Allora:

$$\rho_{n-k} \circ \ldots \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ f = Id$$

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_{n-k} \quad , c.v.d.$$

TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE

Sia (V, ϕ) uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ munito di un prodotto scalare.

Consideriamo lo spazio duale:

$$V^* = Hom(V, \mathbb{K})$$

Costruiamo la seguente applicazione:

$$F_\phi : V \longrightarrow V^*$$
$$v \longrightarrow \varphi_v : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

Un modo è il seguente:

$$F_\phi : V \longrightarrow V^*$$
$$v \longrightarrow \varphi_v : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\omega \longrightarrow \phi(v, \omega)$$

Effettuiamo ora alcune verifiche:

- $\forall\, v : \varphi_v \in V^*$, cioè φ_v è lineare.

  Dim.

  $\varphi_v(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \phi(v, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \phi(v, \alpha\omega_1) + \phi(v, \beta\omega_2) =$
  $= \alpha\phi(v, \omega_1) + \beta\phi(v, \omega_2) = \alpha \cdot \varphi_v(\omega_1) + \beta \cdot \varphi_v(\omega_2)$, c.v.d.

- F_ϕ è lineare.

  Dim.

  $$F_\phi(\alpha v_1 + \beta v_2) : V \longrightarrow V^*$$
  $$\alpha v_1 + \beta v_2 \longrightarrow \varphi_{\alpha v_1 + \beta v_2} : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
  $$\omega \longrightarrow \phi((\alpha v_1 + \beta v_2), \omega) =$$
  $$= \phi(\alpha v_1, \omega) + \phi(\beta v_2, \omega) =$$
  $$= \alpha\phi(v_1, \omega) + \beta\phi(v_2, \omega)$$

  $$\alpha F_\phi(v_1) + \beta F_\phi(v_2) : V \longrightarrow V^*$$
  $$v_1 \longrightarrow \varphi_{v_1} : \omega \longrightarrow \phi(v_1, \omega)$$
  $$v_2 \longrightarrow \varphi_{v_2} : \omega \longrightarrow \phi(v_2, \omega)$$

  Allora $F_\phi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha F_\phi(v_1) + \beta F_\phi(v_2)$, c.v.d.

Notiamo ora che:

$$\ker F_\Phi = \{v \in V \mid F_\Phi(v) = 0\} = \{v \in V \mid \forall w \in V: \varphi_v(w) = 0\} =$$
$$= \{v \in V \mid \forall w \in V: \Phi(v, w) = 0\} = \operatorname{Rad} \Phi$$

COROLLARIO

Si ha:

$$F_\Phi \text{ è iniettiva} \iff \Phi \text{ è non degenere}$$

COROLLARIO

Se la dimensione di V è finita e Φ è non degenere, allora F_Φ è iniettiva fra spazi isomorfi ($V \approx V^*$): dunque F_Φ è un isomorfismo.

Infine, notiamo che:

$$\operatorname{Imm} F_\Phi = \{\varphi \in V^* \mid \exists\, v \in V \ni' \varphi = \varphi_v\} \subseteq \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0 \ \forall$$
$$w \in \operatorname{Rad} \Phi\} = \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad}(\Phi))$$

COROLLARIO

Se la dimensione di V è finita, allora:

$$\dim \operatorname{Imm} F_\Phi = n - \dim \ker F_\Phi =$$
$$= n - \dim \operatorname{Rad} \Phi = \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad} \Phi)$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{Imm} F_\Phi = \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad}(\Phi))$$

FUNZIONALI Φ-RAPPRESENTABILI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare Φ arbitrario.

Un funzionale $\varphi \in V^*$ è Φ-RAPPRESENTABILE se, considerato Φ:
$\exists\, v \in V \ni' \varphi = \varphi_v = F_\Phi(v)$.

In altre parole, $\varphi \in V^*$ è Φ-rappresentabile se e solo se $\varphi \in \operatorname{Imm} F_\Phi$.

COROLLARIO

Se $\dim V = n$ e Φ è non degenere, allora (essendo F_Φ un isomorfismo) ogni $\varphi \in V^*$ è Φ-rappresentabile in modo unico:
$\forall\, \varphi \in V^* \ \exists!\, v \in V \ni' \varphi = \varphi_v = F_\Phi(v)$.

Analizziamo ora i $\varphi \in V^*$ Φ-rappresentabili. Sia $\dim V = n$.

Condizioni necessarie affinché $\varphi = \varphi_v$ per qualche $v \in V$ sono le seguenti:

- $\forall\, w \in V : \varphi_v(w) = \Phi(v, w)$;
- $\forall\, w \in \operatorname{Rad}\Phi : \varphi_v(w) = \Phi(v, w) = 0 \Rightarrow w \in \operatorname{Ker}\varphi_v$

Ora:

$$\operatorname{Imm} F_\Phi \subseteq \{\varphi_v \in V^* \mid \operatorname{Rad}\Phi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_v\} = \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad}\Phi)$$

In più, visto che Φ è non degenere:

$$\dim \operatorname{Imm} F_\Phi = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F_\Phi = \dim V - \dim \operatorname{Rad}\Phi = $$
$$= \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad}\Phi)$$

Dunque:

$$\operatorname{Imm} F_\Phi = \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad}\Phi)$$

ENDOMORFISMI Φ-AGGIUNTI

Sia (V, Φ) un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare Φ non degenere. Sia $\dim V = n$.

Consideriamo $End(V)$:

$$f \in End(V) \qquad f : V \longrightarrow V$$

Consideriamo $f^t \in End(V^*)$:

$$f^t : V^* \longrightarrow V^*$$

$$V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$$

$$f^t(\varphi) \overset{def}{=} \varphi \circ f$$

Analizziamo allora il seguente schema:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_\Phi"'] & V \arrow[d, "F_\Phi"] \arrow[l, bend left, dashed, "f^*"'] \\
V^* & V^* \arrow[l, "f^t"]
\end{tikzcd}$$

Definiamo allora f^*, l'ENDOMORFISMO Φ-AGGIUNTO di f:

$$f^* \in End(V) \ , \ f^* = F_\Phi^{-1} \circ f^t \circ F_\Phi$$

Sia ora $\mathcal{B}$ una base arbitraria di V. Attraverso l'isomorfismo di passaggio alle coordinate:

$$V \rightsquigarrow \mathbb{K}^n$$

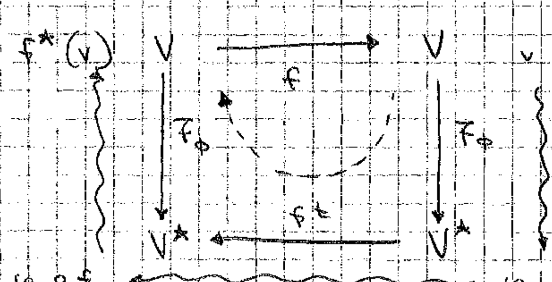
$$f \rightsquigarrow A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

$$\Phi \rightsquigarrow M_\Phi = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$$

$$f^* \rightsquigarrow A^* = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*)$$

In particolare, $M \in S(n, \mathbb{K})$, $\det M \neq 0$. Dunque $M \in GL(S(n, \mathbb{K}))$, $M = M^t$.

Esprimiamo allora A^* in funzione di A e M_Φ:



Dunque:

$$(\varphi_v \circ f)(w) = \Phi(v, f(w))$$

Inoltre $f^*(v)$ è univocamente determinato dalla seguente proprietà:

$\forall w \in V: \varphi_{f^*(v)}(w) = \Phi(f^*(v), w)$

LEMMA

f^* è l'endomorfismo di V tale che:

$\forall w, v \in V: \Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w)$

Dim.

Sfruttiamo la commutatività del diagramma costruito.

Partendo da v, abbiamo $v \mapsto \varphi_v \mapsto \varphi_v \circ f$.

Partendo da $f^*(v)$, abbiamo $f^*(v) \mapsto \varphi_{f^*(v)}$.

Ora:

$\forall w, v \in V \quad (\varphi_v \circ f)(w) = \varphi_{f^*(v)}(w) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall w, v \in V: \Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w)$, c.v.d.

Ora, passando in coordinate ($v \rightsquigarrow X$, $w \rightsquigarrow Y$):

$$\Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w) \rightsquigarrow X^t M (A Y) = (A^* X)^t M Y$$

Allora:

$$X^t M A Y = X^t A^{*t} M Y \Rightarrow M A = A^{*t} M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M A M^{-1} = A^{*t} \Rightarrow A^* = (M A M^{-1})^t = M^{-1t} A^t M^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* = M^{t\,-1} A^t M^t = M^{-1} A^t M$$

Notiamo ora che:

$$A^{**} = M^{-1} A^{*t} M = M^{-1}(M A M^{-1}) M = A$$

LEMMA

L'aggiunzione è un'involuzione $f^{**} = f$.

Dim.

In termini matriciali ciò è stato appena dimostrato.

Equivalentemente:

$$f^{**} = F_\Phi^{-1} \circ f^{*t} \circ F_\Phi = F_\Phi^{-1} \circ (F_\Phi^{-1} \circ f^t \circ F_\Phi)^t \circ F_\Phi =$$

$$= F_\Phi^{-1} \circ F_\Phi^t \circ f^{tt} \circ F_\Phi^{-1\,t} \circ F_\Phi = \cancel{F_\Phi^{-1}} \circ \cancel{F_\Phi} \circ f \circ F_\Phi^{t\,-1} \circ F_\Phi =$$

$$= f \circ \cancel{F_\Phi^{-1}} \circ \cancel{F_\Phi} = f$$, c.v.d.

In termini matriciali:

$$L : M(n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,\mathbb{K})$$
$$A \longrightarrow A^*$$

Questa funzione è lineare e bigettiva, ed inoltre è un'involuzione: $A^{**} = A$.

Dim.

- $L(0) = M_\phi^{-1} \circ 0^t \circ M_\phi = M_\phi^{-1} \circ 0 \circ M_\phi = 0$;
- $L(A+B) = F_\phi^{-1} \circ (A+B)^t \circ F_\phi = F_\phi^{-1} \circ A^t \circ F_\phi + F_\phi^{-1} \circ B^t \circ F_\phi = L(A) + L(B)$;
- $L(\lambda A) = F_\phi^{-1} \circ (\lambda A)^t \circ F_\phi = \lambda \cdot F_\phi^{-1} \circ A^t \circ F_\phi = \lambda \cdot L(A)$.

$L \in End(M(n,\mathbb{K}))$, dunque, ad esempio, dimostriamo che è iniettiva. Sia $A^* = 0$. Allora:

$$0 = A^* = F_\phi^{-1} \circ A^t \circ F_\phi \Rightarrow 0 = F_\phi \circ 0 \circ F_\phi^{-1} =$$
$$= \cancel{F_\phi} \circ \cancel{F_\phi^{-1}} \circ A^t \circ \cancel{F_\phi} \circ \cancel{F_\phi^{-1}} = A^t \Rightarrow A = 0$$

L è anche suriettiva:

$\forall B \in M(n,\mathbb{K}) \ \exists A = F_\phi^{-1} \circ B^t \circ F_\phi$ t.c. $A^* = F_\phi^{-1} \circ A^t \circ F_\phi =$
$= F_\phi^{-1} \circ F_\phi^t \circ B^{tt} \circ F_\phi^{-1\,t} \circ F_\phi = \cancel{F_\phi^{-1}} \circ \cancel{F_\phi} \circ B \circ \cancel{F_\phi^{-1}} \circ \cancel{F_\phi} = B \Rightarrow L(A) = B$

Inoltre L è un'involuzione, visto che:

$$A^{**} = F_\phi^{-1} \circ A^{*t} \circ F_\phi = F_\phi^{-1} \circ F_\phi^t \circ A^{tt} \circ F_\phi^{t\,-1} \circ F_\phi =$$
$$= \cancel{F_\phi^{-1}} \circ \cancel{F_\phi} \circ A \circ F_\phi^{-1\,t} \circ F_\phi = A \circ \cancel{F_\phi^{-1}} \circ \cancel{F_\phi} = A, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

La funzione $L : M(n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,\mathbb{K})$ che manda A in $A^* = F_\phi^{-1} \circ A^t \circ F_\phi$ è ben definita, e non dipende dalla base scelta.

Dim.

Siano B e B' due basi di V. Siano $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$.
Se $P \in GL(n,\mathbb{K})$ è la matrice di cambiamento di base:

$$[v]_{B'} = P\,[v]_B \quad , \quad [w]_{B'} = P\,[w]_B$$

Innanzitutto:

$$\phi(v,w) = [v]_B^t\, M\, [w]_B = [v]_{B'}^t\, M'\, [w]_{B'} = (P\,[v]_B)^t\, M'\, (P\,w]_B) =$$
$$= [v]_B^t\, P^t\, M'\, P\, [w]_B$$

Dunque: $M = P^t M' P$.

Ora:

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = A' [v]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow P [f(v)]_{\mathcal{B}} = A' \cdot P \cdot [v]_{\mathcal{B}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [f(v)]_{\mathcal{B}} = P^{-1} A' P [v]_{\mathcal{B}} = A [v]_{\mathcal{B}}$$

Dunque: $A = P^{-1} A' P$.

Concludiamo:

- nella base $\mathcal{B}$: $A^* = M^{-1} A^t M$;
- nella base $\mathcal{B}'$: $P^{-1} A'^* P = (P^t M' P)^{-1} (P^{-1} A' P)^t P^t M' P =$

$$= P^{-1} M'^{-1} \cancel{P^{t^{-1}} P^t} A'^t \cancel{P^{t^{-1}} P^t} M' P = P^{-1} M'^{-1} A'^t M' P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'^* = M'^{-1} A'^t M', \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Supponiamo che Φ ammetta una base $\tilde{\mathcal{B}}$ ortonormale, ossia tale che $M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(\Phi) = I$. Allora, in tali coordinate:

$$\tilde{A}^* = I \cdot \tilde{A}^t \cdot I \Rightarrow \tilde{A}^* = \tilde{A}^t$$

FORME BILINEARI E ISOMORFISMI CANONICI

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita: $\dim V = n$.
Mostriamo che esiste una forma bilineare canonica:

$$\langle\, , \,\rangle : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(v, \varphi) \longrightarrow \varphi(v)$$

Dim.

- $\forall v \in V : O(v) = 0 \quad \wedge \quad \forall \varphi \in V : \varphi(0) = 0$;
- $\langle \alpha v_1 + \beta v_2 , \gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2 \rangle = (\gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2)(\alpha v_1 + \beta v_2) =$
$= (\gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2)(\alpha v_1) + (\gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2)(\beta v_2) = \alpha(\gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2)(v_1) +$
$+ \beta(\gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2)(v_2) = \alpha(\gamma \varphi_1)(v_1) + \alpha(\delta \varphi_2)(v_1) + \beta(\gamma \varphi_1)(v_2) +$
$+ \beta(\delta \varphi_2)(v_2) = \alpha\gamma(\varphi_1(v_1)) + \alpha\delta(\varphi_2(v_1)) + \beta\gamma(\varphi_1(v_2)) + \beta\delta(\varphi_2(v_2)) =$
$= \alpha\gamma \langle v_1, \varphi_1 \rangle + \alpha\delta \langle v_1, \varphi_2 \rangle + \beta\gamma \langle v_2, \varphi_1 \rangle + \beta\delta \langle v_2, \varphi_2 \rangle$, c.v.d.

Consideriamo ora $\mathrm{End}(V)$ e $\mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K})$, e mostriamo che esiste un isomorfismo ψ:

$$\psi : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K})$$
$$f \longrightarrow (v, \varphi) \to \varphi(f(v))$$

In particolare:

1) ψ_f è bilineare per ogni f (già dimostrato prima);
2) ψ è lineare;
3) ψ è iniettiva tra spazi di uguale dimensione, dunque è un isomorfismo.

Dim.

Siano $v \in V$ e $\varphi \in V^*$. Allora:

- $\varphi(O(v)) = \varphi(0) = 0$;
- $\varphi((\lambda f + \mu g)(v)) = \varphi(\lambda f(v)) + \varphi(\mu g(v)) = \lambda \varphi(f(v)) + \mu \varphi(g(v))$.

Mostriamo ora che $\dim \mathrm{End}(V) = \dim \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K}) = n^2$; dimostriamo che $\mathrm{Ker}\, \psi_f = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid \psi_f = 0 \} = \{0\}$.
Sia infatti $f(w) = \tilde{v} \neq 0$ per qualche $w \in V$. Allora, sia
$\mathcal{B} = \{\tilde{v}, v_2, v_3 \dots v_n\}$ una base di V. Considerata $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\varphi}^*, \varphi_2^* \dots \varphi_n^*\}$
base duale di $\mathcal{B}$, si avrebbe $\tilde{\varphi}^*(\tilde{v}) = 1 \neq 0$ ↯.

Dunque ψ_f è iniettiva, e in particolare è un isomorfismo, c.v.d.

Notiamo ora che, se V è di dimensione finita (dunque $V \cong V^*$, e in particolare esiste una bigezione tra i funzionali e i vettori che li Φ-rappresentano), e Φ è un prodotto scalare non degenere associato a V:

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "(\mathrm{Id}, f_\Phi)"'] \arrow[dr, dashed] & \\ V \times V^* \arrow[r, "\langle\, , \,\rangle"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$(v, w) \mapsto (v, \varphi_w) \qquad \varphi_w(v) = \Phi(w, v)$$

Sia dunque w l'unico vettore tale che $\varphi = \varphi_w$.
In presenza di un prodotto scalare, si ha allora:

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\psi_\Phi} \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K})$$

$$f \longrightarrow \psi_{\Phi, f}(v, w) = \psi_\Phi(f(v), w) = \langle f(v), \varphi_w \rangle = \Phi(f(v), w)$$

Un'applicazione $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice Φ-AUTOAGGIUNTA se $f^* = f$.

PROPOSIZIONE

Data $\psi_\Phi : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K})$ che a f associa la funzione che a (v, w) associa $\Phi(f(v), w)$, $\psi_\Phi(f)$ è un prodotto scalare se e solo se f è autoaggiunta.

Dim.

f^* è stata definita come l'unico endomorfismo tale che:
$\forall\, v, w \in V : \Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w)$

Inoltre $\psi_\Phi(f)$ è un prodotto scalare se e solo se:

$$\psi_{\Phi, f}(v, w) = \psi_{\Phi, f}(w, v)$$
$$\Phi(f(v), w) = \Phi(f(w), v)$$

Dunque:

$$\Phi(f^*(v), w) = \Phi(f(w), v) = \Phi(f(v), w)$$

Se $f = f^*$ abbiamo finito. Supponiamo $f \neq f^*$ per un qualche vettore $v \in V$. Allora $\Phi(f^*(v), w) = \Phi(f(v), w) \Rightarrow \Phi(f^*(v) - f(v), w) = 0$. Sia $K = f^*(v) - f(v)$. Dato che $K \neq 0$ $K \notin \mathrm{Rad}(\Phi)$, poiché Φ è non degenere. Allora esiste $w \in V$ t.c. $\Phi(K, w) \neq 0$ assurdo. Dunque la tesi c.v.d.

GRUPPO ORTOGONALE

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n, ϕ un prodotto scalare definito positivo. Si definisce GRUPPO ORTOGONALE:

$$O(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t \}$$

PROPOSIZIONE

Sia $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Esso è ortogonale se si verifica uno di questi fatti:

- $A^t = A^{-1}$;
- le colonne (righe) di A formano una base ortonormale per ϕ;
- A è una matrice di cambiamento di base tra basi ortonormali;
- f_A è un'isometria di (V, ϕ).

Dim.

La 1) è la definizione di matrice ortogonale.

Dato che $AA^t = A^tA = I_n$ dimostrare la 2) dalla 1) per le colonne o per le righe è equivalente. Notiamo che:

$$A^i \times A_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

dunque le colonne di A formano una base ortonormale per ϕ. Viceversa, se le colonne di A formano una base ortonormale per ϕ allora $A^t = A^{-1}$, ossia A è ortogonale.

1) implica 3): sia A ortogonale, B ortonormale per ϕ. Allora:

$A^t I A = A^t A = I \Rightarrow B'$ è ortonormale per ϕ.

Viceversa, se B, B' sono basi ortonormali, presa A matrice di cambiamento di base, si ha $A^t I A = I$, da cui $A^{-1} = A^t$.

Dunque 1) è equivalente a 3).

Infine, 3) è equivalente a 4): se una matrice manda basi ortonormali in basi ortonormali allora è indotta da un'isometria; viceversa un'isometria, pensata come un cambiamento di base, manda basi ortonormali in basi ortonormali, c.v.d.

Nel caso in cui ϕ sia definito positivo, dunque:

$$f \in O(\phi) \xrightarrow{[\;]_B} A \in O(n,\mathbb{R})$$

COROLLARIO

Sia $f \in O(\Phi)$, con Φ non degenere. Allora $\det A_f = \pm 1$

Dim.

Per ipotesi $A^t M_\Phi A = M_\Phi$. Dato che il determinante è invariante per trasposizione, $\det A_f^t \cdot \cancel{\det M_\Phi} \det A_f = \cancel{\det M_\Phi} \Rightarrow (\det A_f)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A_f = \pm 1$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Il sottogruppo delle isometrie che hanno determinante uguale a 1, le cosiddette ISOMETRIE DIRETTE, è detto GRUPPO ORTOGONALE SPECIALE, e si indica con $SO(\Phi)$.
Le isometrie INVERSE sono invece quelle aventi determinante uguale a -1.

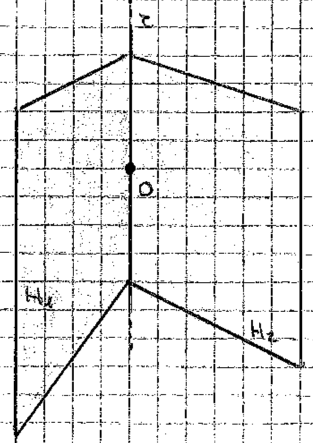
ANALISI DEL CASO $(\mathbb{R}^3, \phi_{st})$

Analizziamo ora $(\mathbb{R}^3, \phi_{st})$.
Dato che ϕ è anisotropo, sappiamo che ogni isometria sarà composizione di al più 3 riflessioni.

Se f è composizione di 0 riflessioni, per convenzione $f = \mathrm{Id}$.

Se f è composizione di 1 riflessione, $f = \rho_v$ è essa stessa una riflessione.

Se f è composizione di 2 riflessioni, allora $f = R_r$ è una rotazione:



Analizziamo ora il caso in cui f è composizione di 3 riflessioni.

CASO PARTICOLARE

$f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \mathrm{Fix}(-\mathrm{Id}) = \{0\}$

Possiamo considerare le riflessioni parallele agli iperpiani:

$\mathrm{Span}(e_1, e_2) \quad ; \quad \mathrm{Span}(e_1, e_3) \quad ; \quad \mathrm{Span}(e_2, e_3)$

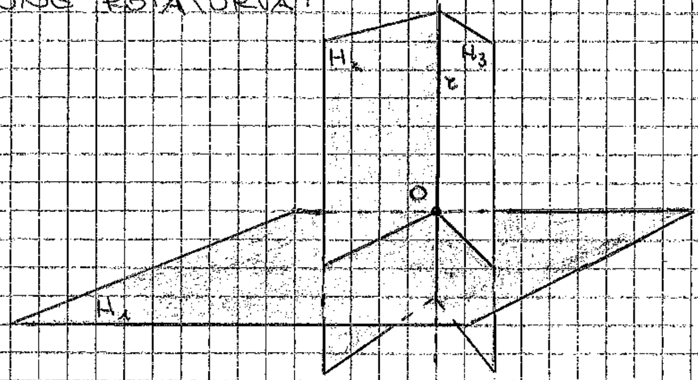
In generale, possiamo considerare $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$, $\mathrm{Span}(v_1, v_3)$, $\mathrm{Span}(v_2, v_3)$, con $\{v_1, v_2, v_3\}$ base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

CASO PIÙ GENERALE

Possiamo considerare il caso in cui un piano H_1 sia ortogonale ad altri due piani H_2, H_3 la cui intersezione $H_2 \cap H_3 = r$ è una retta (evidentemente ortogonale al piano H_1).
Sia h_i la riflessione rispetto a H_i. Allora:

$$h_1 \circ h_2 \circ h_3 = h_1 \circ (h_2 \circ h_3) = h_1 \circ R_r$$

Un' isometria composizione di una riflessione e di una rotazione avente asse ORTOGONALE al piano di riflessione si definisce RIFLESSIONE ROTATORIA:



CASO GENERALE

Sia f un' isometria composta da 3 riflessioni (dunque inversa).

Allora

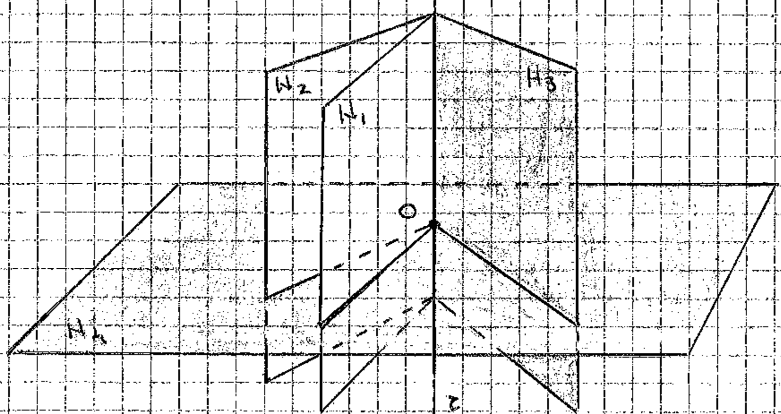
$-Id_{\mathbb{R}^3}$ è inversa $\Rightarrow$ $-Id_{\mathbb{R}^3} \circ f = R_r$ è una rotazione con una retta di punti fissi $\Rightarrow$ $f = -Id \circ R_r$

Sia dunque r la retta dei punti fissi di R_r:

$\exists\ H_1, H_2 \ni' H_1 \cap H_2 = r \ \wedge\ R_r = h_1 \circ h_2 \ \Rightarrow\ f = -Id_{\mathbb{R}^3} \circ h_1 \circ h_2$

Ora:

$\exists\ H_3, H_4 \ni' H_3 \perp H_4,\ H_3 \perp H_1,\ H_4 \perp H_1 \ \Rightarrow\ -Id_{\mathbb{R}^3} = h_4 \circ h_3 \circ h_1$



Allora:

$$f = h_4 \circ h_3 \circ \cancel{h_1} \circ \cancel{h_1} \circ h_2 = h_4 \circ h_3 \circ h_2 =$$
$$h_4 \circ (h_3 \circ h_2) = h_4 \circ R'_r$$

Dunque anche in questo caso, ossia nel caso generale, f è una riflessione rotatoria.

ISOMETRIE DIAGONALIZZABILI

Sia $(\mathbb{R}^2, \phi)$ munito di un prodotto scalare ϕ non degenere e non anisotropo.

Allora:

$\exists\ \mathcal{B}_1 \ni' M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

$\exists\ \mathcal{B}_2 \ni' M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sia $f \in O(\phi)$ è diagonalizzabile?

Sicuramente:

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^2 : \phi(f(x), f(y)) = \phi(x, y)$

In particolare:

$\forall\ x \in \mathbb{R}^2 : \phi(f(x), f(x)) = \phi(x, x)$

Perciò:

$$f(x) \text{ è isotropo} \iff x \text{ è isotropo}$$

Valutiamo allora il CONO ISOTROPO:

$$C_\phi = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, x) = 0 \}$$

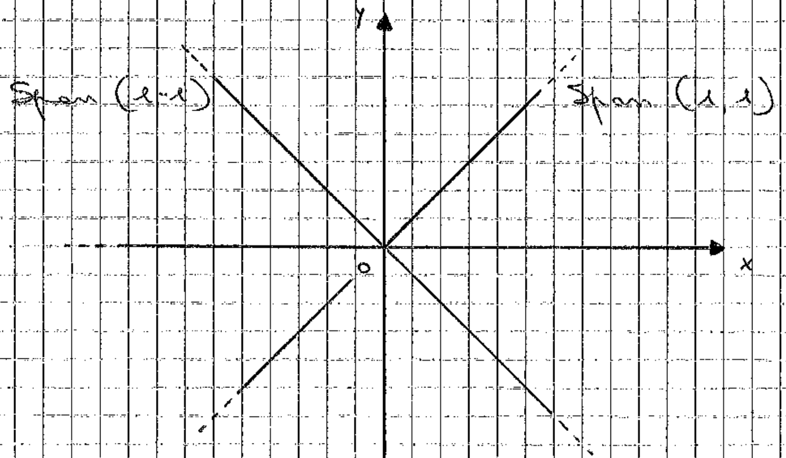
Considerata $\mathcal{B}_1$, dunque $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, sia $x = av_1 + bv_2 \in C_\phi$.

Allora:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$C_\phi = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 0 \}$$



Siano $v_1, v_2 \in C_\phi$, $\{v_1, v_2\} = \mathcal{B}^*$ base di $\mathbb{R}^2$.

Necessariamente $f(C_\phi) = C_\phi$.

Dunque:

- $f(v_1) = \lambda v_1$, $\lambda \neq 0$; $f(v_2) = \mu v_2$, $\mu \neq 0$

  Allora v_1 e v_2 sono autovettori, e f è diagonalizzabile.

- $f(v_1) = \lambda v_2$, $\lambda \neq 0$; $f(v_2) = \mu v_1$, $\mu \neq 0$

  In questo caso:

$$M^{B^*}_{B^*}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Dato che $f \in O(\phi)$, $\det M^{B^*}_{B^*}(f) = -1 \Rightarrow \lambda\mu = 1$.

Volendolo dimostrare equivalentemente:

$$\phi(f(v_1), f(v_2)) = \phi(v_1, v_2)$$
$$\lambda\mu\, \phi(v_1, v_2) = \phi(v_1, v_2)$$
$$(\lambda\mu - 1)\, \phi(v_1, v_2) = 0$$

Se $\phi(v_1, v_2) = 0$ ϕ sarebbe degenere, contro l'ipotesi. Dunque $\lambda\mu = 1$.

Allora:

$$P_M(x) = x^2 - \lambda\mu = x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

e f è diagonalizzabile.

Dunque ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile.

Sia ora $(\mathbb{R}^3, \phi)$ munito di ϕ tale che:

$$\forall\, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

$$M^e_e(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(\phi) = (2, 1, 0)$$

Sia $f \in O(\phi)$.

Proviamo innanzitutto che f ammette un autovettore $v \in \mathbb{R}^3$.

La dimostrazione di ciò è banale, visto che $P_f(x)$ ha grado 3, dunque necessariamente ammette un fattore lineare.

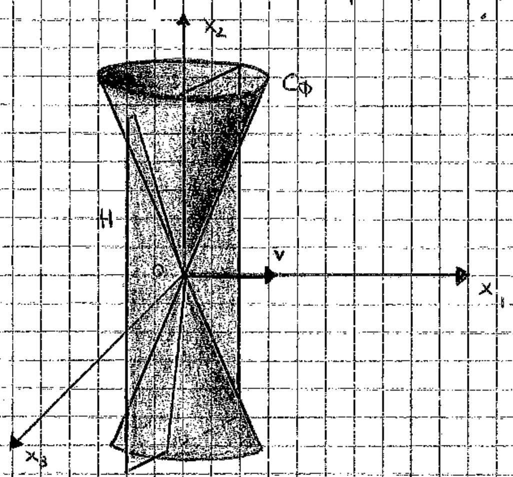
Dunque:

$\exists\, v \in \mathbb{R}^3 \ni' f(v) = \lambda v$

Consideriamo ora $\Phi(v,v)$. Supponiamo $\Phi(v,v)>0$, e dimostriamo che f è diagonalizzabile.

Per ipotesi, $\Phi(v,v)>0$. Inoltre:

$$C_\Phi = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \}$$



Consideriamo un piano ortogonale a v. Sia esso H:

LEMMA

Sia $f \in O(\Phi)$. Sia L un sottospazio vettoriale di V tale che $f(L) \subseteq L$ (in realtà, essendo f un isomorfismo, $f(L) = L$). Allora $f(L^\perp) = L^\perp$.

Dim.

Sia $x \in L^\perp$, $y \in L$. In particolare, essendo f un isomorfismo, $y = f(z)$ per qualche $z \in L$.

Allora:

$\Phi(f(x), y) = \Phi(f(x), f(z)) = \Phi(x, z) = 0$, visto che $x \in L^\perp$ e $z \in L$. Allora $f(x) \in L^\perp$, c.v.d.

Nel nostro caso, $f(H) \subseteq H$ (in realtà: $f(H) = H$). Infatti:
$\forall\, h \in H$, $\Phi(f(h), v) = \Phi(f(h), f(w)) = \Phi(h, w) = 0 \Rightarrow f(H) \in H$.

Ora:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}(v) \,\hat{\oplus}\, (\mathrm{Span}(v))^\perp = \mathrm{Span}(v) \,\hat{\oplus}\, H$$

$$f|_H \in O(\Phi|_H)$$

$$\sigma(\Phi|_H) = (1, 1, 0)$$

Allora H è un piano iperbolico, e per quanto dimostrato precedentemente, $f|_H$ è diagonalizzabile. Dunque anche f lo è, c.v.d.

Sia ora $\Phi(v,v) < 0$. Allora $\sigma(\Phi|_H) = (2,0,0)$. Mostriamo allora un controesempio per dimostrare che in questo caso f non è diagonalizzabile.

Innanzitutto:

$\exists\ v_2, v_3 \in H$ t.c. $M^{\{v_2,v_3\}}_{\{v_2,v_3\}}(\Phi|_H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Consideriamo allora la rotazione di $90°$ in $\mathbb{R}^2 \cong H$:

$$\alpha v_2 + \beta v_3 \longrightarrow -\beta v_2 + \alpha v_3$$

La matrice indotta è $M^{\{v_2,v_3\}}_{\{v_2,v_3\}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dunque:

$$M^{\{v,v_2,v_3\}}_{\{v,v_2,v_3\}}(f) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$P_f(x) = (x-1)(x^2+1) \Rightarrow f \text{ non è diagonalizzabile c.v.d.}$$

Sia $(\mathbb{R}^3, \Phi)$, con Φ definita come prima.

Siano:

$W_1 = \mathrm{Span}(e_1+e_3,\ -e_1+e_3)$

$W_2 = \mathrm{Span}(e_1+e_3,\ e_2+e_3)$

Provare che esiste $f \in O(\Phi)$ tale che:

- $f|_{W_1\cap W_2} = \mathrm{id}|_{W_1\cap W_2}$;
- $f(W_1) = W_2$;
- $\det f = 1$.

Osserviamo innanzitutto che:

$\Phi(e_1+e_3, e_1+e_3) = \Phi(e_1,e_1) + \Phi(e_3,e_3) = 1-1 = 0$;

$\Phi(-e_1+e_3, -e_1+e_3) = \Phi(-e_1,-e_1) + \Phi(e_3,e_3) = 1-1=0$;

$\Phi(e_2+e_3, e_2+e_3) = \Phi(e_2,e_2) + \Phi(e_3,e_3) = 1-1=0$.

Denotati i tre vettori rispettivamente con v_1, v_2, v_3, si ha allora:

$$v_1, v_2, v_3 \in C_\Phi$$

In più:

$e_2+e_3 \notin W_1 \Rightarrow W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \mathrm{Span}(v_1)$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

In base alla prima richiesta $f(v_1) = v_1$.

In base alla seconda richiesta, $f(v_2) = \lambda v_3$, $\lambda \neq 0$. Infatti $f(v_1)$ e $f(v_2)$ devono essere linearmente indipendenti, e $f(v_2) = \alpha v_1 \vee f(v_2) = \alpha v_2$.

In base alla terza richiesta, si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & \lambda & b \end{bmatrix}$$

Ora:

$\Phi(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = -\Phi(e_1, e_1) + \Phi(e_3, e_3) = -2$;

$\Phi(e_1 + e_3, e_2 + e_3) = \Phi(e_3, e_3) = -1$;

$\Phi(-e_1 + e_3, e_2 + e_3) = \Phi(e_3, e_3) = -1$.

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora determiniamo λ:

$$\Phi(v_1, v_2) = \Phi(f(v_1), f(v_2)) = \Phi(v_1, \lambda v_3)$$

$$-2 = \lambda(-1) \Rightarrow \lambda = 2$$

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & b \end{bmatrix}$$

Completiamo l'isometria:

$-1 = \Phi(v_1, v_3) = \Phi(v_1, a v_1 - \frac{1}{2} v_2 + b v_3) = -\frac{1}{2}(-2) - b \Rightarrow b = 2$;

$-1 = \Phi(v_2, v_3) = \Phi(2v_3, a v_1 - \frac{1}{2} v_2 + v_3) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) + 2a(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2a \Rightarrow a = 1$;

Effettuiamo una verifica supplementare:

$\Phi(v_3, v_3) = 0 = \Phi(v_1 - \frac{1}{2} v_2 + 2v_3, v_1 - \frac{1}{2} v_2 + 2v_3) =$

$= -\frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{2}) + 2(-1) - \frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{2}) - 1(-1) + 2(-1) - 1(-1) = \cancel{1} - \cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2} + \cancel{1} = 0.$

Allora:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZI VARI

1. Sia Φ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$, e sia $V = Hom(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, si consideri:

$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$b(f, g) = \Phi(f(v), g(v))$$

1) Verificare che b è un prodotto scalare su V.
2) Determinare la segnatura di b.

1) Affinché b sia un prodotto scalare, b dev'essere bilineare e simmetrica. Dunque:

- $b(\lambda f + \mu g, \alpha h + \beta e) = \Phi((\lambda f + \mu g)(v), (\alpha h + \beta e)(v)) =$
$= \Phi((\lambda f)(v) + (\mu g)(v), (\alpha h)(v) + (\beta e)(v)) = \Phi((\lambda f)(v), (\alpha h)(v)) +$
$+ \Phi((\lambda f)(v) + (\beta e)(v)) + \Phi((\mu g)(v), (\alpha h)(v)) + \Phi((\mu g)(v), (\beta e)(v)) =$
$= \lambda\alpha \, \Phi(f(v), h(v)) + \lambda\beta \, \Phi(f(v), e(v)) + \mu\alpha \, \Phi(g(v), h(v)) +$
$+ \mu\beta \, \Phi(g(v), e(v)) = \lambda\alpha \, b(f, h) + \lambda\beta \, b(f, e) + \mu\alpha \, b(g, h) + \mu\beta \, b(g, e)$.

- $b(f, g) = \Phi(f(v), g(v)) = \Phi(g(v), f(v)) = b(g, f)$.

2) Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base ortonormale per Φ. Dato $f, g \in V$:

$$f(v) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$
$$g(v) = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$

$$b(f, g) = \Phi(f(v), g(v)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Inoltre, se $\mathcal{D} = \{v, w_2, \dots, w_k\}$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \left[f(v) \,\middle|\, \dots \right] \quad ; \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g) = \left[g(v) \,\middle|\, \dots \right]$$

Sia $\mathcal{G}$ la base canonica di V. Essa forma una base ortogonale per b, per come b agisce su f e g. Risulta allora chiaro che esiste un sottospazio di dimensione $(k-1)n$, ovvero il sottospazio delle funzioni che mandano v in 0, ove il prodotto scalare è quello nullo. Inoltre nel sottospazio complementare il prodotto scalare è definito positivo, poiché Φ è definito positivo, considerata la relazione tra Φ e b. Dunque:

$$\sigma(b) = (n, 0, (k-1)n)$$

1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia φ un prodotto scalare su V. Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se è vero o falso.

1) Se φ è semidefinito positivo, allora il radicale di φ coincide con l'insieme dei vettori isotropi.

2) Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora $i_0(\varphi|_W) \leq i_0(\varphi)$.

3) Se φ è non degenere, allora esiste un sottospazio vettoriale di V, sia esso W, tale che $\varphi|_W$ è il prodotto scalare nullo e $\dim W \geq \min(i_+(\varphi), i_-(\varphi))$.

1) Sia $Is(\varphi)$ l'insieme dei vettori isotropi. Innanzitutto:

$\forall v \in Rad(\varphi) : \varphi(v, w) = 0 \ \forall w \in V \Rightarrow \varphi(v, v) = 0 \Rightarrow v \in Is(\varphi)$

Dunque $Rad(\varphi) \subseteq Is(\varphi)$.

Se φ è semidefinito positivo, allora:

$\exists \mathcal{B}$ di V t.c.:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c} I_{i_+} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nella restrizione $\varphi|_W$ a W ove W è tale che:

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = I_{i_+}$$

il prodotto scalare è definito positivo, dunque è anisotropo.

Ne consegue che un vettore isotropo ha le prime componenti tutte nulle, dunque appartiene a $Rad\,\varphi$.

Allora $Is(\varphi) = Rad\,\varphi$.

2) L'affermazione è falsa: consideriamo φ così definito ($V = \mathbb{R}^3$):

$$M_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha $\det M = -1$, da cui $Rad(\varphi) = \{0\}$, $i_0(\varphi) = 0$.

Restringendosi a $W = Span(e_1, e_2)$, $e_1 \in Rad\,\varphi|_W$, da cui $i_0(\varphi|_W) \geq 1$.

3) Dato che ϕ su V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale è non degenere, usando una decomposizione di Witt abbiamo che:

$\exists\ \mathcal{B}$ di V t.c.:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix},$$

cioè una serie di piani iperbolici in somma diretta con un sottospazio di V ove $\phi|_W$ è definito positivo o negativo, a seconda che $i_+(\phi) \geq i_-(\phi)$ o $i_+(\phi) \leq i_-(\phi)$ (se $i_+(\phi) = i_-(\phi)$ questo sottospazio ha dimensione 0).

Allora:

$\exists\ \mathcal{G}$ di V t.c.:

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(\phi) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \{w_1, t_1, w_2, t_2 \ldots\}$$

Dato che i sottospazi sono in somma diretta ortogonale, prendendo $W = \{w_1, w_2 \ldots w_t\}$, con $t = \min(i_+(\phi), i_-(\phi))$, si ha che $\phi|_W$ è il prodotto scalare nullo, e $\dim W = t$.

3. Sia $V = M(n, \mathbb{R})$ e sia φ il prodotto scalare su V dato, per ogni $B, C \in V$, da $\varphi(B,C) = Tr(B^t C)$. Fissata $A \in V$, sia $f_A : V \to V$ l'endomorfismo tale che $f_A(X) = AX$ per ogni $X \in V$.

1) Verificare che φ è definito positivo.
2) Provare che λ è autovalore per $A \Leftrightarrow \lambda$ è autovalore per f_A
3) Provare che se A è simmetrica allora f_A è φ-autoaggiunto.
4) Per $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ determinare una base φ-ortonormale di V costituita da autovettori per f_A.

1) Sia $M \in M(n, \mathbb{R})$ tale che $\varphi(M,M) = Tr(M^t M) = 0$.
In particolare, se $M = [C_1 | C_2 | \dots | C_n]$, allora:

$$\varphi(M, M) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 \right] = Tr(M^t M)$$

Dato che nella formula compaiono solo quadrati, è evidente che:

$\forall\, m_{ij} : m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0$

Dunque φ è definito. Per completezza, per dimostrare che φ è definito positivo (anche se la formula ce lo dice già) si noti che:

$$\varphi(I, I) = Tr(I^t I) = Tr(I) = n > 0.$$

2) Per ipotesi, λ è autovalore per A. Allora:

$\exists\, X \in \mathbb{K}^n,\ X \neq 0 \ni' AX = \lambda X$

Allora la matrice $N \in V$, $N = [X | 0 \dots 0]$ è autovettore per f_A relativo all'autovalore λ, infatti $N \neq 0$ e:

$AN = [AX | 0 \dots 0] = [\lambda X | 0 \dots 0] = \lambda [X | 0 \dots 0] = \lambda N$

Dunque λ è autovalore per f_A.

Per ipotesi, sia λ autovalore per f_A. Allora:

$\exists\, N = [N_1 | \dots | N_n] \neq 0 \ni' AN = \lambda N$

Allora, visto che ogni colonna va in λ volte sé stessa, e $N \neq 0$:

$\exists\, N_i \neq 0 \ni' AN_i = \lambda N_i$

Dunque λ è autovalore per A.

3) Se A è simmetrica, allora:

$$\varphi(B, f_A(C)) = tr(B^t A C) = tr(B^t A^t C) = tr((AB)^t C) = \varphi(f_A(B), C),$$

e f_A è φ-autoaggiunta.

4) Notiamo

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Perciò una base costituita da autovettori per f_A è:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

Notiamo che gli autospazi sono V_2 e V_0, di dimensione 2 ciascuno.

Ora:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dunque $\mathcal{G}$ è una base di autovettori per f_A ortogonale per φ.

Allora:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

Dunque una base ortonormale per φ fatta di autovettori per f_A è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \frac{v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_3}{\sqrt{2}}, \frac{v_4}{\sqrt{2}} \right\}$$

4. Siano $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,2,3)$, $v_3 = (1,-1,-1)$, $v_4 = (1,0,0)$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y\}$. Costruire, se esiste, un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Span}(v_1, v_2)^{\perp} = U$, $v_3 \perp v_4$ e $\Phi(v_1, v_1) = 4$. Tale prodotto scalare è unico?

Innanzitutto:

$$U = \mathrm{Span}((1,0,1),(0,1,1))$$

Sia $\{v_1, v_3, v_4\} = \mathcal{B}$ un sistema di vettori. Dimostriamo che è una base:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det M = 1(-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è una base}$$

Iniziamo a imporre le condizioni:

$$N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 4 & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Un'altra condizione è la seguente:

$(0,1,1) = v_4 - v_3 \Rightarrow \Phi(v_1, v_4 - v_3) = 0 \Rightarrow \Phi(v_1, v_4) = \Phi(v_1, v_3)$

$(2,2,3) = -v_1 - 3v_3 + 6v_4 \quad , \quad (1,0,1) = -v_1 - v_3 + 3v_4$

$\Phi(-v_1 - 3v_3 + 6v_4, -v_1 - v_3 + 3v_4) = \Phi(v_1, v_1) + \Phi(v_1, v_3) - 3\,\cancel{\Phi(v_1, v_4)} + 3\,\cancel{\Phi(v_3, v_1)} +$
$+ 3\,\Phi(v_3, v_3) - 9\,\cancel{\Phi(v_4, v_3)} - 6\,\Phi(v_4, v_1) - 6\,\cancel{\Phi(v_4, v_3)} + 18\,\Phi(v_4, v_4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - 5\,\Phi(v_1, v_3) = -18\,\Phi(v_4, v_4) - 3\,\Phi(v_3, v_3)$

$\Phi(v_1, -v_1 - v_3 + 3v_4) = 0 \Rightarrow -4 + 2\Phi(v_1, v_4) = 0 \Rightarrow \Phi(v_1, v_4) = 2$

$\Phi(-v_1 - 3v_3 + 6v_4, v_4 - v_3) = -\cancel{2} + \cancel{2} + 3\,\Phi(v_3, v_3) + 6\,\Phi(v_4, v_4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(v_3, v_3) = -2\,\Phi(v_4, v_4)$

Infine:

$$-6 = 4 - 10 = -18\,\Phi(v_4, v_4) + 6\,\Phi(v_4, v_4) = -12\,\Phi(v_4, v_4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(v_4, v_4) = \frac{1}{2} \quad , \quad \Phi(v_3, v_3) = -1$$

Dunque Φ è univocamente determinato, ed è:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. Sia b il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rispetto alla base canonica. Fissati i vettori $v_1 = (1,1)$ $v_2 = (2,\lambda)$ di $\mathbb{R}^2$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione:

$$b : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall\, f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \Phi(f,g) = b(f(v_1), g(v_1)) + b((f(v_2), g(v_2))$$

1) Verificare che Φ è un prodotto scalare.
2) Calcolare il rango di Φ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) Per i valori di λ per cui Φ è non degenere, verificare che Φ non è definito positivo né negativo, e calcolare la segnatura di Φ.

1) Effettuiamo le dovute verifiche:

$\Phi(\alpha f + \beta g, \gamma h + \delta e) = b((\alpha f + \beta g)(v_1), (\gamma h + \delta e)(v_1)) + b((\alpha f + \beta g)(v_2), (\gamma h + \delta e)(v_2)) = \alpha\gamma\, b(f(v_1), h(v_1)) + \alpha\delta\, b(f(v_1), e(v_1)) + \beta\gamma\, b(g(v_1), h(v_1)) +$
$+ \beta\delta\, b(g(v_1), e(v_1)) + \alpha\gamma\, b(f(v_2), h(v_2)) + \alpha\delta\, b(f(v_2), e(v_2)) +$
$+ \beta\gamma\, b(g(v_2), h(v_2)) + \beta\delta\, b(g(v_2), e(v_2)) =$
$= \alpha\gamma\, \Phi(f,h) + \alpha\delta\, \Phi(f,e) + \beta\gamma\, \Phi(g,h) + \beta\delta\, \Phi(g,e).$

$\Phi(f,g) = b(f(v_1), g(v_1)) + b(f(v_2), g(v_2)) = b(g(v_1), f(v_1)) +$
$+ b(g(v_2), f(v_2)) = \Phi(g,f)$

2) Consideriamo la seguente base di $M(2, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3, \bar v_4\}$$

Abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Ora:

$\Phi(\bar v_1, \bar v_2) = b((1,0)(1,0)) + b((2,0),(\lambda,0)) = 0 + 0 = 0;$
$\Phi(\bar v_1, \bar v_3) = b((1,0),(0,1)) + b((2,0),(0,2)) = 1 + 4 = 5;$
$\Phi(\bar v_1, \bar v_4) = b((1,0),(0,1)) + b((2,0),(0,\lambda)) = 1 + 2\lambda;$
$\Phi(\bar v_2, \bar v_3) = b((1,0),(0,1)) + b((\lambda,0),(0,2)) = 1 + 2\lambda;$
$\Phi(\bar v_2, \bar v_4) = b((1,0),(0,1)) + b((\lambda,0),(0,\lambda)) = 1 + \lambda^2;$
$\Phi(\bar v_3, \bar v_4) = b((0,1),(0,1)) + b((0,2),(0,\lambda)) = 0 + 0 = 0;$
$\Phi(\bar v_1, \bar v_1) = \Phi(\bar v_2, \bar v_2) = \Phi(\bar v_3, \bar v_3) = \Phi(\bar v_4, \bar v_4) = 0$

Risulta allora:

$$Y = M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & 1+2\lambda & 1+\lambda^2 \\ 5 & 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 1+2\lambda & 1+\lambda^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora:

$\det Y = (5 + 5\lambda^2 - 1 - 4\lambda^2 - 4\lambda)^2 = (4 - 4\lambda + \lambda^2)^2 = (2-\lambda)^2$, da cui:

- $\lambda \neq 2 \Rightarrow \Phi$ è non degenere, ossia $\mathrm{rk}\,\Phi = 4$;
- $\lambda = 2 \Rightarrow \mathrm{rk}\,\Phi = 2$ (per verifica diretta).

3) Supponiamo $\lambda \neq 2$.

Sia $\Phi|_W$, con $W = \mathrm{Span}(v_1, v_3)$. Allora:

$$M_{\mathcal{B}_W}(\Phi|_W) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \sim_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

poiché W è un piano iperbolico. Allora Φ non è definito in alcun modo. Anzi, dato che $\det Y > 0$, si ha:

$$\begin{cases} i_+(\Phi) \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 \leq i_-(\Phi) \leq 3 \end{cases} \Rightarrow i_-(\Phi) = 2 \Rightarrow \sigma(\Phi) = (2, 2, 0).$$

6. Si considerino le matrici reali A e B. Dire se esse sono congruenti:

$$A, B \in M(4, \mathbb{R}) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'invariante completo da ricercare, in questo caso, è la segnatura.

Sia $\mathcal{B} = \{e_2, e_4, e_1, e_3\}$. Si ottiene:

$$\tilde{A} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora, consideriamo $\mathcal{B}' = \{e_2, e_4, e_1, e_3 - e_1\}$. Otteniamo:

$$\tilde{A}' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_c \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\sigma(A) = (2, 1, 1)$.

Consideriamo $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_4)$, sia $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_4\}$:

$$B^* = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(B|_W) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\det B = 0 \Rightarrow i_0(\Phi) \geq 1 \qquad \det B^* = -1 \Rightarrow i_-(\Phi|_W) = 1 \text{ o } 3$$

Ma $B^*(e_1, e_1) = 1$, da cui necessariamente $\sigma(\Phi|_W) = (2, 1, 0)$.

Completiamo a base di $\mathbb{R}^4$ ed estendiamo $\Phi|_W$ per confermare la congruenza:

Valutiamo $e_3 + 2e_2 - 2e_4$. Si ha: $(\ldots, \ldots)$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(e_1, e_3 + 2e_2 - 2e_4) = 2 - 2 = 0 \\ &\Phi(e_2, e_3 + 2e_2 - 2e_4) = 2 - 2 = 0 \\ &\Phi(e_4, e_3 + 2e_2 - 2e_4) = 2 - 2 = 0 \end{aligned}\right\} e_3 + 2e_2 - 2e_4 \in W^\perp$$

$$\Phi(e_3 + 2e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_2 - 2e_4) = 4 - 4 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow (e_3 + 2e_2 - 2e_4) \in \mathrm{Rad}\, B$$

Dunque necessariamente $\sigma(B) = (2, 1, 1)$, perciò:

$$A \sim_c B$$

7. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $n = \dim V$. Indichiamo con $I(V)$ l'insieme dei prodotti scalari su V per cui esiste una base di V composta da vettori isotropi.

1) Provare che $b \in I(V) \Rightarrow \operatorname{rk} b \neq 1$.

2) Provare che $b \in I(V)$ è semidefinito $\Rightarrow b = 0$.

3) Nel caso $n=2$, dire se $I(V)$ è un sottospazio dello spazio vettoriale dei prodotti scalari su V.

4) Nel caso $n=3$ esibire, se esiste, $b \in I(V)$ non degenere.

Sostanzialmente:

$$b \in I(V) \Leftrightarrow \exists\ \mathcal{B} \text{ di } V \ni M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix} \in S(n, \mathbb{R})$$

1) Sia $b \in I(V)$. Allora:

$\exists\ \mathcal{B}$ di $V \ni' M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$.

Ci sono due possibilità:

- b è il prodotto scalare nullo $\Rightarrow \operatorname{rk} = 0$;
- b non è il prodotto scalare nullo. Allora:

$\exists\ m_{ij} \in M_{\mathcal{B}}(b)$, $m_{ij} \neq 0$

Considerato $\operatorname{Span}(e_i, e_j) = W$, $b|_W$ e $\mathcal{B} = \{e_i, e_j\}$, si ha:

$$M_{\mathcal{B}}(b|_W) = \begin{bmatrix} 0 & m_{ij} \\ m_{ij} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} M_{\mathcal{B}}(b|_W) = 2 \Rightarrow \operatorname{rk} b \geq 2.$$

In ogni caso $\operatorname{rk} b \neq 1$.

2) Per quanto visto al punto 1), se b non fosse il prodotto scalare nullo si potrebbe ottenere un piano iperbolico, assurdo per un prodotto scalare semidefinito. Dunque b è il prodotto scalare nullo.

3) Siano $a, b \in I(V)$ definiti come segue:

$$a = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a+b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\sigma(a) = \sigma(b) = (1,1,0)$, per cui esistono piani iperbolici sia per a che per b. Ma $\sigma(a+b) = (2,0,0)$, e $a+b \neq 0$, dunque $a+b \notin I(V)$. Dunque $I(V)$ non è sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dei prodotti scalari su V.

(c) Basta considerare la base canonica, e b tale che:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha det = 12 $\neq 0$, e $\mathcal{C}$ è una base formata da vettori isotropi.

8. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare φ non degenere; sia $f: V \to V$ un'applicazione tale che ψ_f è un prodotto scalare, dove $\psi_f : V \times V \to \mathbb{K}$ è definita da $\psi_f(v,w) = \varphi(v, f(w))$ per ogni $v, w \in V$.

1) Provare che f è lineare, e se φ è definito positivo allora f è un'applicazione simmetrica rispetto a φ.

2) Provare che f è iniettiva se e solo se ψ_f è non degenere.

3) Dimostrare che non esistono o costruire, se esistono, φ e f tali che il rango di f sia 1 e il rango di ψ_f sia 2.

4) Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e φ è il prodotto scalare standard, dimostrare che non esiste o costruire, se esiste, f tale che l'ortogonale rispetto a ψ_f del sottospazio $\mathrm{Span}((1,0,0)(1,1,0))$ sia il sottospazio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0\}$.

1) • Sia $v = 0$. Allora:

$\forall w \in V: \psi_f(v,w) = \varphi(0, f(w)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi_f(w,v) = \varphi(w, f(0)) = 0 \Rightarrow f(0) \in \mathrm{Rad}\,\varphi \Rightarrow f(0) = 0;$

• Siano $a, b \in V$. Allora $\forall w \in V$:

$\psi_f(a,w) = \psi_f(w,a) \Rightarrow \varphi(a, f(w)) = \varphi(w, f(a))$

$\psi_f(b,w) = \psi_f(w,b) \Rightarrow \varphi(b, f(w)) = \varphi(w, f(b))$

$\psi_f(a+b, w) = \psi_f(w, b+a) = \psi_f(w,b) + \psi_f(w,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(w, f(b+a)) = \varphi(w, f(b)) + \varphi(w, f(a)) = \varphi(w, f(a) + f(b)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall w \in V: \varphi(w, f(a+b) - f(a) - f(b)) = 0 \Rightarrow t = f(a+b) - f(a) - f(b),$

$t \in \mathrm{Rad}\,\varphi \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \forall a, b \in V: f(a+b) = f(a) + f(b);$

• Sia $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

$\psi_f(a,w) = \psi_f(w,a) = \varphi(w, f(a))$

$\psi_f(\lambda a, w) = \psi_f(w, \lambda a) = \varphi(w, f(\lambda a)) = \lambda\psi_f(w,a) = \lambda\varphi(w,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall w \in V: \varphi(w, f(\lambda a)) - \varphi(w, \lambda f(a)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall w \in V: \varphi(w, f(\lambda a) - \lambda f(a)) = 0 \Rightarrow t' = f(\lambda a) - \lambda f(a),$

$t' \in \mathrm{Rad}\,\varphi \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow f(\lambda a) = \lambda f(a).$

Notiamo ora che, dato che ψ_f e φ sono prodotti scalari, presa una base ortonormale per φ (che si suppone definito positivo) si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi_f) \in S(n, \mathbb{R}) \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$$

Inoltre:

$$\psi_f(v,w) = \varphi(v, f(w)) \Rightarrow [v]_\mathcal{B}^t M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)[w]_\mathcal{B} = [v]_\mathcal{B}^t M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f)[w]_\mathcal{B}$$

Allora:

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) = I \cdot M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) \Rightarrow M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) \in S(n, \mathbb{R}),$$

dunque f è simmetrica rispetto a φ.

2) In ogni caso, la relazione seguente sussiste:

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f),$$

con $\mathcal{B}$ base qualunque. In particolare, $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi) \in GL(n, \mathbb{R})$.
Sia f iniettiva (ossia biiettiva, ossia un isomorfismo). La composizione di matrici invertibili è invertibile, dunque ψ_f è di rango massimo, ossia non degenere.
Se ψ_f è non degenere allora:

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi)^{-1} M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)$$

e per le stesse ragioni f è un isomorfismo, dunque è iniettiva.

3) Sempre dalla relazione precedente:

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f),$$

con $\mathcal{B} = \{k_1, \dots, k_{n-1}, w_n\}$ base di $\operatorname{Ker} f$ estesa a base di V, ha in ogni caso:

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) = [0 \dots 0 \mid X]$$

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi)[0 \dots 0 \mid X] = [0 \dots 0 \mid M_\mathcal{B}(\varphi) X]$$

$$\operatorname{rk} M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\psi_f) = 1$$

Dunque la richiesta non ammette soluzioni.

4) Poniamoci in $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora $M_\mathcal{C}^\mathcal{C}(\varphi) = I$.
Dunque $M_\mathcal{C}^\mathcal{C}(\psi_f) = M_\mathcal{C}^\mathcal{C}(f) \in S(n, \mathbb{R})$.
Inoltre:

$$W = \operatorname{Span}((1,0,0), (0,1,2))$$

Dunque:

$\psi_f(e_1, e_1) = 1 \cdot a_{11} \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_{11} = 0;$

$\psi_f(e_1, e_1 + e_2) = \psi_f(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow a_{12} = a_{21} = 0;$

$\psi_f(e_1, e_2 + 2e_3) = 2\psi_f(e_1, e_3) = 0 \Rightarrow a_{13} = a_{31} = 0;$

$\psi_f(e_1 + e_2, e_2 + 2e_3) = \psi_f(e_2, e_2) + 2\psi_f(e_2, e_3) = 0 \Rightarrow a_{22} = -2a_{23}$

Alors :

$$M_e^e(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2b + c \\ b + 3c \end{bmatrix}.$$

9. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da:

$$b(p(x), q(x)) = (a_1 + a_3)(b_0 + b_2) + (a_0 + a_2)(b_1 + b_3),$$

ove

- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$,
- $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$.

1) Si calcoli una base di Rad b.
2) Si calcolino gli indici di positività e di negatività della restrizione di b al sottospazio vettoriale:

$$W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\}$$

1) Determiniamo l'espressione matriciale di b:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_0 + a_1 b_2 + a_3 b_0 + a_3 b_2 + a_0 b_1 + a_2 b_1 + a_0 b_3 + a_2 b_3$$

Detta A tale matrice, si vede subito che $\operatorname{rk} A = 2$, e una base di Rad b è $\mathcal{B} = \{e_1 - e_3, e_2 - e_4\}$. Infatti, se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_4\}$, si ha:

$\forall\, q(x) \in V : b(x - x^3, q(x)) = 0(b_0 + b_2) + 0(b_1 + b_3) = 0;$

$\forall\, q(x) \in V : b(1 - x^2, q(x)) = 0(b_0 + b_2) + 0(b_1 + b_3) = 0$

Dunque $\mathcal{B} = \{1 - x^2, x - x^3\}$ è una base di Rad b.

2) Innanzitutto, $W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\} = \{p(x) \in V \mid \sum_{i=0}^{3} a_i = 0\} =$
$= \operatorname{Span}(1 - x^3, x - x^3, x^2 - x^3) = \operatorname{Span}(1 - x^2, x - x^3, 1 - x^3)$

Ora:

$$b(1 - x^3, 1 - x^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 - 1 = -2$$

Dunque:

$$\exists\ \bar{\mathcal{B}} = \left\{1 - x^2, x - x^3, \frac{1 - x^3}{\sqrt{2}}\right\} \ni' M_{\bar{\mathcal{B}}}(b|_W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Perciò:

$$\sigma(b|_W) = (0, 1, 2) \Rightarrow i_+(b|_W) = 0,\ i_-(b|_W) = 1.$$

10. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V. Sia f un endomorfismo diagonalizzabile di V tale che:

$$f(W) \subseteq W.$$

1) Si dimostri che $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.
2) Si dimostri che esiste un prodotto scalare definito positivo su V tale che $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.

1) Per ipotesi $f(W) \subseteq W$. Allora, sia $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ una base di W estesa a base di V. Si ha:

$$M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A_k^k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

Ora, dato che:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Allora:

$$p_M(x) = p_A(x) \, p_C(x)$$

Dunque $p_M(x)$ è completamente fattorizzabile $\Leftrightarrow$ $p_A(x)$ e $p_C(x)$ lo sono.
Inoltre, $p_M(x)$ soddisfa le condizioni su μ_g e μ_a $\Leftrightarrow$ $p_A(x)$ e $p_C(x)$ le soddisfano.
Dunque $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.

2) Sia φ il prodotto scalare standard. Esso, sappiamo, è definito positivo. Sia però φ standard non su $\mathcal{C}$, ma su $\mathcal{D}$.
Sia $V = W \oplus Z$, con $\mathcal{D} = \{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ base di autovettori di W estesa a base di autovettori di V, e $Z = \mathrm{Span}(b_{k+1}, \ldots, b_n)$.
Certamente $f(Z) \subseteq Z$. Dato che φ è non degenere:

$$\dim W^\perp = n - \dim W = n - k$$

In più:

$\forall v \in Z, \forall w \in W : \varphi(v, w) = 0 \Rightarrow Z \subseteq W^\perp, \dim Z = n - k$

Allora $Z = W^\perp$, e con ciò l'esercizio è concluso.

11. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e Φ un prodotto scalare su V di segnatura $(h, k, 0)$.

1) Si verifichi che $E = \{ f \in End(V) \mid \Phi(f(v), w) = \Phi(v, f(w)) \ \forall v, w \in V \}$ è un sottospazio vettoriale di $End(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

2) Fissato $V = \mathbb{R}^3$ e $(h, k, 0) = (2, 1, 0)$, si dica se ogni $f \in E$ è diagonalizzabile.

1)
- $0 \in E$, in quanto: $\forall v, w \in V: \ \Phi(v, 0(w)) = \Phi(0(v), w) = 0$;
- $a, b \in E \Rightarrow \forall v, w \in V: \ \Phi(a(v), w) = \Phi(v, a(w)) \ \wedge$ $\wedge \ \Phi(b(v), w) = \Phi(v, b(w)) \Rightarrow \Phi(a(v) + b(v), w) = \Phi((a+b)(v), w) =$ $= \Phi(v, a(w) + b(w)) = \Phi(v, (a+b)(w)) \Rightarrow a + b \in E$;
- $a \in E, \lambda \in \mathbb{R}: \ \Phi(v, (\lambda a)(w)) = \Phi(v, \lambda a(w)) = \lambda \Phi(v, a(w)) =$ $= \lambda \Phi(a(v), w) = \Phi(\lambda a(v), w) = \Phi((\lambda a)(v), w) \Rightarrow (\lambda a) \in E$.

Siano $v, w \in V$, $\mathcal{B}$ base ortogonale normalizzata di Φ. Allora:

$$[v]_{\mathcal{B}}^t \left[\begin{array}{c|c} I_h & \\ \hline & -I_k \end{array}\right] \left[M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \right] [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^t \left[M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^t \right] \left[\begin{array}{c|c} I_h & \\ \hline & -I_k \end{array}\right] [w]_{\mathcal{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \left[\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \hline -R_{h+1} \\ \vdots \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_1 \ \ldots & -R_{h+1} \ \ldots \end{array}\right] = Y'$$

Dunque $Y \in S(n, \mathbb{R})$, e se la vediamo così:

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -C & -D \end{array}\right], \quad Y' = \left[\begin{array}{c|c} A^t & -C^t \\ \hline B^t & -D^t \end{array}\right]$$

e secondo dei segni che compaiono possiamo subito dire che $B = -C^t$, con $B, -C^t \in M(h, k, \mathbb{R})$, e i minori A e D, di taglia $i_+(\Phi)$ e $i_-(\Phi)$, sono simmetrici. Dunque:

$$\dim E = \frac{h(h+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + hk$$

2) Sia $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$. $f \in E$, ma non:

$$P_f(x) = -x(x^2 + 1) \Rightarrow f \text{ non è diagonalizzabile.}$$

12. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1) Posti $v_1=(1,0,-1,0)$, $v_2=(0,1,1,0)$ esiste un prodotto scalare non degenere $\phi:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ tale che $\phi(v_1,v_1)=\phi(v_1,v_2)=$
$=\phi(v_2,v_2)=0$.

2) Posti $u_1=(0,1,1)$, $u_2=(1,0,-1)$, esiste un prodotto scalare non degenere $\phi':\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $\phi'(v_1,v_1)=\phi'(v_1,v_2)=$
$=\phi'(v_2,v_2)=0$.

3) Posti $w_1=(1,0,0)$, $w_2=(0,0,1)$, esiste un prodotto scalare $\phi'':\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ di segnatura $(1,1,1)$ tale che $\phi''(w_1,w_1)=$
$\phi''(w_1,w_2)=\phi''(w_2,w_2)=0$

1) e 3) hanno risposta affermativa. Consideriamo $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}''$ di $\mathbb{R}^3$ così definite:

$\mathcal{B}=\{v_1,v_2,(1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ $\quad\mathcal{B}''=\{w_1,w_2,(0,1,0)\}$,

e i prodotti scalari $\phi:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ e $\phi'':\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ così definiti:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad M^{\mathcal{B}''}_{\mathcal{B}''}(\phi'')=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

ϕ rispetta le condizioni, è facile notarlo; per ϕ'' notiamo che $\mathrm{Span}(w_2,(0,1,0))$ è un piano iperbolico, da cui (unito al fatto che $w_1\in\mathrm{Rad}\,\phi''$) $i_+(\phi'')\geq 1$, $i_-(\phi'')\geq 1$, $i_0(\phi'')\geq 1$, da cui $\sigma(\phi'')=(1,1,1)$. Le altre condizioni sono verificate.

2) ha risposta negativa. Sia $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$, con u_3 completamento qualsiasi a base di $\mathbb{R}^3$.
Si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi')=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&0&b\\a&b&c\end{bmatrix},$$

da cui si evince che R_1 e R_2 sono linearmente dipendenti, dunque ϕ' non può essere non degenere.

13. Sia Φ il prodotto scalare sullo spazio vettoriale $V = M(2, \mathbb{R})$, definito da:

$$\Phi(X, Y) = tr(X^t, Y) \quad \forall X, Y \in V$$

Per ogni matrice simmetrica $P \in V$, si consideri l'endomorfismo $f_P : V \to V$ dato da:

$$f_P(X) = PX \quad \forall X \in V$$

1) Si verifichi che Φ è definito positivo.
2) Si verifichi che l'endomorfismo f_P è simmetrico rispetto a Φ.
3) Fissato $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, si calcoli una base di V ortonormale rispetto a Φ costituita da autovettori per f_P.

1) Sia $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Allora, supposto $\Phi(X, X) = 0$:

$$tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} a^2+b^2 & * \\ * & c^2+d^2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$$

Allora Φ è anisotropo. Dato che, ad esempio, $\Phi(I, I) =$
$= tr(I^t I) = tr(I) = 2 > 0$, Φ è definito positivo.

2) Siano $X, Y \in V$:
$\Phi(X, PY) = tr(X^t PY) = tr(X^t P^t Y) = tr((PX)^t Y) =$
$= \Phi(PX, Y)$. $\quad = \Phi(X, PY)$

3) Notiamo velocemente che:

$$V_2 = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \quad V_0 = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

In più, se $V_2 = Span(v_1, v_2)$ e $V_0 = Span(v_3, v_4)$, mediante calcoli si scopre che:

$$\Phi(v_i, v_j) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Dunque una base ortonormale per Φ costituita da autovettori per f_P è:

$$\mathcal{B}^* = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

con $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

11. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono a due a due linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

2) Sia V uno spazio vettoriale reale e ϕ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $\{v_1, \dots v_n\}$ una base ortonormale di V e sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Se $\{f(v_1), \dots f(v_n)\}$ è una base ortonormale di V, allora f è un'isometria, ossia $\phi(f(v), w) = \phi(f(w), v)$ $\forall v, w \in V$.

3) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Se esiste una base di V a bandiera sia per f che per g, allora $g \circ f = f \circ g$.

1) Falso. Sia $V = \mathbb{R}^2$, $\dim V = 2$, e siano $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$. I tre vettori rispettano le ipotesi, ma ovviamente, essendo tre ed essendo $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2, sono linearmente indipendenti.

2) Vero. Se $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ è una base, allora $f \in GL(V)$; se poi f manda una base ortonormale in una base ortonormale, allora rispetta il prodotto scalare, dunque $f \in O(\phi)$. Infine:

$$\phi(v, f(w)) = [v]_B^t \, M_B^{B'}(\phi) \, M_B^{B'}(f) [w]_B = [v]_B^t \, I \, M_B^{B'}(f) [w]_B =$$
$$= [v]_B^t M_B^B(f^*) \cdot I \cdot [w]_B = [v]_B^t [M_B^B(f)]^t [w]_B =$$
$$= [M_B^{B'}(f) [v]_B]^t [w]_B = \phi(f(v), w)$$

(B è una base ortonormale in partenza, B' in arrivo. Si è usato il fatto che $\forall v, w \in V: \phi(f(v), w) = \phi(v, f^*(w))$, e che $f^* = f^t$ per prodotti scalari definiti positivi).

3) Falso. Sia $V = \mathbb{R}^2$, f e g così definite:

$$M_e^e(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_e^e(g) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Allora e, la base canonica, è a bandiera comune, ma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

dunque $g \circ f \neq f \circ g$.

15. Si determini una base di Jordan e la forma di Jordan della matrice $A \in M(4, \mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini poi il polinomio minimo della matrice $B \in M(4,\mathbb{C})$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si dica se $A \sim B$.

Innanzitutto:

$$P_A(x) = (1-x)\big[(-1)(-1+x) + (-x)[(2-x)(1-x)]\big] =$$
$$= (1-x)\big[1 - x - x(2 - 3x + x^2)\big] =$$
$$= (1-x)\big[1 - x - 2x + 3x^2 - x^3\big] = (1-x)\big[1 - 3x + 3x^2 - x^3\big] =$$
$$= (1-x)(1-x)^3 = (1-x)^4$$

$$\dim V_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(A - I) = \dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Span}(e_1 - e_2,\ e_1 + e_4)$$

Ora:

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - I)^2 = 4$$

Allora necessariamente la forma di Jordan è la seguente:

$$J(A) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Consideriamo $V = \operatorname{Ker}(A - I) \oplus H$, $H = \operatorname{Span}(e_2, e_3)$.

Si ha:

$(A - I)e_3 = e_1 + e_2 + 2e_4 = -(e_1 - e_2) + 2(e_1 + e_4)$

$(A - I)e_2 = e_1 + e_4$

Dunque una base ricercata è la seguente:

$$B_J = \{ e_1 + e_2 + 2e_4 ,\ e_3 ,\ e_1 + e_4 ,\ e_2 \}$$

Passando ora a B:

$$\begin{aligned}
p_B(x) &= (1-x)\left[(-1)(1-x) + (1-x)((1-x)^2+1)\right] = \\
&= (1-x)\left[-1 + x + (1-x)(1+x^2-2x+1)\right] = \\
&= (1-x)\left[-1 + x + (1-x)(x^2-2x+2)\right] = \\
&= (1-x)\left[-1 + x + x^2 - 2x + 2 - x^3 + 2x^2 - 2x\right] = \\
&= (1-x)\left[-x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right] = (1-x)^4
\end{aligned}$$

$$\dim V_1(B) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\dim \operatorname{Ker}(A-I)^2 = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & * & \\ & & \end{bmatrix} = 3 < 4$$

Allora necessariamente:

$$J(B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right],$$

e $A \not\sim B$. Per completezza $q_B(x) = (1-x)^3$.

16. Dire quali affermazioni sono vere e quali false.

1) Sia V uno spazio vettoriale reale, $\dim V = 3$, e sia Φ un prodotto scalare su V non degenere e non anisotropo. Allora esiste una base di V formata da vettori isotropi.

2) Sia V uno spazio vettoriale. Allora l'insieme:

$$E = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid (x-1) \mid q_f(x) \}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$.

3) Siano W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V dotato di un prodotto scalare Φ. Se $V = W_1 \oplus W_2$ e le restrizioni di Φ a W_1 e W_2 sono definite positive, allora Φ è definito positivo.

4) Sia V uno spazio vettoriale reale, $\dim V = 3$, e sia Φ un prodotto scalare su V di segnatura $(2,1,0)$. Allora esiste un sottospazio vettoriale W di V di dimensione 2 tale che la segnatura di $\Phi|_W$ è $(0,1,1)$.

1) Vero. Se $\dim V = 3$ e Φ è non degenere e non anisotropo, allora $\sigma(\Phi) = (2,1,0)$ o $\sigma(\Phi) = (1,2,0)$. Valutiamo i due casi. Se primo:

$\exists\ \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ t.c. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Allora $\mathcal{D} = \{w_1, w_2, w_3\}$, con $w_1 =$, $= v_2 + v_3$, $w_3 = v_1 + v_2 + \sqrt{2}\, w_3$ è una base di $\mathbb{R}^3$ di vettori isotropi.

Infatti,

$$a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(v_1 + v_3) + b(v_2 + v_3) + c(v_1 + v_2 + \sqrt{2}\, v_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+c)(v_1) + (b+c)(v_2) + (a + b + c\sqrt{2})(v_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + \sqrt{2}\, c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \\ (-2 + \sqrt{2})\, c = 0 \end{cases} \Rightarrow a, b, c = 0$$

Inoltre:

$\Phi(v_1 + v_3, v_1 + v_3) = \Phi(v_1, v_1) + \Phi(v_3, v_3) = 1 - 1 = 0$;

$\Phi(v_2 + v_3, v_2 + v_3) = \Phi(v_2, v_2) + \Phi(v_3, v_3) = 1 - 1 = 0$;

$\Phi(v_1 + v_2 + \sqrt{2}\, v_3, v_1 + v_2 + \sqrt{2}\, v_3) = \Phi(v_1, v_1) + \Phi(v_2, v_2) + 2\Phi(v_3, v_3) =$
$= 1 + 1 - 2 = 0$,

e $\mathcal{D}$ è una base di vettori isotropi.

Nel secondo caso:

$\exists\ \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

In maniera del tutto analoga, si dimostra che la seguente è una base di vettori isotropi:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 + v_2,\ v_1 + v_3,\ \sqrt{2}\, v_1 + v_2 + v_3 \right\}$$

2) Falso. Si consideri il polinomio nullo:

$$q_0(x) = x$$

$$x - 1 \nmid x \Rightarrow 0 \notin E,$$

mentre l'elemento neutro, per definizione, appartiene sempre ad un sottospazio vettoriale.

3) Falso. Sia $V = \mathbb{R}^2$, $V = W_1 \oplus W_2$, $W_1 = \operatorname{Span}(e_1)$, $W_2 = \operatorname{Span}(e_2)$. Sia ϕ definito come segue:

$$M^{e}_{e}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$M^{e_1}_{e_1}(\phi|_{W_1}) = [1] \quad ; \quad M^{e_2}_{e_2}(\phi|_{W_2}) = [1],$$

ma:

$$\det M^{e}_{e}(\phi) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \sigma(\phi) = (1, 1, 0),$$

visto che $\operatorname{rk} M^{e}_{e}(\phi) = 2$. Allora ϕ non è definito positivo.

4) Falso. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, v_3\}$ una base ortogonale normalizzata di W rispetto a $\phi|_W$ estesa a base di V a piacere. Allora:

$$M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\det M = a \cdot (-(a \cdot (-1))) = a^2$$

Dunque:

- CASO 1: $a = 0$, da cui $\det M = 0$, ϕ degenere;
- CASO 2: $a \neq 0 \Rightarrow \det M > 0 \Rightarrow i_-(\phi) \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \sigma(\phi) = (3, 0, 0)$ o $\sigma(\phi) = (1, 2, 0)$.

Dunque sono negate le ipotesi.

17. Si consideri su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare φ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(X) = BX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, ove:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

1) Si verifichi che $f \in O(\mathbb{R}^3, \varphi)$.

2) Si verifichi che (-1) è autovalore per f, e si determini l'autospazio $V_{-1}(f)$.

3) Si individuino 3 vettori non isotropi v_1, v_2, v_3 tali che f è composizione delle riflessioni parallele a tali vettori.

1) Dobbiamo assicurarci che f rispetti il prodotto scalare, e che f sia un isomorfismo. Dato che ci servirà nel punto 2, calcoliamo $P_B(x)$: se il termine noto non è nullo, allora f è un isomorfismo:

$$P_B(x) = \det \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{3} - x & -t & -t - \frac{2}{3} \\ t & \frac{3}{2}t - x & -\frac{1}{2}t \\ t + \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}t & -\frac{1}{2}t - \frac{4}{3} - x \end{bmatrix}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(2t + \frac{1}{3} - x\right)\left[\left(\frac{3}{2}t - x\right)\left(-\frac{1}{2}t - \frac{4}{3} - x\right) - \frac{1}{12}\right] - t\left[(-t)\left(-\frac{1}{2}t - \frac{4}{3} - x\right) + \right.$$
$$\left. - \left(-t - \frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}t\right)\right] + \left(t + \frac{2}{3}\right)\left[(-t)\left(-\frac{1}{2}t\right) - \left(-t - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}t - x\right)\right] =$$
$$= \left(2t + \frac{1}{3} - x\right)\left[-\frac{1}{4} - 2t - tx + \frac{4}{3}x + x^2 - \frac{1}{12}\right] - t\left[\cancel{\frac{1}{6}} + \frac{4}{3}t + tx - \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}t\right] +$$
$$+ \left(t + \frac{2}{3}\right)\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - tx + t - \frac{2}{3}x\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}t - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}tx + 2tx^2 - \frac{1}{6}t - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}x +$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}tx + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}tx + \frac{4}{9}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{4}x + 2tx + tx^2 +$$
$$- \frac{4}{3}x^2 - x^3 + \frac{1}{12}x + \frac{4}{9} + \frac{2}{3}tx + \frac{2}{3}t - \frac{4}{9}x =$$
$$= -x^3 + x^2\left(2t + \frac{1}{3} + t - \frac{4}{3}\right) + x\left(-\frac{2}{3} + \frac{8}{3}t - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} +\right.$$
$$\left. + 2t + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}t - \frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{1}{2}t - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}t - \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{36} +\right.$$
$$\left. + \frac{4}{9} + \frac{2}{3}t\right) = -x^3 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x - 1$$

Dunque f è un isomorfismo.

Inoltre:

$$B^t M B = M,$$

dunque B rispetta il prodotto scalare. Dunque $B \in O(\mathbb{R}^3, \phi)$

2) Abbiamo $P_B(x) = -x^3 + (\sqrt{3}-1)x^2 + (\sqrt{3}-1)x - 1$. Dato che $P_B(-1) = 0$, (-1) è autovalore per f. Completiamo la fattorizzazione:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + (\sqrt{3}-1)x^2 + (\sqrt{3}-1)x - 1 & x+1 \\ \hline -x^3 - x^2 & -x^2 + \sqrt{3}x - 1 \\ \quad \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3}-1)x - 1 & \\ \quad \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x & \\ \qquad -x - 1 & \\ \qquad -x - 1 & \\ \qquad // & \end{array}$$

Essendo $-(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$ non ulteriormente fattorizzabile, si ha:

$$P_B(x) = q_B(x) = -(x+1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$$

$$\alpha_1 = 1 \qquad \mu_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad \bar{\mu}_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

In particolare:

$$J_{\mathbb{R}}(B) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ & -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{array}\right]$$

Riguardando B, si nota subito che $V_{-1}(f) = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_3) = \mathrm{Span}(v_1)$.

3) Sicuramente una riflessione è ρ_{v_1}. Questa andrà composta con una rotazione. Ricerchiamo $(\mathrm{Span}(v_1))^\perp$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = a - 2c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Span}(v_1))^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2c\} =$$
$$= \mathrm{Span}\left((0,1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Abbiamo:

$f(v_1) = -v_1$;

$f(v_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$; $\Rightarrow M^{\{v_1,v_2,v_3\}}_{\{v_1,v_2,v_3\}}(f) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$

$f(v_3) = \frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$.

$\phi(v_2, v_2) = \phi(v_3, v_3) = 1$, $\phi(v_2, v_3) = 0 \Rightarrow M^{\{v_1,v_2,v_3\}}_{\{v_1,v_2,v_3\}}(\phi) = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Dato che la rotazione nel piano $\mathrm{Span}(v_2, v_3)$ è di $30°$, e che $\phi|_{\mathrm{span}(v_2, v_3)} \equiv \phi_{st}$, occorre ricercare due vettori tali che:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Posto $w_1 = v_3$ e $w_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} v_3 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} v_2$, si ha quanto voluto.

Dunque:

$$f = \rho_{v_1} \circ \rho_{w_2} \circ \rho_{w_1}$$

Si noti inoltre che w_2 non è isotropo, in quanto:

$$\phi(w_2, w_2) = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} \phi(v_3, v_3) + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} \phi(v_2, v_2) =$$

$$= \frac{6 + 2}{16} + \frac{6 + 2}{16} = 1 \neq 0$$

18. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi:

$$H_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0\} \qquad H_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-z=0\}$$

Per $i=1,2$ sia ρ_i la riflessione ortogonale rispetto al piano H_i e sia $\varphi=\rho_1\circ\rho_2$.

1) Si dica se φ è diagonalizzabile, e si determini la forma di Jordan reale di φ.

2) Si determini un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e φ-invariante.

1) Innanzitutto:

$$H_1 = \mathrm{Span}((1,1,0),(0,0,1)) \qquad H_2=((0,1,0),(1,0,1))$$

Dato che $H_1\cap H_2=\mathrm{Span}((1,1,1))$, sia $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Si ha, considerando il prodotto scalare standard:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_{st})=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad H_1^{\perp}=\mathrm{Span}(1,-1,0) \quad H_2^{\perp}=\mathrm{Span}(1,0,-1)$$

Ora:

$\varphi(1,1,1)=(\rho_1\circ\rho_2)(1,1,1)=\rho_1(1,1,1)=(1,1,1)$

$\varphi(0,1,0)=(\rho_1\circ\rho_2)(0,1,0)=\rho_1(0,1,0)=\rho_1\left(\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{1}{2}(1,-1,0)\right)=$
$=(1,0,0)=v_1-v_2-v_3$

$\varphi(0,0,1)=(\rho_1\circ\rho_2)(0,0,1)=(\rho_1\circ\rho_2)\left(\frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)\right)=$
$=\rho_1((1,0,0))=\rho_1\left(\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{1}{2}(-1,1,0)\right)=(0,1,0)=v_2$

Dunque:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

Ora:

$$P_M(x)=(1-x)[(-1-x)(-x)+1]=(1-x)[x^2+x+1]$$

Dunque φ non è nemmeno triangolabile.

La forma di Jordan reale, perciò, è la seguente:

$$J_{\mathbb{R}}(M)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{2}{3}\pi&\sin\frac{2}{3}\pi\\0&-\sin\frac{2}{3}\pi&\cos\frac{2}{3}\pi\end{bmatrix}$$

2) Notiamo che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \in O(\mathbb{R}^3, \Phi_{st})$$

Dunque, preso $W = \mathrm{Span}(v_1)$ φ-invariante, $W^\perp$ sarà anch'esso φ-invariante, e dato che Φ è non degenere, $\dim W^\perp = 2$.

Determiniamo $W^\perp$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = -a - b$$

$$W^\perp = \mathrm{Span}((1, 0, -1), (0, -1, 1)).$$

19. Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo diagonalizzabile di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n. Si verifichi che:

$$E = \left\{ \varphi \in Bil(V) \;\middle|\; \forall x, y \in V : \begin{cases} \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \\ \varphi(f(x),y) = \varphi(x, f(y)) \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $Bil(V)$, e se ne calcoli la dimensione.

Innanzitutto, a livello di notazione:

- f ha come autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$, di molteplicità algebrica $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$;
- con la scrittura λ_i^r intenderemo l'autovalore associato all'i-esima riga di $M_B^B(f)$; con λ_i^c stessa cosa ma con le colonne.

Dunque:

- $\forall x, y \in V: O(x,y) = O(y,x) = 0$; $O(f(x),y) = O(y, f(x)) = 0 \Rightarrow$ $O \in E$;
- $\varphi, \varphi' \in E \Rightarrow (\varphi + \varphi')(x,y) = \varphi(x,y) + \varphi'(x,y) = \varphi(y,x) + \varphi'(y,x) =$ $= (\varphi + \varphi')(y,x)$; in più $(\varphi + \varphi')$, somma di applicazioni bilineari, è bilineare. Infine:
  $(\varphi + \varphi')(f(x),y) = \varphi(f(x),y) + \varphi'(f(x),y) = \varphi(f(y),x) + \varphi'(f(y),x) =$ $= (\varphi + \varphi')(f(y),x) \Rightarrow (\varphi + \varphi') \in E$;
- $\varphi \in E, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow K\varphi$ è bilineare, e:
  $(K\varphi)(x,y) = K \cdot \varphi(x,y) = K \cdot \varphi(y,x) = (K\varphi)(y,x)$;
  $(K\varphi)(f(x),y) = K \cdot \varphi(f(x),y) = K \cdot \varphi(f(y),x) = (K\varphi)(f(y),x)$,
  dunque $(\lambda\varphi) \in E$.

D'ora in avanti sia B una matrice che diagonalizza f.
Dato che $\forall \varphi \in E$: φ è un prodotto scalare, allora:
$\forall \varphi \in E: M_B^B(\varphi) \in S(n, \mathbb{K})$

Esaminiamo la seconda condizione:

$$[w]_B^t [f]_B^t [\varphi]_B [v]_B = [w]_B^t [\varphi]_B [f]_B [v]_B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [f]_B^t [\varphi]_B = [\varphi]_B [f]_B$$

Dato che f è diagonale nella base B:

$$[f]_B^t = [f]_B \Rightarrow [f]_B [\varphi]_B = [\varphi]_B [f]_B.$$

Dunque:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}}_{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}}_{\mu_k} \end{bmatrix} [\varphi]_B = [\varphi]_B \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}}_{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}}_{\mu_k} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$\forall\, a_{ij} \in [\varphi]_B : \lambda_i^c\, a_{ij} = \lambda_j^c\, a_{ij} \Rightarrow$ se $\lambda_i^c \neq \lambda_j^c$, allora $a_{ij} = 0$

Allora:

$$M_B^B(\varphi) = \begin{bmatrix} \underbrace{*}_{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{*}_{\mu_k} \end{bmatrix}$$

Infine $M_B^B(\varphi) \in S(n, \mathbb{K})$, dunque ogni blocco dev'essere simmetrico. In definitiva:

$$\dim W = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i(\mu_i + 1)}{2}$$

10. Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ indotto da M:

$$M_e^e(\Phi) = M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esibire un sottospazio W di V di dimensione massima tra i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ tale che $\Phi|_W \equiv 0$.

Innanzitutto, notiamo facilmente che Φ non è definito, che $\Phi(e_1, e_1) = 1$ e $\Phi(e_2, e_2) = -1$.

Inoltre:

$\det M = [-(-3) + (-1)] - [-1] = [3 - 1] + 1 = 3 > 0$

Dunque necessariamente $\sigma(\Phi) = (2, 2, 0)$.

Alternativamente, potendo usare il teorema di Jacobi:

$\det D_1 = 1$

$\det D_2 = -1$

$\det D_3 = -1$

$\det D_4 = \det M = 3$

$$\Rightarrow \exists\, \mathcal{B} \text{ di } \mathbb{R}^4 \ni M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(\Phi) = (2, 2, 0)$$

Allora $w(\Phi) = \min\{i_+(\Phi), i_-(\Phi)\} = 2$. Precisamente:

$\exists\, \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4 \ni M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ è in forma normale di Witt $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Span}(w_1, w_3)$ e $\operatorname{Span}(w_2, w_4)$ sarebbero sottospazi validi

Determiniamone esplicitamente uno, cominciando con l'ortogonalizzazione e:

$$e^* = \{e_1, e_2, e_3, e_4 - e_1 + e_2 - 2e_3\}$$

$$M_{e^*}^{e^*}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

visto che $\Phi(e_4 - e_1 + e_2 - 2e_3, e_4 - e_1 + e_2 - 2e_3) = \Phi(e_4, e_4 - e_1 + e_2 - 2e_3) =$
$= \cancel{1} - \cancel{1} + 1 - 4 = -3$

Allora:

$$\tilde{e}^* = \left\{e_1, e_2, e_3, w_4 = \frac{e_4 - e_1 + e_2 - 2e_3}{\sqrt{3}}\right\}$$

è una base ortogonale normalizzata per Φ.
Allora un sottospazio valido è il seguente:

$$W = \mathrm{Span}\,(e_1 + e_2,\ e_3 + w_4) = \mathrm{Span}\,(e_1 + e_2,\ e_4 + e_2 - e_1 - e_3)$$

Un'altra maniera per affrontare il problema è il seguente

È evidente che $\Phi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$. Dunque, se $R = \mathrm{Span}\,(e_1 + e_2)$ si ha $\Phi|_R \equiv 0$.

Determiniamo l'ortogonale di R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$R^\perp = (\mathrm{Span}\,(e_1 + e_2))^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2t = 0\} =$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v = \begin{bmatrix} y - 2t \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix},\ y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Imponiamo allora che $v \in R^\perp$ sia isotropo: $\Phi(v, v) = 0$.

$$\begin{bmatrix} y - 2t & y & z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - 2t \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y - t & t - y & z + 2t & 2y + 2z - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - 2t \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= (y - t)(y - 2t) + (t - y)(y) + (z + 2t)(z) + (2y + 2z - t)(t) =$$

$$= -2t(y - t) + z^2 + 2zt + 2ty + 2tz - t^2 = t^2 + z^2 + 4tz = 0$$

Ad esempio imponiamo $t = 1$: otteniamo che una soluzione dell'equazione è $z = -2 + \sqrt{3}$. Allora il seguente sottospazio è valido:

$$W = \mathrm{Span}\,((1, 1, 0, 0), (-2, 0, -2 + \sqrt{3}, 1))$$

21. Nel duale V^* di $V = \mathbb{R}^5$ si considerino i tre funzionali:

$$\phi(1)(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i, \quad \phi(2)(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i - \sum_{i=3}^{5} x_i, \quad \phi(3)(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i + 3\sum_{i=3}^{5} x_i,$$

e sia W^* il sottospazio di V^* da essi generato. Si costruisca su V un prodotto scalare Φ tale che W^* sia il sottospazio dei funzionali Φ-rappresentabili per mezzo dei vettori di V.

Considerando e^* base duale canonica si ha:

$$[\phi(1)]_{B^*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [\phi(2)]_{B^*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad [\phi(3)]_{B^*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notiamo che:

$$2\phi(1) - \phi(2) = \phi(3) \Rightarrow \dim W^* = 2$$

Allora:

$\dim \operatorname{Imm} F_\Phi = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad} \Phi) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Rad}(\Phi) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{rk} \Phi = 2$

Dunque:

$\dim \operatorname{Span}(\text{Righe}) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Span}(\text{Colonne}) = 2$,

poiché in questo particolare caso $\operatorname{Span}(\text{Righe}) = \operatorname{Span}(\text{Colonne})$, visto che $M(\Phi) \in S(n, \mathbb{R})$.

Scegliamo allora una matrice diagonale a blocchi:

$$M_e^e(\Phi) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Alternativamente, sia B una base di $\operatorname{Rad}(\Phi)$, sia D un'estensione a piacere di B allora:

$$M_D^D(\Phi) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

RIEPILOGO GENERALE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita ($\dim V = n$).
Consideriamo $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.
Se V è finitamente generato, $V \cong V^*$ in modo non canonico, dato che:

$$\dim V = \dim V^*$$

Data una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, si definisce BASE DUALE di $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ con la seguente proprietà caratterizzante:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Allora alcuni isomorfismi tra V e V^* (non tutti i possibili) sono della seguente forma:

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow V^*$$
$$\psi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^*$$

Considerando un passaggio in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$V \xrightarrow{[\ ]_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n$$

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \xrightarrow{[\ ]_{\mathcal{B}}} M(1, n, \mathbb{K})$$

Considerando il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & V^* \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\psi'_{\mathcal{B}}"'] & M(1, n, \mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Otteniamo che $\psi'_{\mathcal{B}}(X) = X^t$.

Supponiamo ora che V sia munito di un prodotto scalare non degenere.
Abbiamo istituito un isomorfismo "privilegiato", associato a Φ:

$$F_\Phi : V \longrightarrow V^*$$
$$v \longmapsto \varphi_v : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$w \longmapsto \Phi(v, w)$$

Notiamo che F_ϕ è della forma $\varphi_\mathcal{B}$ per qualche base $\mathcal{B}$ se e solo se ϕ ammette una base ortonormale:

$\exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \ni' \{F_\phi(v_1), F_\phi(v_2) \dots F_\phi(v_n)\} = \mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots v_n^*\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \ni' \phi(v_i, v_j) = F_\phi(v_i)(v_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \ni' M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = I$

Sia ora W un sottospazio vettoriale di V, consideriamo:

$$\mathrm{Ann}\, W = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0\ \ \forall w \in W\} \subseteq V^*$$

Dimostriamo che $F_\phi^{-1}(\mathrm{Ann}\, W) = W^\perp$.

Dim.

$v \in F_\phi^{-1}(\mathrm{Ann}\, V) \Leftrightarrow F_\phi(v) \in \mathrm{Ann}\, W \Leftrightarrow F_\phi(v)(w) = 0\ \forall w \in W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(v, w) = 0\ \ \forall w \in W \Leftrightarrow v \in W^\perp$

Dunque:

$$v \in F_\phi^{-1}(\mathrm{Ann}\, W) \Leftrightarrow v \in W^\perp, \text{c.v.d.}$$

Sia allora ϕ non degenere. Allora in virtù del teorema di rappresentazione, $W^\perp \cong \mathrm{Ann}\, W$, dunque le seguenti formule sono in realtà la stessa, visto che esse sono del tutto equivalenti:

$$\dim \mathrm{Ann}\, W = \dim V - \dim W$$
$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$$

Riguardiamo ora una proposizione "di nostra conoscenza" da un nuovo punto di vista.

PROPOSIZIONE

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ allora:

$$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^t$$

Dim.

$$A \in M(m, n, \mathbb{K})$$
$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longrightarrow AX$$

Per la formula delle dimensioni:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Imm}\, A$$
$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, A^t + \dim \mathrm{Imm}\, A^t,$$

ovvio:

$$n = \dim \left[\text{Sol } AX = 0 \right] + \text{rk } A$$
$$m = \dim \left[\text{Sol } A^t X = 0 \right] + \text{rk } A^t$$

Muniamo $\mathbb{K}^n$ di $<\,,\,>$ prodotto scalare standard, si ha:

$$< e_i , e_j > = \delta_{ij} ,$$

dunque la base canonica $\mathcal{C}$ è ortonormale per $<\,,\,>$.

Allora:

$$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; AX = 0 \right\} = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{cases} R_1 X = 0 \\ \vdots \\ R_m X = 0 \end{cases} \right\}$$

Alla luce della presenza di $<\,,\,>$:

$$R_j X \rightsquigarrow [R_j^t]^t \, I \, X = 0$$

Dunque:

$$X \in \text{Ker } A \Leftrightarrow X \in \left(\text{Span} \left(R_1^t , \ldots R_m^t \right) \right)^{\perp}$$

Allora:

$$n = \dim \left(\text{Span} \left(R_1^t , \ldots , R_m^t \right) \right)^{\perp} + \text{rk } A ,$$

e visto che Φ è non degenere:

$$n = \dim \left(\text{Span} \left(R_1^t , \ldots R_m^t \right) \right)^{\perp} + \dim \left(\text{Span} \left(R_1^t , \ldots R_m^t \right) \right) =$$
$$= \dim \left(\text{Span} \left(R_1^t , \ldots R_m^t \right) \right)^{\perp} + \text{rk } A^t ,$$

da cui $\text{rk } A = \text{rk } A^t$, c.v.d.

Nelle stesse ipotesi di prima consideriamo:

$$\begin{aligned} \text{End}(V) &\longrightarrow \text{End}(V^*) \\ f &\longrightarrow f^t \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^t(\varphi)"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f$$

Consideriamo l'aggiunzione, nel caso V sia munito di Φ prodotto scalare non degenere:

$$\begin{aligned} \text{End}(V) &\longrightarrow \text{End}(V) \\ f &\longrightarrow f^* \end{aligned}$$

In particolare:

$$\begin{tikzcd} f^*(v) \quad V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_\phi"'] & V \quad v \arrow[d, "F_\phi"] \arrow[l, bend left=60, "f^*"] \\ V^* & V^* \arrow[l, "f^t"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi_{f^*(v)} = f^t(\varphi_v) = \varphi_v \circ f \qquad \varphi_v$

Dunque, la commutatività del diagramma assicura che:

$\forall\, v \in V: \ F_\phi(f^*(v)) = \varphi_v \circ f$

$\forall\, v \in V, \forall\, w \in W: \ \phi(f^*(v), w) = \phi(v, f(w))$

Considerando un passaggio in coordinate rispetto alla base B:

$$V_B \xrightarrow{[\ ]_B} \mathbb{K}^n$$

$\phi \rightsquigarrow M \in S(n, \mathbb{K})$ $\qquad\qquad$ $f \rightsquigarrow A \in M(n, \mathbb{K})$

$M = M^t$ $\qquad\qquad$ $f^* \rightsquigarrow A^* \in M(n, \mathbb{K})$

$\det M \neq 0$, perché

ϕ è non degenere

Vi è la seguente proprietà:

$$A^* = M^{-1} A^t M$$

Se la base scelta è ortonormale, allora:

$$F_\phi(B) = B^* \quad \wedge \quad F_\phi^{-1}(B^*) = B$$

$$f^* = F_\phi^{-1} \circ f^t \circ F_\phi$$

$$f^*(v) = (F_\phi^{-1} \circ f^t \circ F_\phi)(v) = (F_\phi^{-1} \circ f^t)(\varphi_v) =$$

$$= (F_\phi^{-1})(f^t(\varphi_v)) = f^t(v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^* = f^t$$

D'altronde $M_B^B(\phi) = I$, dunque $A^* = A^t$.

Dunque tutto è coerente.

ACCOPPIAMENTO CANONICO

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ($n = \dim V$). Sia, d'ora in avanti Φ un prodotto scalare non degenere.

Consideriamo allora il cosiddetto ACCOPPIAMENTO CANONICO:

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle : V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi, v) &\longrightarrow \varphi(v) \end{aligned}$$

È evidente che questa applicazione sia bilineare.

Se V non è munito di prodotto scalare, si è allora il seguente isomorfismo canonico:

$$\begin{aligned} \psi : \operatorname{End}(V) &\longrightarrow \operatorname{Bil}(V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}) \\ f &\longrightarrow \psi_f : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\qquad\quad (\varphi, v) \longrightarrow \varphi(f(v)) \end{aligned}$$

Se V è invece munito di prodotto scalare Φ:

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "{(F_\Phi,\, \mathrm{Id})}"'] \arrow[dr, dashed] & \\ V^* \times V \arrow[r] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$(v, w) \longmapsto (\varphi_v, w) \longrightarrow \varphi_v(w)$$

Abbiamo dunque una RAPPRESENTAZIONE PER MEZZO DI Φ DELL'ISOMORFISMO CANONICO:

$$\begin{aligned} \psi_\Phi : \operatorname{End}(V) &\longrightarrow \operatorname{Bil}(V \times V \longrightarrow \mathbb{K}) \\ f &\longrightarrow \psi_{\Phi, f} : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\qquad\quad (v, w) \longrightarrow \varphi_v(f(w)) = \\ &\qquad\qquad\qquad = \Phi(v, f(w)) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo che $\langle\, , \rangle \rightsquigarrow \psi_I$. Infatti $\langle \varphi, v \rangle = \psi_I(\varphi, v) = \varphi(\mathrm{Id}(v)) = \varphi(v)$. Se poi consideriamo $\psi_{\Phi, I}$, si ha:

$$\psi_{\Phi, I}(v, w) = \Phi(v, \mathrm{Id}(w)) = \Phi(v, w)$$

dunque $\psi_{\Phi, I} \rightsquigarrow \Phi$.

OSSERVAZIONE

Non ha senso parlare di applicazioni $\psi_f \in \mathrm{Bil}(V^* \times V \to \mathbb{K})$ simmetriche, dato che i due spazi in prodotto diretto sono differenti. Ha invece senso farlo per $\phi \in \mathrm{Bil}(V \times V \to \mathbb{K})$, visto che i due spazi in prodotto diretto sono uguali.

Consideriamo il seguente schema:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bil}(V^* \times V, \mathbb{K}) \ni \langle\, , \rangle \arrow[d, "\Omega"] \\
\mathrm{End}(V) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\psi_\phi"'] & \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K}) \\
 & \mathrm{Scal}(V) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

Primo quesito: qual è l'immagine di $\langle\, , \rangle$ (accoppiamento canonico) secondo la funzione composta?

$$\Omega(\langle\, , \rangle) = (\psi_\phi \circ \psi^{-1})(\langle\, , \rangle) = (\psi_\phi \circ \psi^{-1})(\psi_I) =$$
$$= (\psi_\phi)(I) = \psi_{\phi, I} : V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(v, w) \to \phi(v, w)$$

Secondo quesito: cos'è $\psi_\phi^{-1}(\mathrm{Scal}(V))$?

$$\psi_\phi^{-1}(\mathrm{Scal}(V)) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid \psi_{\phi, f}(v, w) = \psi_{\phi, f}(w, v) \} =$$
$$= \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid \phi(v, f(w)) = \phi(w, f(v)) \}$$

Ma in precedenza abbiamo caratterizzato f^* in questo modo: $\forall v \in V, \forall w \in W : \phi(f^*(v), w) = \phi(v, f(w))$. Allora:

$$\psi_\phi^{-1}(\mathrm{Scal}(V)) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid \phi(f^*(v), w) = \phi(f(v), w) \} =$$
$$= \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid f = f^* \}$$

Dunque ogni $f \in \mathrm{End}(V)$ induce una forma bilineare, e ogni $f \in \mathrm{End}(V)$, $f = f^*$ induce un prodotto scalare.

ENDOMORFISMI UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILI

Un endomorfismo si definisce UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILE se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di (V, ϕ) tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in D(n, \mathbb{R})$.

(Chiaramente si sta supponendo V spazio vettoriale reale di dimensione finita munito di prodotto scalare definito positivo: d'ora in poi parleremo di (V, ϕ) SPAZIO EUCLIDEO)

PROPOSIZIONE

Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo unitariamente diagonalizzabile. Allora $f = f^*$.

In versione matriciale, sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice unitariamente diagonalizzabile. Allora $A = A^t$.

Dim.

Per ipotesi:

$\exists\ \mathcal{B}$ ortonormale di V t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in D(n, \mathbb{R}) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k \end{bmatrix}$

Allora:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = B^t = B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow f = f^*$$

In versione matriciale, per ipotesi:

$\exists\ P \in O(n, \mathbb{R})$ t.c. $P^t A P = P^{-1} A P = D \in D(n, \mathbb{R})$

Trasponendo tutto:

$$(P^t A P)^t = D^t = D$$

$$P^t A^t P^{t^t} = D \Rightarrow P^t A^t P = D = P^t A P$$

Allora $A = A^t$. In modo equivalente, $A \in S(n, \mathbb{R})$, c.v.d.

PREMESSE AL TEOREMA SPETTRALE REALE

PREMESSA

L'enunciato del teorema spettrale reale è costituito da un "se e solo se", pertanto, d'ora in avanti nelle dimostrazioni verrà dimostrata solo un'implicazione, essendo l'altra già stata dimostrata nel paragrafo precedente a questo.

PREMESSA - ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale reale finitamente generato, munito di un prodotto scalare Φ definito positivo.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V.

Allora:

$\exists\ \tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_n\}$ ortonormale per Φ t.c.:

$\forall\ i = 1 \dots n : \mathrm{Span}(v_1 \dots v_i) = \mathrm{Span}(w_1 \dots w_i)$

Dim.

Innanzitutto:

$w_1 = v_1 \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(w_1)$

Dopodiché:

$$w_2 = v_2 - \frac{\Phi(v_2, w_1)}{\Phi(w_1, w_1)} w_1 \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$$

$\vdots$

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Phi(v_i, w_j)}{\Phi(w_j, w_j)} w_j \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1 \dots v_i) = \mathrm{Span}(w_1 \dots w_i)$$

Dunque $\mathcal{B} = \{w_1 \dots w_n\}$ è ortogonale. Ora:

$\forall\ i = 1 \dots n : \tilde{w}_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$

La base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_1 \dots \tilde{w}_n\}$ è allora ortonormale per Φ, e avente la proprietà richiesta, c.v.d.

TEOREMA SPETTRALE REALE
PRIMA DIMOSTRAZIONE

Sia (V, Φ) uno spazio euclideo.
Allora:

$f \in End(V)$ è tale che $\forall v, w \in V : \Phi(f(v), w) = \Phi(w, f(v))$

$$\Updownarrow$$

$\exists \mathcal{B}$ di V : 1) ortonormale per Φ : $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = I$;
2) di autovettori per f: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in D(n, \mathbb{R})$

Dim.
Sia $\mathcal{S}$ una base di V ortonormale per Φ. Allora, essendo $f = f^* = f^t$ (si ricordi che $\mathcal{S}$ è ortonormale per Φ):

$A = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}}(f)$, $A = A^t \Rightarrow A \in S(n, \mathbb{R})$

Supponiamo che sia vero che f è triangolabile, ossia:
$\exists \mathcal{C}$ base a bandiera per f
(Questa proposizione verrà dimostrata in seguito).

Allora, applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt:
$\exists \mathcal{F}$ ortonormale per Φ a bandiera per f

Dato che $\mathcal{F}$ è ortonormale e quindi $f = f^* = f^t$:

$$M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(f) \in S(n, \mathbb{R})$$

Inoltre, dato che $\mathcal{F}$ è a bandiera per f:

$$M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(f) \in T(n, \mathbb{R})$$

Allora $M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}(f) \in T(n, \mathbb{R}) \cap S(n, \mathbb{R}) = D(n, \mathbb{R})$, dunque $\mathcal{F}$ è una base ortonormale per Φ di autovettori per f, c.v.d.

TEOREMA SPETTRALE REALE
SECONDA DIMOSTRAZIONE

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita n. Sia ϕ un prodotto scalare definito positivo. Sia $f \in End(V)$. Allora:

f è unitariamente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $f = f^*$

In versione matriciale, sia $A \in M(n, \mathbb{R})$. Allora:

A è unitariamente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $A \in S(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow A = A^t$

Dim.

Dobbiamo dimostrare un'inclusione sola:

$$\left.\begin{array}{l} f^* = f \\ A^t = A \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A \\ f \end{array} \text{ unitariamente diagonalizzabile}$$

Supponiamo che il seguente lemma sia vero (in seguito verrà dimostrato):

LEMMA

$$f = f^* \Rightarrow Sp(f) \neq \emptyset$$

Sotto quest'ipotesi aggiuntiva, procediamo per induzione su $n = \dim V \geq 1$.

CASO INIZIALE

$n = 1$

In questo caso non c'è nulla da dire: ogni endomorfismo è unitariamente diagonalizzabile, così come ogni endomorfismo è simmetrico.

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Per il lemma, che abbiamo supposto vero:

$\exists\, v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

Allora:

$$V = Span(v) \hat{\oplus} (Span(v))^\perp$$

$$V = Span(v) \hat{\oplus} Z_v \quad , \quad Z_v = (Span(v))^\perp$$

Consideriamo $(Z_v, \Phi|_{Z_v})$.

Immediatamente, "a fortiori" $\Phi|_{Z_v}$ è definito positivo.

Dato che $\mathrm{Span}(v)$ è f-invariante, anche Z_v è f-invariante.

Infatti

$\forall w \in Z_v : \Phi(v, w) = 0$

$\forall w \in Z_v : \Phi(v, f(w)) = \Phi(w, f(v)) = \Phi(w, \lambda v) = \lambda \Phi(w, v) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall w \in Z_v : f(w) \in Z_v \Rightarrow Z_v$ è f-invariante

Inoltre $g = f|_{Z_v}$ è "a fortiori" autoaggiunta.

Per ipotesi induttiva, esiste una base B' ortonormale per $(Z_v, \Phi|_{Z_v})$ formata da autovettori per $g = f|_{Z_v}$.

Allora $B = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, B' \right\}$ è una base ortonormale di V per Φ, formata da autovettori per f, c.v.d.

LEMMI DA DIMOSTRARE

PRIMA DIMOSTRAZIONE

Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo.
Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo autoaggiunto: $f = f^*$.
Allora $Sp(f) \neq \emptyset$.

Dim.
Procediamo per induzione su $n = \dim V$.

CASO INIZIALE
$n = 2$
Non ha senso considerare il caso 1; consideriamo il caso $n=2$, decisamente più utile ai fini della comprensione.
Attraverso un passaggio in coordinate in una base ortonormale per ϕ otteniamo:
$\forall\, X \in \mathbb{R}^2 : \langle X, X \rangle = X^t I X = x_1^2 + x_2^2$
Consideriamo la SFERA UNITARIA:

$$S_1 = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X^t I X = 1 \}$$

(che nel caso 2 descrive la circonferenza goniometrica).
Consideriamo:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow X^t A X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F|_{S_1} : S_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow X^t A X \end{aligned}$$

Se $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, allora:

$$X^t A X = a x_1^2 + 2c\, x_1 x_2 + b x_2^2$$

Consideriamo allora la funzione composta:

$$F|_{S_1} \circ h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

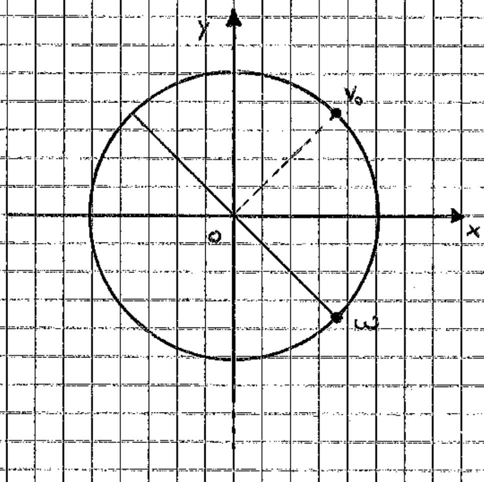
$$t \longrightarrow P_t = (\cos t, \sin t) \longrightarrow a^2 \cos^2 t + 2c \sin t \cos t + b \sin^2 t$$

Essendo composizione e somma di funzioni continue, questa funzione è continua, definita peraltro in un intervallo chiuso e limitato.

Per il Teorema di Weierstrass, esiste in $[0, 2\pi]$ un punto t_0 di massimo per la funzione $F_{S_1} \circ h$. Sia $v_0 = (\cos t_0, \sin t_0)$.
Il nostro intento è quello di dimostrare che v_0 è un autovettore per A, ossia $Av_0 = \lambda v_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sia $w \in (\mathrm{Span}(v_0))^\perp \cap S_1$. Allora:

$$Av_0 = \lambda v_0 \iff \langle Av_0, w \rangle = 0$$



Consideriamo:

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S_1$$
$$t \longmapsto \cos t \, v_0 + \sin t \, w$$

Innanzitutto l'immagine di γ è a valori unitari:

$$\langle \cos t \, v_0 + \sin t \, w, \cos t \, v_0 + \sin t \, w \rangle = \cos^2 t \langle v_0, v_0 \rangle + \sin^2 t \langle w, w \rangle +$$
$$+ \underline{2 \sin t \cos t \langle v_0, w \rangle} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \mathrm{Im} \, \gamma \in S_1$$

Notiamo che $v_0 = \gamma(0)$.
Consideriamo ora:

$$F \circ \gamma,$$

e dato che $v_0 = \gamma(0)$ è punto di massimo:

$$(F \circ \gamma)'(0) = 0$$

Dunque:

$$(F \circ \gamma)(t) = F(\cos t \, v_0 + \sin t \, w) = \cos^2 t \langle v_0, Av_0 \rangle + \sin^2 t \langle w, Aw \rangle +$$
$$+ 2 \sin \cos t \langle Av_0, w \rangle$$

Derivando e valutando in 0:

$$2(\cos^2 0 + \sin^2 0)(w^t A v_0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w^t A v_0 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(Av_0) \perp w \Rightarrow Av_0 = \lambda v_0, \text{ c.v.d.}$$

Riepilogando, abbiamo considerato la SFERA UNITARIA e la seguente funzione:

$$F|_{S_1} : S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, x \rangle = 1 \} \to \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^t A x$$

Per il Teorema di Weierstrass, abbiamo determinato v_0 punto di massimo della funzione composta $F|_{S_1} \circ h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, v_0 immagine di $t_0 \in [0, 2\pi]$.

Considerato allora $w \in (\text{Span}(v_0))^\perp \cap S_1$, abbiamo considerato $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(F \circ \gamma)(t) = F(\cos t\, v_0 + \sin t\, w)$. In particolare $(F \circ \gamma)(0) = F(v_0)$, dunque 0 è un punto di massimo per $(F \circ \gamma)$: $(F \circ \gamma)'(0) = 0$.

Con semplici calcoli abbiamo quindi ottenuto la Tesi: $\langle A v_0, w \rangle = 0$, ossia $A v_0 = \lambda v_0$.

PASSO INDUTTIVO

Su $\mathbb{R}^n$ prendo $S_{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1 \}$.

Questo insieme è chiuso e limitato in quanto esso è la controimmagine di $\{0\}$ secondo la funzione $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, che è continua: e per una funzione continua la controimmagine di un chiuso è un chiuso. Inoltre è limitato, perché $Y = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle \leq 2 \} \supseteq S_1$.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)

Se K è compatto e $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, allora esiste in K un punto di massimo.

A questo punto basta ricalcare la dimostrazione precedente per giungere alla Tesi, c.v.d.

OSSERVAZIONE

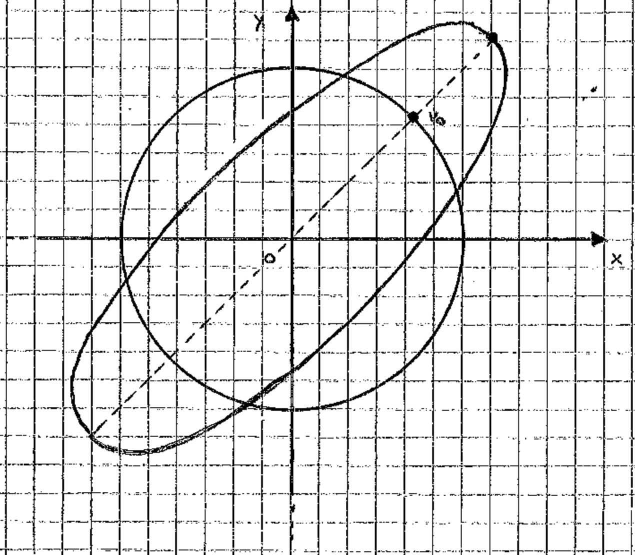
Dato $\mathbb{R}^n$ e Φ prodotto scalare definito positivo, abbiamo le seguenti due equazioni:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2 = 1$$

La prima rappresenta una sfera, la seconda descrive un ellissoide.

Consideriamo allora l'asse maggiore dell'ellissoide: la proiezione di un vertice su S_1 determina v_0 autovettore per f.
Per semplicità mostriamo il caso $\mathbb{R}^2$:



Notiamo che induttivamente, abbiamo dimostrato che un endomorfismo autoaggiunto è triangolabile. Infatti, partendo da $\mathbb{R}^n$, si considera S_{n-1} e l'ellissoide generato da $a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = 1$, e si determina mediante la proiezione un autovettore. Dopodiché ci si restringe al sottospazio ortogonale, di dimensione $(n-1)$ e si itera il procedimento, considerando $f|_{(\mathrm{Span}(v_0))^\perp}$ e la sfera unitaria di dimensione $(n-2)$, e così via.

COROLLARIO
Un endomorfismo autoaggiunto su (V, Φ) spazio euclideo è triangolabile.

FORME SESQUILINEARI

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Un'applicazione:

$$\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

si definisce FORMA SESQUILINEARE su V se è lineare per il primo argomento e "antilineare" per il secondo.

In altre parole:

$$\forall\, v', v'', w', w'' \in V: \quad \phi(v'+v'', w') = \phi(v', w') + \phi(v'', w')$$
$$\phi(kv', w') = k\,\phi(v', w')$$
$$\phi(v', w'+w'') = \phi(v', w') + \phi(v', w'')$$
$$\phi(v', kw') = \bar{k}\,\phi(v', w')$$

Una forma sesquilineare si definisce PRODOTTO HERMITIANO se:
$\forall\, v, w \in V : \phi(v, w) = \overline{\phi(w, v)}$

Una forma sesquilineare si definisce PRODOTTO ANTIHERMITIANO se:
$\forall\, v, w \in V : \phi(v, w) = -\overline{\phi(w, v)}$

L'insieme delle forme sesquilineari è contenuto in $\mathcal{F}(V \times V, \mathbb{C})$, e ne è un sottospazio. Gli insiemi delle forme hermitiane e antihermitiane non sono sottospazi vettoriali di $Sesq(V)$, poiché non sono chiusi per il prodotto per scalare complesso.

A tal proposito mostriamo che vi è una bigezione:

$$\alpha : Herm(V) \longrightarrow AntiHerm(V)$$
$$\phi \longrightarrow i\phi$$

Dim.

Sia $\phi \in Herm(\phi)$, consideriamo $i\phi$.

Si ha:

$$i\phi(v, kw) = i\,\overline{\phi(kw, v)} = \bar{k}\, i\,\overline{\phi(w, v)} = \bar{k}\, i\phi(v, w);$$
$$i\phi(v, w) = i\,\overline{\phi(w, v)} = -\overline{i\phi(w, v)} = -\overline{i\phi(w, v)}.$$

Nella stessa maniera si dimostra che se $\phi \in AntiHerm(V)$ allora $\frac{1}{i}\phi \in Herm(V)$, c.v.d.

COROLLARIO

Se V è finitamente generato allora:

$$\dim \mathrm{Herm}(V) = \dim \mathrm{AntiHerm}(V)$$

Herm (V) e AntiHerm (V) vanno però visti come $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, in quanto non sono $\mathbb{C}$-spazi vettoriali, e la nozione di dimensione non avrebbe senso.

Data ϕ forma sesquilineare su V $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, si definisce FORMA SESQUILINEARE QUADRATICA:

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$v \longrightarrow \phi(v,v)$$

PROPOSIZIONE

Sia ϕ su $V_{\mathbb{C}}$ una forma sesquilineare. Allora:

$$\phi \in \mathrm{Herm}(V) \iff \mathrm{Imm}\,\Phi \subseteq \mathbb{R}$$
$$\phi \in \mathrm{AntiHerm}(V) \iff \mathrm{Imm}\,\Phi \subseteq i\mathbb{R}$$

Dim.

Sia ϕ prodotto hermitiano. Allora:

$\forall v \in V : \phi(v,v) = \overline{\phi(v,v)} \Rightarrow \phi(v,v) \in \mathbb{R}$

Dunque $\mathrm{Imm}\,\Phi \subseteq \mathbb{R}$.

Sia ϕ prodotto antihermitiano. Allora:

$\forall v \in V : \phi(v,v) = -\overline{\phi(v,v)} \Rightarrow \phi(v,v) \in i\mathbb{R}$

Dunque $\mathrm{Imm}\,\Phi \subseteq i\mathbb{R}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{Imm}\,\Phi \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

$\forall v,w \in V : \phi(v+w, v+w) = \phi(v,v) + \phi(v,w) + \phi(w,v) + \phi(w,w)$

Dato che $\phi(v+w, v+w), \phi(v,v), \phi(w,w) \in \mathbb{R}$:

$$\phi(v,w) + \phi(w,v) \in \mathbb{R}$$

Se avessimo considerato $\phi(v+kw, v+kw)$, $k \in \mathbb{C}$, avremmo avuto:

$$\phi(v, kw) + \phi(kw, v) \in \mathbb{R}$$
$$\bar{k}\,\phi(v,w) + k\,\phi(w,v) \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\bar{k}\,\phi(v,w) + k\,\phi(w,v) = k\,\overline{\phi(v,w)} + \bar{k}\,\overline{\phi(w,v)}$$
$$\bar{k}\left(\phi(v,w) - \overline{\phi(w,v)}\right) = k\left(\overline{\phi(v,w)} - \phi(w,v)\right)$$

Allora $\bar{k}\left(\phi(v,w) - \overline{\phi(w,v)}\right)$ è uguale al suo coniugato.

Se per ogni $k \in \mathbb{C}$ $\bar{k}(\phi(v,w) - \overline{\phi(w,v)}) \in \mathbb{R}$, necessariamente:

$$\forall v,w \in V: \phi(v,w) - \overline{\phi(w,v)} = 0 \Rightarrow \phi \in Herm(V).$$

Sia ora $Imm\, \Phi \subseteq i\mathbb{R}$. Allora:

$$\forall v,w \in V: \phi(v+w, v+w) = \phi(v,v) + \phi(w,w) + \phi(v,w) + \phi(w,v)$$

Allora necessariamente:

$$\phi(v,w) + \phi(w,v) \in i\mathbb{R}$$

Introducendo $k \in \mathbb{C}$:

$$\bar{k}\,\phi(v,w) + k\,\phi(w,v) \in i\mathbb{R}$$

Allora:

$$\bar{k}\,\phi(v,w) + k\,\phi(w,v) = -k\,\overline{\phi(v,w)} - \bar{k}\,\overline{\phi(v,w)}$$

$$\bar{k}\left(\phi(v,w) + \overline{\phi(v,w)}\right) = -k\left(\overline{\phi(v,w)} + \phi(v,w)\right)$$

Dunque:

$$\forall \bar{k} \in \mathbb{C}: \bar{k}\left(\phi(v,w) + \overline{\phi(w,v)}\right) \in i\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(v,w) + \overline{\phi(w,v)} = 0 \Rightarrow \phi \in AntiHerm(V), \text{ c.v.d.}$$

Le nozioni di isometria tra $\mathbb{C}$-spazi vettoriali muniti di prodotti scalari hermitiani si estende in modo naturale, a partire dal caso dei prodotti scalari.

In alternativa a $O(\phi)$ e $O(n,\mathbb{R})$, definiamo il GRUPPO UNITARIO $U(\phi)$ degli OPERATORI UNITARI di (V,ϕ):

$$U(\phi) = \{ f \in GL(V) \mid \forall w,v \in V: \phi(w,v) = \phi(f(w), f(v)) \}$$

Nel caso matriciale, si definisce GRUPPO UNITARIO MATRICIALE CLASSICO:

$$U(n,\mathbb{C}) = \{ A \in M(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^t = A^* \} =$$

$$= \{ A \in M(n,\mathbb{C}) \mid f_A^{-1} = f_A^* \}$$

MATRICI DI FORME SESQUILINEARI

In modo del tutto naturale rispetto a quanto già visto per i prodotti scalari, se V è uno spazio vettoriale complesso finitamente generato e Φ è una forma sesquilineare, allora, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \{a_{ij}\}_{i,j=1\dots n} \quad \text{t.c.} \quad \forall i, \forall j: \; a_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$$

L'espressione matriciale nella base $\mathcal{B}$ per la forma sesquilineare Φ è allora:

$\forall v, w \in V: \quad \Phi(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^t \, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \, \overline{[w]}_{\mathcal{B}}$

Viceversa, data $M \in M(n, \mathbb{C})$, esiste (ed è unica) una forma sesquilineare Φ tale che $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$, ed è così definita:

$$[v]_{\mathcal{B}}^t \, M \, \overline{[w]}_{\mathcal{B}} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij} v_i \overline{w_j} = \Phi(v, w)$$

Allora la seguente applicazione, con $\mathcal{B}$ base di V:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}} : \operatorname{Sesq}(V) &\longrightarrow M(n, \mathbb{C}) \\ \Phi &\longrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \end{aligned}$$

è un isomorfismo, dunque

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Sesq}(V) = n^2$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Sesq}(V) = 2n^2$$

Risulta ora naturale che, se Φ è hermitiana, allora:

$\forall \mathcal{B}$ di V: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)}^t$

Se Φ è invece antihermitiana, si ha:

$\forall \mathcal{B}$ di V: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = -\overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)}^t$

Allora, presa $\mathcal{B}$ base di V i seguenti sono isomorfismi tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}}^h : \operatorname{Herm}(V) &\longrightarrow H(n, \mathbb{C}) \\ \Phi &\longrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}}^{ah} : \operatorname{AntiHerm}(V) &\longrightarrow AH(n, \mathbb{C}) \\ \Phi &\longrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) \end{aligned}$$

Ora, sia $\Phi \in \operatorname{Herm}(V) \cap \operatorname{AntiHerm}(V)$. Allora:

$$\Phi(v, w) = -\overline{\Phi(w, v)} = -\Phi(v, w) \Rightarrow \Phi = 0$$

Allora $\operatorname{Herm}(V) \cap \operatorname{AntiHerm}(V) = \{0\}$.

Inoltre notiamo che per ottenere $A \in H(n, \mathbb{C})$ è sufficiente (e necessario) avere una somma tra matrici simmetriche e matrici antisimmetriche moltiplicate per i.

Ex. $\begin{bmatrix} 2 & 4i \\ -4i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

Dunque $\dim_{\mathbb{R}} Herm(V) = n^2$. Discorso analogo per $AntiHerm(V)$: si ha anche in questo caso $\dim_{\mathbb{R}} AntiHerm(V) = n^2$, visto che (a titolo di informazione) ogni matrice indotta da una forma antihermitiana si può ottenere sommando una matrice simmetrica moltiplicata per i e una matrice antisimmetrica.

Ex. $\begin{bmatrix} 2i & 3+2i \\ -3+2i & 3i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Dunque, se $Herm(V)$ e $AntiHerm(V)$ sono visti come $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, vale:

$$Sesq(V) = Herm(V) \oplus AntiHerm(V)$$

PRODOTTO HERMITIANO UNITARIO

L'analogo del prodotto scalare euclideo, ovvero il prodotto hermitiano indotto dalla matrice identità, ossia tale che:

$$M_e^e(\varphi_u) = I$$

$$\varphi_u(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n = < x, y >_H$$

prende il nome di PRODOTTO HERMITIANO UNITARIO:

- hermitiano, perché la matrice che induce è, ad esempio, simmetrica;
- unitario, perché $I^t \cdot \bar{I} = I \cdot \bar{I}^t = I$.

Potremmo far ricorso alla rappresentazione matriciale per dimostrare che φ_u è definito positivo. Ma si noti che:

$\forall\ x \in V:\ \varphi_u(x, x) = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$,

e questa quantità è sempre positiva, essendo una somma di quadrati di reali, a meno che $v = 0$.

Dimostriamo ora alcune proprietà di $<,>_H$:

- $< z, w' + w'' >_H = z^t I (\overline{w' + w''}) = z^t I \bar{w}' + z^t I \bar{w}'' = < z, w' >_H + < z, w'' >_H$;
- $< z' + z'', w >_H = (z' + z'')^t I \bar{w} = z'^t I \bar{w} + z''^t I \bar{w} = < z', w >_H + < z'', w >_H$;
- $< kz, w >_H = (kz)^t I \bar{w} = k \cdot z^t I \bar{w} = k < z, w >_H$;
- $< z, kw >_H = z^t I (\overline{kw}) = \bar{k} \cdot z^t I \bar{w} = \bar{k} < z, w >_H$.

Inoltre:

$\forall\ v \in V:\ < z, z >_H = \overline{< z, z >_H} \Rightarrow < z, z >_H \in \mathbb{R}$

LEMMI DA DIMOSTRARE

SECONDA DIMOSTRAZIONE

Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo.

Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo autoaggiunto: $f = f^*$.

Allora:

$\exists\, \mathcal{B}$ di V t.c. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in T(n, \mathbb{R})$

Equivalentemente sia $A \in S(n, \mathbb{R})$: $A = A^t$.

Allora A è triangolabile, ossia:

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \mu_a(\lambda) = n$$

Dim.

Procediamo ad una complessificazione dell'ambiente in cui ci troviamo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f_{\mathbb{C}}"'] & V_{\mathbb{C}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A_{\mathbb{C}} = A"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Sia ora $\mathcal{B}$ una base di V ortonormale per ϕ. Allora:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = I \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = B = B^t$$

Dato che $\mathcal{B}$ è base reale per $f_{\mathbb{C}}$:

$$M_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{B}}(f) = B$$

Dato che $B \in M(n, \mathbb{C})$ è sicuramente triangolabile, esiste un autovettore per B:

$\exists\, z \in \mathbb{C}^n, \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $Bz = \lambda z$ $(z \neq 0)$

Il nostro intento è dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$: equivalentemente $\lambda = \bar{\lambda}$.

A questo punto, "complessifichiamo" ϕ: in altre parole, consideriamo il prodotto hermitiano unitario indotto da $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = I$:

$$\langle z, w \rangle_H \overset{def}{=} z^t I \bar{w}$$

Dunque:

- $\lambda < z, z>_H = <\lambda z, z>_H = <Bz, z>_H = (Bz)^t I \bar{z} = z^t B^t \bar{z} = z^t B \bar{z}$;
- $\bar{\lambda} < z, z>_H = <z, \lambda z>_H = <z, Bz>_H = z^t I \bar{B}\bar{z} = z^t B \bar{z}$.

Dato che $z \neq 0$, $<z, z>_H \neq 0$, essendo il prodotto hermitiano unitario definito positivo. Allora necessariamente:

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \text{ c.v.d.}$$

Formalmente, se $A \in H(n, \mathbb{C})$, ossia $\bar{A}^t = A$, allora A ha tutti gli autovalori reali, perché:

$$< Az, z>_H = <z, Az>_H$$

$$\lambda <z, z>_H = \bar{\lambda} <z, z>_H, \quad <z, z>_H \neq 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

In maniera del tutto analoga, si può dimostrare, ad esempio, che $B \in AH(n, \mathbb{C})$ ammette solo autovalori immaginari puri. La dimostrazione è analoga, e alla fine si dimostra che $\lambda = -\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE

Un endomorfismo $f \in End(V)$ si dice UNITARIO se $f^{-1} = f^*$.

Si può dimostrare che se $f \in End(V)$ è unitario, allora ogni autovalore λ è della forma $e^{i\theta}$, ossia è unitario.

In effetti:

$$< f^{-1}(v), w>_H = < f^*(v), w>_H = < v, f(w)>_H$$

Se dunque $v \in V_\lambda(f)$:

$$< f^{-1}(v), v>_H = < v, f(v)>_H$$

$$< \lambda^{-1} v, v>_H = < v, \lambda v>_H$$

$$\lambda^{-1} < v, v>_H = \bar{\lambda} < v, v>_H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = \| \lambda \|^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi[$$

FORMULAZIONE EQUIVALENTE DEL TEOREMA SPETTRALE REALE

Abbiamo già incontrato le seguenti due formulazioni del teorema spettrale reale:

- Sia V uno spazio vettoriale reale finitamente generato e ϕ un prodotto scalare definito positivo. Sia $f \in End(V)$ tale che $f = f^*$. Allora esiste una base ortonormale di ϕ formata da autovettori per f.
- Sia $A \in S(n, \mathbb{R})$, tale che $A = A^t$. Allora: $\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ t.c. $P^{-1} A P = P^t A P = D \in D(n, \mathbb{R})$.

Una matrice simmetrica, però, può essere pensata anche come indotta da un prodotto scalare. In particolare, se $P^t A P = D$, allora la base scelta è ortogonale per ψ_A.

Di qui la terza formulazione:

- Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo, sia ψ un altro prodotto scalare di cui V può essere munito. Allora esiste una base di V che è al tempo stesso ortonormale per ϕ e ortogonale per ψ.

APPLICAZIONI DEL TEOREMA SPETTRALE REALE

Ex. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$. Allora:

$$A \text{ è simmetrica} \iff A^tA = AA^t \text{ e } A \text{ è triangolabile}$$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione, che è del tutto immediata: se $A = A^t$, allora $A^tA = AA = AA^t$, e inoltre, per quanto dimostrato nei lemmi precedenti, A è triangolabile.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Dunque:

$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{R}) \ \ni' \ M^{-1}AM = T \in T(n, \mathbb{R})$

Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt, posso ottenere una base ortonormale per $\langle , \rangle$ $\mathcal{E}$ e bandiera per A. In altri termini:

$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \ \ni' \ P^{-1}AP = P^tAP \in T(n, \mathbb{R})$,

con $P = M^{S}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \in O(n, \mathbb{R})$ perché matrice di un'isometria tra basi ortonormali.

Notiamo ora che:

$T^tT = P^tA^t\cancel{PP^t}AP = P^tA^tAP = P^tAA^tP =$

$= P^tAPP^tA^tP = TT^t$

Dunque:

$$TT^t = T^tT$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[TT^t]_{11} = \sum_{i=1}^{n} t_{1i}^2 = [T^tT]_{11} = t_{11}^2$$

$$\Downarrow$$

$$t_{1i} = 0 \quad \forall\, i = 2 \ldots n$$

Iterando, si dimostra che T è diagonale. Allora T è simmetrica "a fortiori", e A, congruente a T, è simmetrica, c.v.d.

Ex. Sia $A \in M(p,q,\mathbb{R})$. Allora $rk(AA^t) = rk A$

Come sappiamo:

$$A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$X \longrightarrow AX$$

Sia $r = rk A$. Allora:

$\exists$ $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ basi di $\mathbb{R}^q$ e $\mathbb{R}^p$ rispettivamente tali che:

$$L = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}(A) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

In particolare, sia $\mathcal{B}' = \{v_1 \dots v_{q-r}\}$ una base di $Ker A$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^q$ ottenuta completando $\mathcal{B}'$ a base ortonormale di $\mathbb{R}^q$.

Consideriamo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^q_{\mathcal{B}} \arrow[r, "id", "M"'] \arrow[rrr, bend left, "L = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}(f_A)"] & \mathbb{R}^q_{e} \arrow[r, "f_A", "A"'] & \mathbb{R}^p_{e} \arrow[r, "id", "N"'] & \mathbb{R}^p_{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

$$L = N A M$$

In particolare, $\mathcal{B}$ è ortonormale, perciò $M = M^{e}_{\mathcal{B}}(id) \in O(q,\mathbb{R})$.
Inoltre $N \in GL(p,\mathbb{R})$.

Dunque:

$$A = N^{-1} L M^{-1}$$
$$AA^t = N^{-1} L \cancel{M^{-1} M^{-1t}} L^t N^{-1t} = N^{-1} L L^t N^{-1t}$$

Allora (AA^t) e (LL^t) sono equivalenti destra-sinistra, perciò $rk(AA^t) = rk(LL^t)$. Ma $L = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, perciò è facile calcolare $rk LL^t$, essendo $LL^t = J_r(m,m)$. Allora:

$$rk(AA^t) = rk LL^t = rk L = r$$
$$\Downarrow$$
$$rk(AA^t) = rk A, \text{ c.v.d.}$$

Ex. Siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$. Allora:

$$AB = BA \iff \exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{cases} P^{-1} A P = D_1 \in D(n, \mathbb{R}) \\ P^{-1} B P = D_2 \in D(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dim.

La seconda implicazione è banale:

$$AB = P D_1 \cancel{P^{-1} P} D_2 P^{-1} = P D_1 D_2 P^{-1} = P D_2 D_1 P^{-1} =$$
$$= P D_2 P^{-1} P D_1 P^{-1} = BA$$

Dimostriamo la prima implicazione.

Per il teorema spettrale reale, A e B sono diagonalizzabili.

Per un vecchio esercizio, so allora che esiste una base comune di autovettori.

Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt, si può dunque ottenere una base ortonormale per $\langle , \rangle$ (così come $\mathcal{C}$) e a bandiera sia per A che per B.

Dato che questa base, sia essa $\mathcal{B}$, è ortonormale per $\langle , \rangle$:

$$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id) \in O(n, \mathbb{R})$$

Allora:

$$\begin{cases} P^t A P = P^{-1} A P = T_1 \in T(n, \mathbb{R}) \\ P^t B P = P^{-1} B P = T_2 \in T(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Ma $A \sim_c T_1$ e $B \sim_c T_2$, dunque $T_1, T_2 \in S(n, \mathbb{R})$. Allora necessariamente:

$$T_1, T_2 \in D(n, \mathbb{R}), \text{ c.v.d.}$$

La prima implicazione può essere dimostrata in maniera differente.

Innanzitutto, se (V, Φ) è uno spazio euclideo e f è autoaggiunto, allora è diagonalizzabile, e quindi ha tutti gli autovalori reali. Allora, se $\lambda, \mu \in Sp(f)$, $\lambda \neq \mu$:

$$\forall\, x \in V_\lambda(f),\ \forall\, y \in V_\mu(f):\ \Phi(x, f(y)) = \Phi(f(x), y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(x, \mu y) = \Phi(\lambda x, y) \Rightarrow (\lambda - \mu)\, \Phi(x, y) = 0 \Rightarrow \Phi(x, y) = 0$$

Dunque, se f ammette come autovalori $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, si ha una somma diretta che è anche ortogonale:

$$V = V_{\lambda_1}(f) \,\hat{\oplus}\, \ldots \,\hat{\oplus}\, V_{\lambda_k}(f)$$

Dunque, se $AB = BA$:

$\forall x \in V(\lambda_i, A), i = 1 \dots k : (BA)(x) = B(\lambda_i x) = \lambda_i (Bx) = (AB)(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow B(V(\lambda_i, A)) \subseteq V(\lambda_i, A) \quad \forall i = 1 \dots k$

Dunque $B|_{V(\lambda_i, A)}$ è un endomorfismo. In particolare $B \in S(n, \mathbb{R})$, perciò è autoaggiunto:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, By) = \varphi(Bx, y)$

Dunque a maggior ragione:

$\forall x, y \in V(\lambda_i, A) : \varphi(x, By) = \varphi(Bx, y)$

In conclusione, $B|_{V(\lambda_i, A)}$ è un endomorfismo autoaggiunto.

Invocando allora il teorema spettrale reale:

$\forall i = 1 \dots k \ \exists \mathcal{B}_i$ base ortonormale di $V(\lambda_i, A)$ costituita da autovettori per B.

Allora $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k\}$ è una base ortonormale per $\langle , \rangle$ e di autovettori sia per A che per B, c.v.d.

OSSERVAZIONE

In generale, se $A \in S(n, \mathbb{R})$ ammette $\lambda_1 \dots \lambda_k$ come autovalori, ossia:

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(f) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} V_{\lambda_k}(f)$$

si può sia determinare per ogni autospazio una base ortonormale per $\langle , \rangle$ di autovettori per la restrizione di A all'autospazio, e poi unirle; sia determinare basi qualsiasi per ogni autospazio, e poi procedere ad un'ortonormalizzazione unica dell'unione delle basi, che non comporta un maggior carico computazionale in quanto autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Ex. $A \in S(n, \mathbb{R})$ si dice DEFINITA POSITIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^t A x > 0$. Per il Teorema di Jacobi, allora, tutti i determinanti dei minori principali sono positivi: in altre parole, tutti gli autovalori sono positivi.

Provare che:

$$A \text{ è definita positiva} \Leftrightarrow \exists!\ S \in S(n, \mathbb{R}) \text{ definita positiva tale che } A = S^2$$

Dim.

La seconda implicazione è la più facile:

$\forall x \neq 0$: $x^t A x = x^t S S x = x^t S^t S x = (Sx)^t Sx = \langle Sx, Sx \rangle$

Dato che $x \neq 0$ e $S \in GL(n, \mathbb{R})$ perché è definita positiva:

$$Sx \neq 0 \Rightarrow \langle Sx, Sx \rangle > 0$$

Dunque A è definita positiva.

Dimostriamo ora la prima implicazione.

Per ipotesi A è definita positiva.

Allora

$$\exists\ P \in O(n, \mathbb{R}) \ni' \ P^t A P = P^{-1} A P = D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Essendo tutti gli autovalori positivi:

$$\exists\ D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

Allora:

$$A = P^{t^{-1}} D^2 P^{-1} = P D^2 P^t = (P D P^t)(P D P^t) = S^2$$

Dimostriamo ora l'unicità. Se $S^2 = A$:

$$SA = S S^2 = S^3 = S^2 S = AS$$

Dato che $A, S \in S(n, \mathbb{R})$ e $AS = SA$:

$\forall i : 1..k$: $S|_{V_{\lambda_i}(A)}$ è un endomorfismo autoaggiunto.

Sia allora $v \in V_{\lambda_i}(A)$ autovettore per $S|_{V_{\lambda_i}(A)}$. Allora:

$$Av = \lambda_i v = S^2 v = \mu^2 v \Rightarrow \lambda_i = \mu^2 \Rightarrow \mu = \sqrt{\lambda_i}$$

Visto che S è definita positiva, otteniamo per la radice positiva. Ad ogni modo vi è l'unicità: $S|_{V_{\lambda_i}(A)} = \sqrt{\lambda_i}\, Id|_{V_{\lambda_i}(A)}$, c.v.d.

TEOREMA SPETTRALE HERMITIANO

Sia (V, Φ) un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita munito di un prodotto hermitiano definito positivo. Sia $f \in End(V)$. f si dice UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILE se esiste una base di autovettori per f ortonormale per Φ.
f si dice invece NORMALE (rispetto a Φ) se $f \circ f^* = f^* \circ f$, ossia se commuta con la sua aggiunta.

TEOREMA (SPETTRALE HERMITIANO)
Un endomorfismo f di (V, Φ) è unitariamente diagonalizzabile se e solo se è normale.

PREMESSA
Alcuni tipi di endomorfismi normali che abbiamo già incontrato sono:
- gli AUTOAGGIUNTI : $f = f^*$;
- gli ANTI-AUTOAGGIUNTI : $-f = f^*$;
- gli UNITARI : $f^{-1} = f^*$.

Dim.
Dimostriamo la prima implicazione.
Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale per Φ e diagonalizzante per f: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = I$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in D(n, \mathbb{C})$.
Allora:
$\forall v, w \in V: \Phi(f^*(v), w) = \Phi(v, f(w))$
Se dunque $[f(v)]_{\mathcal{B}} = DX$, $[f^*(v)]_{\mathcal{B}} = D^* X$:

$$(D^* X)^t \, \overline{Y} = X^t \, \overline{DY} \Rightarrow X^t D^{*t} \, \overline{Y} = X^t \, \overline{D} \, \overline{Y} \Rightarrow D^* = \overline{D}^t \in D(n, \mathbb{C})$$

Dunque D e D^*, essendo matrici diagonali, certamente commutano: f, allora, è normale.

Dimostriamo la seconda implicazione.

LEMMA
Se $f \in End(V)$ è normale rispetto a Φ, allora λ è autovalore di f se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per f^*. Inoltre:

$$V_{\lambda}(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^*)$$

Dim.
In effetti basta dimostrare che per ogni $v \in V$:
$$f(v) = \lambda v \iff f^*(v) = \bar{\lambda} v,$$
e dato che $f^{**} = f$, una sola implicazione è sufficiente.
Sia ad esempio $v \in V$, $f(v) = \lambda v$. Allora:
$$f^*(v) = \bar{\lambda} v \iff \phi(f^*(v) - \bar{\lambda} v, f^*(v) - \bar{\lambda} v) = 0$$
In base ad un esercizio precedente:
$$f \circ f^* = f^* \circ f \Rightarrow f^*(V_\lambda(f)) \subseteq V_\lambda(f)$$
Dunque $f^*(v) - \bar{\lambda} v \in V_\lambda(f)$. Allora:
$$\forall w \in V_\lambda(f): \phi(f^*(v), w) = \phi(v, f(w)) = \phi(v, \lambda w) =$$
$$= \bar{\lambda}\phi(v, w) = \phi(\bar{\lambda} v, w) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi(f^*(v) - \bar{\lambda} v, w) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f^*(v) - \bar{\lambda} v) \in Rad(\phi)$$
Dato che ϕ è definito positivo, $f^*(v) = \bar{\lambda} v$, c.v.d.

Procediamo allora per induzione su $n = \dim V$.

CASO INIZIALE

$n = 1$

Il teorema è banalmente vero: tutto è unitariamente diagonalizzabile, tutto è normale.

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Sia f un endomorfismo normale di (V, ϕ), $\dim V = n$. Allora sia v un autovettore di f $(f(v) = \lambda v)$. Dato che $v \neq 0$ e ϕ è definito positivo, è lecito scrivere:
$$V = Span(v) \oplus Z_v, \quad Z_v = (Span(v))^\perp$$
Per il lemma, $f^*(v) = \bar{\lambda} v$. Allora $Span(v)$ è contemporaneamente f-invariante e f^*-invariante. Allora anche Z_v ha queste caratteristiche. Infatti:
$$\phi(v, z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi(v, f(z)) = \underline{\phi(f^*(v), z)} = \underline{\bar{\lambda}\,\phi(v, z)} = 0\,; \\ \phi(v, f^*(z)) = \phi(f^*(z), v) = \phi(z, f(v)) = \lambda\,\phi(z, v) = 0\,, \end{cases}$$
e in ogni caso $f(z), f^*(z) \in Z_v$.

A livello matriciale, abbiamo per $\mathcal{D}$ base di Z_v e $\mathcal{B} = \{v \cup \mathcal{D}\}$ base di V:

$$A = M(f) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

$$\tilde{A} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} & 0 \\ \hline 0 & \bar{B}^t \end{array}\right]$$

Da ciò si evince facilmente che $(f|_{Z_v})^* = f^*|_{Z_v}$, ove il primo aggiunto è inteso rispetto a $\Phi|_{Z_v}$.
Allora $f|_{Z_v}$ è un endomorfismo normale di $(Z_v, \Phi|_{Z_v})$.
Per ipotesi induttiva, esiste una base $\mathcal{G} = \{v_2 \dots v_n\}$ ortonormale per $\Phi|_{Z_v}$ e diagonalizzante per $f|_{Z_v}$.
Allora, preso $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$, la base cercata è:

$$\mathcal{S} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$

f, dunque, è unitariamente diagonalizzabile, c.v.d.

CENNI DI FISICA QUANTISTICA LEGATI AGLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

In questo paragrafo mostreremo come, nel contesto degli operatori autoaggiunti rispetto ad un prodotto hermitiano definito positivo, sia possibile far riferimento al cosiddetto PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG, divenuto ormai un vero e proprio teorema.

Supporremo uno spazio di dimensione finita, restrizione troppo forte nell'ambito della fisica quantistica, e non daremo esempi più concreti di tutto ciò, poiché non è nel nostro interesse.

Sia (V, Φ), $\dim V = n$, uno spazio vettoriale complesso munito di un prodotto hermitiano definito positivo (detto anche SPAZIO DI HILBERT di dimensione finita).

In una base ortonormale per Φ, abbiamo allora:

$\forall\, w, z \in V: \quad \Phi(w, z) = [w]^t_B \overline{[z]}_B$

Ora gli STATI PURI di un sistema quanto-meccanico sono identificati con i vettori unitari di (V, Φ), ossia tali che $\Phi(v, v) = 1$. L'insieme degli stati puri verrà indicato con la SFERA UNITARIA $S_{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \cong V$.

Un OSSERVABILE f è una grandezza che può essere misurata in ogni stato v, e il risultato della misura è reale:

$\forall\, f, \forall\, v \in V: \quad X(f, v) \in \mathbb{R}$

LEMMA

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore normale, con $Sp(f) \subseteq \mathbb{R}$. Allora f è autoaggiunto.

Dim.

Per il teorema spettrale Hermitiano $\exists\, B$ di autovettori per f ortonormale per Φ. Sia $Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k\}$.

Allora:

$\forall\, v \in B: \; f^*(v) = \bar{f}^t(v) = \bar{f}(v) = \bar{\lambda} v = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_{\alpha_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} v_i = f(v)$

Allora $f^* = f$, ossia f è autoaggiunto.

Ritornando alla dimostrazione, ogni osservabile è un operatore autoaggiunto su questo spazio vettoriale, e per ogni stato v e ogni misurabile f, $X(f,v)$ è una variabile "aleatoria" a valori nello spettro di f, che abbiamo supposto reale.

Ora, per il teorema spettrale hermitiano:

$$V = \hat{\bigoplus_{j=1}^{k}} V_{\lambda_j}(f)$$

Dunque per ogni $\lambda_i \in Sp(f)$ è ben definita la proiezione ortogonale $\pi_{\lambda_i} : V \longrightarrow V_{\lambda_i}(f)$.

PROPOSIZIONE

La PROBABILITÀ che $X(f,v) = \lambda_i \in Sp(f)$, con f osservabile e v stato puro, è data dal quadrato della norma della proiezione ortogonale di v su $V_{\lambda_i}(f)$:

$$p(X(f,v) = \lambda_i) = \Phi(\pi_{\lambda_i}(v), \pi_{\lambda_i}(v))$$

In particolare, $p(X(f,v) = \lambda_i) = 1$ se e solo se $v \in V_{\lambda_i}(f)$.

Supponiamo ora per semplicità che f abbia tutti gli autovalori (reali e) distinti, fissiamo una base ortonormale per Φ composta da autovettori per f:

$\forall\, j = 1 \dots n : f(v_j) = \lambda_j v_j$

Se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, allora:

$$\pi_{a_j}(v) = a_j v_j$$

$$p(X(f,v) = \lambda_j) = |a_j|^2$$

Notiamo che:

$$\|v\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} p(X(f,v) = \lambda_i) = 1,$$

essendo gli eventi incompatibili ed esaustivi. Non sorprende quindi, che lo stato puro v sia un vettore unitario: anzi, tutto è perfettamente coerente.

AZIONE DI UN GRUPPO SU UN INSIEME E PREMESSE ALLA GEOMETRIA AFFINE

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme.
Definiamo allora il gruppo delle funzioni da X in X biunivoche dove l'operazione di gruppo è data dalla composizione:

$$S(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ è bigettiva} \}$$

Queste applicazioni biunivoche sono dette anche TRASFORMAZIONI. Il gruppo $S(X)$, a volte, è detto GRUPPO DELLE SIMMETRIE di X, o GRUPPO SIMMETRICO S_n, nel particolare caso in cui $X = \{1, \dots, n\}$.

Un sottogruppo F di $S(X)$ è detto GRUPPO DI TRASFORMAZIONI di X.
Dato I sottoinsieme di $S(X)$, allora il GRUPPO DI TRASFORMAZIONI GENERATO da I è il più piccolo sottogruppo di $S(X)$ che contiene I; esso consiste di tutte le trasformazioni di X che si possono ottenere tramite la composizione di elementi di I o dei loro inversi.
Gli elementi di $S(X)$ si dicono PERMUTAZIONI di X.

Un omomorfismo $\varphi : G \to S(X)$ induce un'AZIONE di G su X, mediante:

$$\varphi : G \longrightarrow S(X)$$
$$g \longrightarrow \varphi(g) = \varphi_g$$

$$A_\varphi(g, x) = \varphi_g(x)$$

In definitiva:

$$\varphi : G \longrightarrow S(X)$$
$$g \longrightarrow \varphi_g : X \longrightarrow X$$
$$x \longrightarrow \varphi_g(x)$$

Data $\varphi : G \to X$, dato $x \in X$, si definisce STABILIZZATORE di x il seguente sottogruppo:

$$St(x) = \{ g \in G \mid \varphi_g(x) = x \}$$

Si definisce invece ORBITA di x il seguente sottoinsieme:

$$Orb(x) = \{ y \in X \mid y = \varphi_g(x),\ g \in G \}$$

Ex. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e G il gruppo delle rotazioni attorno all'origine. Consideriamo $Id: G \to \mathbb{R}^2$ come azione di G su $\mathbb{R}^2$. Allora, dato $x \in X$, si ha:

$$St(x) = \{Id\}$$

$$Orb(x) = \{ y \in X \mid \langle y, y \rangle_I = \langle x, x \rangle_I \}$$

In altre parole, $Orb(x)$, è la circonferenza con centro nell'origine e raggio pari alla distanza di x dall'origine.

PROPOSIZIONE

Siano G un gruppo, X un insieme e $\varphi: G \to S(X)$ l'azione di G su X. Sia $x \in X$. Allora $St(x) < G$.

Dim.

- $\varphi_e = Id \Rightarrow \varphi_e(x) = x \Rightarrow e \in St(x)$;
- $g, h \in St(x) \Rightarrow \varphi_g(x) = x$, $\varphi_h(x) = x$
  Essendo φ un omomorfismo:
  $\varphi_{gh}(x) = (\varphi_g \circ \varphi_h)(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_g(x) = x \Rightarrow \varphi_{gh}(x) = x$
  Allora $gh \in St(x)$.
- $g \in St(x) \Rightarrow \varphi_g(x) = x \Rightarrow \varphi_g^{-1}(x) = \varphi_{g^{-1}}(x) = x \Rightarrow \varphi_{g^{-1}}(x) = x$
  Allora $g^{-1} \in St(x)$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $\varphi: G \to S(X)$ l'azione di G su X. Allora le orbite formano una partizione di X.

Dim.

È sufficiente dimostrare che la seguente è una relazione di equivalenza:

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in Orb(x)$$

- RIFLESSIVITÀ: $\varphi_e(x) = x \Rightarrow x \in Orb(x) \Rightarrow x \sim x$;
- SIMMETRIA: $x \sim y \Rightarrow \varphi_g(x) = y$, $g \in G \Rightarrow \varphi_{g^{-1}}(y) = x$, $g^{-1} \in G \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \in Orb(y) \Rightarrow y \sim x$;
- TRANSITIVITÀ: $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow \varphi_g(x) = y$, $\varphi_h(y) = z$, $g, h \in G \Rightarrow$
  $\Rightarrow \varphi_{hg}(x) = (\varphi_h \circ \varphi_g)(x) = \varphi_h(y) = z \Rightarrow \varphi_{hg}(x) = z$, $(hg) \in G \Rightarrow$
  $\Rightarrow z \in Orb(x) \Rightarrow x \sim z$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Vale la seguente implicazione:

$$\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \Leftrightarrow g\,St(x) = h\,St(x)$$

Dim.

$$\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \Leftrightarrow \varphi_{h^{-1}g}(x) = (\varphi_{h^{-1}} \circ \varphi_g)(x) = (\varphi_{h^{-1}} \circ \varphi_h)(x) = \varphi_e(x) = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h^{-1}g \in St(x) \Leftrightarrow g \in h\,St(x) \Leftrightarrow g\,St(x) = h\,St(x),$$ c.v.d.

In buona misura l'algebra lineare che abbiamo sviluppato consiste nello studio delle azioni del gruppo lineare generale $GL(V)$ (o di suoi sottogruppi) nello spazio vettoriale V e su altri insiemi o spazi associati a V (ad esempio $End(V)$). Le TRASLAZIONI sono delle trasformazioni di V che, pur essendo semplici da definire, non rientrano nel quadro delle trasformazioni lineari. Si rivela quindi opportuno ampliare l'algebra lineare in una teoria che incorpori le traslazioni.

TRASLAZIONI

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $v \in V$.

Si dice TRASLAZIONE SU V SECONDO v la seguente applicazione da V in sé:

$$\tau_v : V \longrightarrow V$$

$$\forall w \in V : \tau_v(w) = w + v$$

OSSERVAZIONE

Supponiamo che τ_v sia lineare. Allora:

$\forall w, z \in V : \tau_v(w+z) = \tau_v(w) + \tau_v(z) \Rightarrow w+z+v = w+v+z+v \Rightarrow$
$v = 0$

Viceversa, se $v = 0$, τ_0 è lineare.

Dunque τ_v è lineare $\Leftrightarrow v = 0$.

L'insieme di tutte le traslazioni di V si denota con $Ts(V)$.

PROPOSIZIONE

$Ts(V)$ è un gruppo commutativo di trasformazioni di V, canonicamente isomorfo a $(V, +)$ via l'isomorfismo $\psi : v \longrightarrow \tau_v$.

Dim.

- $\forall \tau_w, \tau_z, \tau_t \in Ts(V), \forall x \in V : ((\tau_w \circ \tau_z) \circ \tau_t)(x) = (\tau_w \circ \tau_z)(x+t) =$
  $= x + t + z + w = \tau_w \circ (x+t+z) = (\tau_w \circ (\tau_z \circ \tau_t))(x)$;
- $\tau_v, \tau_w \in Ts(V)$, $\tau_{v+w}(z) = z + v + w = (\tau_w \circ \tau_v)(z)$,
  $\tau_{v+w} \in Ts(V) \Rightarrow (\tau_w \circ \tau_v) \in Ts(V)$;
- $\exists \tau_0 \ni' \forall \tau_v \in Ts(V) : \tau_0 \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_0 = \tau_v$;
- $\forall \tau_v \in Ts(V) \; \exists \tau_{-v} \in Ts(V) \ni \tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{-v} \circ \tau_v = \tau_{v-v} = \tau_0$;
- $\forall \tau_v, \tau_w \in Ts(V) : \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w} = \tau_{w+v} = \tau_w \circ \tau_v$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Le traslazioni e la necessità di ampliare il quadro dell'algebra lineare erano già comparsi nello studio dell'insieme delle soluzioni dei sistemi lineari non omogenei.

Sia $AX = B$, $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$ un sistema non omogeneo, ossia $B \neq 0$.

Ammettiamo inoltre che il sistema abbia delle soluzioni.
Allora l'insieme delle soluzioni di tale sistema (che non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$) è fatto da tutti gli elementi di $\mathbb{K}^n$ della forma $X = \tau_{X_0}(Y)$, $Y \in \operatorname{Ker} \lambda$, X_0 soluzione particolare del sistema non omogeneo.

APPLICAZIONI AFFINI E AFFINITÀ

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Un'applicazione $F: V \to W$ si dice APPLICAZIONE AFFINE se esistono $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e $\tau_c \in \mathrm{Ts}(W)$ tale che:

$$F = \tau_c \circ f,$$

ossia se e solo se:

$$\forall x \in V : F(x) = c + f(x)$$

In particolare c ed f sono univocamente determinati da F: infatti $c = F(0)$ è unico, e $f = \tau_{-c} \circ F$ è anch'esso unico. A loro volta, f e c determinano univocamente F mediante la proprietà descritta nella definizione.

L'applicazione $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ è detta APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA ad F.

Notiamo che l'applicazione composta di due applicazioni affini è un'applicazione affine:

$$\left.\begin{array}{l} F = \tau_c \circ f \\ G = \tau_d \circ g \end{array}\right\} \Rightarrow FG = (\tau_c \circ f) \circ (\tau_d \circ g) = \tau_{c+f(d)} \circ (f \circ g),$$

visto che:

$$\forall x \in V: \begin{cases} (\tau_c \circ f) \circ (\tau_d \circ g)(x) = (\tau_c \circ f)(d + g(x)) = c + f(d) + f(g(x)); \\ \tau_{c+f(d)} \circ (f \circ g)(x) = c + f(d) + f(g(x)). \end{cases}$$

L'insieme delle applicazioni affini da V in W si indica con $\mathrm{Aff}(V, W)$. Ovviamente $\mathrm{Hom}(V, W) \subseteq \mathrm{Aff}(V, W)$, e l'uguaglianza sussiste se e solo se $W = \{0\}$.

Restringiamoci ora al particolare caso in cui $V = W$.

Restringiamoci inoltre a parlare di isomorfismi.

Un'applicazione affine da V in sé risulta biettiva se e solo se lo è l'applicazione lineare associata. Se essa è biettiva, essa si definisce TRASFORMAZIONE AFFINE o AFFINITÀ.

È utile notare che l'inversa di un'affinità è un'affinità:

$$(\tau_w \circ f)(v) = w + f(v) \Rightarrow (\tau_w \circ f)^{-1} = \tau_{-f^{-1}(w)} \circ f^{-1}, \text{ visto che:}$$

$$(\tau_{-f^{-1}(w)} \circ f^{-1})(w + f(v)) = \cancel{-f^{-1}(w)} + \cancel{f^{-1}(w)} + v = v$$

$$(\tau_w \circ f)(-f^{-1}(w) + f^{-1}(v)) = \cancel{w} - \cancel{w} + v = v$$

Definiamo allora il GRUPPO AFFINE di V:

$$\mathrm{Aff}(V) = \{ \tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in GL(V) \}$$

Parallelamente a quanto detto prima, $GL(V) \subseteq \mathrm{Aff}(V)$, e l'uguaglianza sussiste se e solo se $V = \{0\}$.

Per ogni $F \in \mathrm{Aff}(V)$, $F = \tau_c \circ f$ per qualche $c \in V$ e $f \in GL(V)$: questa scrittura si dice FORMA NORMALIZZATA di F.

LEMMA

L'espressione normalizzata degli elementi di $\mathrm{Aff}(V)$ esiste ed è unica.

Dim.

La proposizione afferma che ogni composizione finita di trasformazioni lineari e traslazioni ammette quella forma normalizzata. In realtà basta mostrare che:

$\forall v \in V,\ \forall f \in GL(V)\ \exists w \in V,\ \exists g \in GL(V)$ t.c.:

$$f \circ \tau_v = \tau_w \circ g$$

Ora:

- $(f \circ \tau_v)(x) = f(x+v) = f(x) + f(v)$;
- $(\tau_w \circ g)(x) = \tau_w(g(x)) = g(x) + w$.

Dunque se $w = f(v)$ e $g = f$, otteniamo quanto voluto.

Induttivamente allora, ogni $F \in GL(V)$ ammette una forma normalizzata.

Se $F \in \mathrm{Aff}(V)$ ammette due espressioni normalizzate:

$$F = \tau_v \circ f = \tau_w \circ g,$$

allora:

$\forall z \in V:\ f(z) + v = g(z) + w \Rightarrow f(z) + (v - w) = g(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow g^{-1}(f(z) + (v-w)) = z$

Sostituendo 0 a z si ottiene (tenendo presente che $g \in GL(V)$):

$g^{-1}(v - w) = 0 \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$

Dunque:

$\forall z \in V:\ g^{-1}(f(z)) = z \Rightarrow g^{-1} = f^{-1} \Rightarrow g = f$

Dunque l'espressione normalizzata è unica.

In particolare, esiste in modo naturale la seguente bigezione:

$$\lambda : (GL(V) \times V) \longrightarrow Aff(V)$$
$$(f, v) \longmapsto \tau_v \circ f$$

La composizione di affinità, ossia l'operazione di cui è munito $Aff(V)$, può essere interpretata come un'operazione di PRODOTTO SEMIDIRETTO sul prodotto insiemistico dei due gruppi:

$$\circ : (GL(V) \times V) \times (GL(V) \times V) \longrightarrow (GL(V) \rtimes V)$$
$$(f, v), (g, w) \longmapsto (f \circ g, f(w) + v)$$

Passando in coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B}$:

$$V \rightsquigarrow \mathbb{K}^n \qquad (GL(V) \times V) \rightsquigarrow (GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n)$$

In questo caso $F \in Aff(\mathbb{K}^n)$ si esprime nella forma:

$$F(X) = P(X) + D,$$

$P \in GL(n, \mathbb{K})$, $D \in \mathbb{K}^n$. Dunque un'affinità può essere messa in corrispondenza biunivoca con una tabella del tipo $(P | D)$, e la legge di composizione diventa:

$$(P | D), (Q | C) \longrightarrow (PQ \mid PC + D)$$

SPAZI AFFINI

In prima approssimazione la geometria affine si occupa dell'azione di $Aff(V)$ su V (e su altri insiemi o spazi associati a V).

Una prima differenza rispetto all'azione di $GL(V)$ può essere espressa per mezzo degli stabilizzatori degli elementi di V.

LEMMA

Il vettore nullo $0 \in V$ è l'unico tale che $St_0(GL(V)) = GL(V)$.
Se $\dim V = n$ e $v \neq 0$, allora $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{K})$, $St_v(GL(V)) \cong$
$\cong GL(n-1, \mathbb{K})$.

Dim

Che $St_0(GL(V))$ sia $GL(V)$ è chiaro. Sia invece $v \neq 0$: qualsiasi funzione del tipo $g = \lambda\, Id$, con $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$ non appartiene a $St_v(GL(V))$, in quanto $g(v) = \lambda v \neq v$.
Passando in coordinate rispetto a $B = \{v, v_2, \dots, v_n\}$, $f \in St_v(GL(V))$ è della forma:

$$A_f = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right],$$

$B \in GL(n-1, \mathbb{K})$. Dunque $St_v(GL(V)) \cong GL(n-1, \mathbb{K})$, c.v.d.

LEMMA

$Aff(V)$ agisce in modo TRANSITIVO su V, cioè dati $v, w \in V$ esiste un'affinità tale che $g(v) = w$ (in effetti già il sottogruppo delle traslazioni è transitivo). Inoltre per ogni $x \in V$, $St_x(Aff(V)) \cong GL(V)$.

Dim

Siano $v, w \in V$: detto $u = w - v$, si ha $\tau_u(v) = \cancel{v} + w - \cancel{v} = w$.
Notiamo ora che $(\tau_v \circ f) \in St_0(Aff(V))$ se e solo se $v = 0$, dunque $St_0(Aff(V)) = GL(V)$. Per completare la dimostrazione, notiamo che, dati $v, w \in V$, esiste un isomorfismo naturale:

$$\phi : St_v(Aff(V)) \longrightarrow St_w(Aff(V))$$
$$f \longmapsto \tau_{-u} \circ f \circ \tau_u \quad , u = v - w$$

Infatti:

$f \in St_v(Aff(V)) \Leftrightarrow f(v) = v \Leftrightarrow (\tau_{-u} \circ f \circ \tau_u)(w) =$

$= (\tau_{-u} \circ f)(\cancel{w} + v - \cancel{w}) = \tau_{-u}(f(v)) = \tau_{-u}(v) = \cancel{v} - \cancel{v} + w = w \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\tau_{-u} \circ f \circ \tau_u) \in St_w(Aff(V))$

Questo basta per asserire che:

$\forall x \in V : St_x(Aff(V)) \cong St_0(Aff(V)) = GL(V)$, c.v.d.

Dunque, sebbene in V ci sia un' ORIGINE PRIVILEGIATA (lo 0) rispetto all'azione di $Aff(V)$ tutti i punti di V sono tra loro equivalenti.

Conviene quindi pensare ad una "famiglia di copie di V_n":

$$\{V_x\}_{x \in V},$$

ove per ogni $V_x \in \{V_x\}_{x \in V}$ x è l'origine di V_x.

Poniamo allora, a livello insiemistico:

$$\mathcal{A}(V) \stackrel{def}{=} V$$

Gli elementi di V saranno detti VETTORI; quelli di $\mathcal{A}(V)$ saranno detti PUNTI.

Definiamo l'applicazione:

$$F_V : \mathcal{A}(V) \times \mathcal{A}(V) \longrightarrow V$$

$$F_V(P, Q) \stackrel{def}{=} \overrightarrow{PQ} \stackrel{def}{=} Q - P,$$

dove l'ultima differenza è effettuata in V, e sfrutta il fatto che i punti di $\mathcal{A}(V)$ sono anche vettori di V. Questa applicazione verifica le seguenti proprietà:

- $\forall P \in \mathcal{A}(V) : \overrightarrow{PP} = 0 \in V$. Infatti:
  $F_V(P, P) = \overrightarrow{PP} = P - P = 0 \in V$;
- $\forall P \in \mathcal{A}(V)$, $F_P : \mathcal{A}(V) \longrightarrow V$, $F_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è biettiva. Infatti:
  - $F_P(Q) = F_P(R) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow Q - \cancel{P} = R - \cancel{P} \Rightarrow Q = R$;
  - $\forall X \in V \ \exists (P + X) \in \mathcal{A}(V) \ni' F_P(P + X) = \overrightarrow{P(P+X)} = \cancel{P} + X - \cancel{P} = X$;
- $\forall P, Q, Z \in \mathcal{A}(V) : \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QZ} + \overrightarrow{ZP} = 0 \in V$. Infatti:
  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QZ} + \overrightarrow{ZP} = \cancel{Q} - \cancel{P} + \cancel{Z} - \cancel{Q} + \cancel{P} - \cancel{Z} = 0 \in V$.

OSSERVAZIONE

La terza proprietà è detta CHIUSURA DEL TRIANGOLO.

Riformuliamo tutto quanto in maniera diversa.
Consideriamo le due proiezioni canoniche nel primo fattore:

$$\pi : A(V) \times A(V) \longrightarrow A(V) \qquad p : A(V) \times V \longrightarrow A(V)$$

Definiamo:

$$\hat{F} : A(V) \times A(V) \longrightarrow A(V) \times V$$
$$\hat{F}(P, Q) = (P, F_P(Q))$$

Dimostriamo che $\hat{F}$ è biiettiva:

- $\forall P \in A(V), \forall x \in V \ \exists \ P, P + x \in A(V) \ni'$
$\hat{F}(P, P+x) = (P, F_P(P+x)) = (P, \overrightarrow{P(P+x)}) = (P, P + x - P) = (P, x)$;
- $(P, F_P(Q)) = (R, F_R(T)) \Rightarrow P = R \wedge F_P(Q) = F_R(T) \Rightarrow P = R \wedge F_P(Q) =$
$= F_P(T) \Rightarrow P = R \wedge (Q - P = T - R) \Rightarrow P = R \wedge Q = T$.

Inoltre:
$\forall (P, Q) \in A(V) \times A(V) : \pi(P, Q) = P \ ; (p \circ \hat{F})(P, Q) = p(P, F_P(Q)) =$
$= P \Rightarrow \pi = p \circ \hat{F}$.

Per ogni $P \in A(V)$, allora, F_P costituisce una biezione tra la FIBRA di π su P ($A(V)_P = \pi^{-1}(P)$, che è una copia di $A(V)$) e la fibra di p su P ($V_P = p^{-1}(P)$, che è una copia di V), e permette di trasferire su $A(V)_P$ la struttura di spazio vettoriale di V_P, avente origine in P. Allora $A(V)_P \cong V_P \ \forall P \in A(V)$. In particolare, V_P può essere pensato come lo SPAZIO VETTORIALE TANGENTE a $A(V)$ in $P \in A(V)$.

OSSERVAZIONE
Dalla proprietà di "chiusura del triangolo" si ottiene immediatamente la fondamentale RELAZIONE DI CHASLES:

$$\forall P, Q, Z \in A(V) : \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QZ}$$

SPAZIO AFFINE STANDARD

La seguente struttura:

$$(A(V), \mathcal{F}_V)$$

viene detta SPAZIO AFFINE STANDARD ASSOCIATO A V.

Le seguenti tre proprietà:

- $\forall P \in A(V) : \mathcal{F}_V(P,P) = 0 \in V$;
- $\forall P \in A(V) : \mathcal{F}_P : A(V) \to V,\ \mathcal{F}_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è biettiva;
- $\forall P, Q, R \in A(V) : \mathcal{F}_V(P,Q) + \mathcal{F}_V(Q,R) + \mathcal{F}_V(R,P) = 0$,

possono essere considerate ASSIOMI per la definizione astratta di SPAZIO AFFINE su $V_{\mathbb{K}}$: si tratta formalmente di una coppia $(A, \mathcal{F})$ dove A è non vuoto, e $\mathcal{F} : A \times A \to V$, definita da $\mathcal{F}(P,Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$ è un'applicazione che verifica le tre proprietà elencate sopra.

Quando diremo che A è uno spazio affine su V, $\mathcal{F}$ sarà sottintesa.

Procedendo in modo parallelo a quanto fatto con l'algebra lineare, vogliamo rapidamente indicare come le varie nozioni e costruzioni note (combinazioni lineari, applicazioni lineari, sottospazi, basi) possono essere sollevate al contesto affine.

Lavorando con uno spazio affine standard $(A(V), \mathcal{F}_V)$, la prova di molte delle affermazioni si potrà fare algebricamente, ma nel caso generale dovremo dedurle come conseguenze degli assiomi. D'altra parte, anche lavorando con gli spazi affini standard, elaborando per esempio la nozione di sottospazio, sarà necessario riferirsi alla nozione astratta di spazio affine.

La ragione di ciò è legata in qualche modo al fatto che, dato E sottospazio affine di $A(V)$, non vi è un modo canonico di individuare W sottospazio di V tale che $A(W) = E$.

COMBINAZIONI AFFINI DI PUNTI

LEMMA

Sia A uno spazio affine su V. Allora:
$\forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Dim.

In uno spazio standard, chiaramente $Q - P = -(P - Q)$. In uno spazio affine astratto, applichiamo le proprietà 2) e 3) al "triangolo degenere" associato alla terna di punti P, Q, Q.
Si ha:

$$\overrightarrow{PQ} + \cancel{\overrightarrow{QQ}} + \overrightarrow{QP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \text{, c.v.d.}$$

Per ogni $P \in A(V)$ e per ogni $v \in V$, l'unico punto Q tale che $v = \overrightarrow{PQ}$ si denota con $P + v$.

LEMMA

Per ogni $P \in A$ e per ogni $v, w \in V$, vale:

$$(P + v) + w = P + (v + w)$$

Dim.

Siano $P_1 = P + v = P + \overrightarrow{PP_1}$, $P_2 = P_1 + w = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2}$. Applicando la proprietà 3) al triangolo di punti P, P_1, P_2 si ha:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P} = 0$$

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{PP_2}$$

$$P + (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}) = P + \overrightarrow{PP_2} = P_2$$

Ma:

- $P + (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}) = P + (v + w)$;
- $P + \overrightarrow{PP_2} = P + \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 = (P + v) + w$.

Allora $P + (v + w) = (P + v) + w$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Si noti che nell'enunciato del lemma precedente l'ultimo $+$ si riferisce alla somma in V, mentre gli altri si riferiscono alla notazione introdotta prima. C'è quindi un abuso di notazione.

Procediamo ora alla formalizzazione della procedura di estensione della nozione di combinazione lineare di vettori di V a nozione di COMBINAZIONE AFFINE di punti di A.

Dato un insieme finito X sia data la seguente applicazione:

$$\alpha : X \longrightarrow A \times \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto (P_x, a(x))$$

Fissiamo ora, in modo arbitrario $x_0 \in X$. Si ha:

$$P = P_{x_0} + \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_0} P_x},$$

ove l'ultima sommatoria è un'ordinaria combinazione lineare di vettori di V.

Cerchiamo ora di determinare condizioni necessarie e sufficienti perché questa sia una buona definizione, e il punto P risultante non dipenda dalla scelta di $x_0 \in X$.

Applichiamo allora la proprietà 3) ad una terna di punti $P_{x_0}, P_{x_1}, P_x \in A$.

Si ha:

$$P = P_{x_1} + \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_1} P_x} = P_{x_0} + \overrightarrow{P_{x_0} P_{x_1}} + \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_0} P_x} - \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_0} P_{x_1}} =$$

$$= P_{x_0} + \left(1 - \sum_{x \in X} a(x)\right) \overrightarrow{P_{x_0} P_{x_1}} + \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_0} P_x}$$

Allora necessariamente (e la condizione è anche sufficiente)

$$\left(1 - \sum_{x \in X} a(x)\right) = 0$$

$$\sum_{x \in X} a(x) = 1$$

Se ciò accade, $P = P_{x_0} + \sum_{x \in X} a(x) \overrightarrow{P_{x_0} P_x}$ è una ben definita espressione del punto P come COMBINAZIONE AFFINE di punti di A.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, un esempio importante di combinazione affine è quello del BARICENTRO.

Se $P_1, \dots, P_k$ sono punti distinti, allora il baricentro di questi punti è:

$$G = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} P_i$$

In particolare, il PUNTO MEDIO tra P_1 e P_2 è:

$$M = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 ,$$

e si noti che questa è una vera e propria nozione affine, senza alcun riferimento al concetto di distanza né, tantomeno, a quello di equidistanza tra due punti.

PROPOSIZIONE

Siano $a_1, \dots a_k \in A$, $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$, con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Si definisce allora BARICENTRO di $a_1 \dots a_k$, con "pesi" $\lambda_1 \dots \lambda_k$:

$$G = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j ,$$

con $a \in A$ punto arbitrario.

Il baricentro è l'unico punto $G \in A$ tale che per ogni $a \in A$:

$$\lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{aa_k} = \overrightarrow{aG} ,$$

ed è l'unico punto tale che:

$$\lambda_1 \overrightarrow{Ga_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{Ga_k} = 0 .$$

Dim.

Dalla definizione:

$$G = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$$

$$\overrightarrow{aG} = G - a = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \right) - a =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j - \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) a = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (a_j - a) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{aa_j}$$

Passando al punto 2), dalla definizione:

$$G = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \iff 0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j - G = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j - G \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \iff$$

$$\iff 0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (a_j - G) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{Ga_j}$$

SOTTOSPAZI AFFINI

Analogamente a quanto detto per gli spazi affini, diciamo che un sottoinsieme E di uno spazio affine A è un SOTTOSPAZIO AFFINE se è chiuso rispetto alle combinazioni affini dei suoi punti.

Conviene accettare che anche $\emptyset$ e A stesso siano sottospazi affini di A. In particolare, il secondo è detto SOTTOSPAZIO AFFINE IMPROPRIO.

Analogamente, sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Ogni sottoinsieme H di V del tipo:

$$H = v + W, \quad v \in V, \quad W \leq V,$$

dove W è un sottospazio vettoriale di V, è un sottospazio affine.

PROPOSIZIONE

L'intersezione di un'arbitraria famiglia di sottospazi affini di A è a sua volta un sottospazio affine.

Dim.

Se l'intersezione è vuota non c'è nulla da dimostrare.

Se l'intersezione non è vuota, sia $w \in \bigcap_{i=1}^{k} E_i$. Allora:

$$\forall i = 1 \dots k : \quad E_i = w + W_i, \quad W_i \text{ sottospazio vettoriale di } V$$

Allora:

$$J = \bigcap_{k=1}^{k} E_i = \bigcap_{i=1}^{k} (w + W_i) = w + \bigcap_{i=1}^{k} W_i =$$

$$= w + H$$

Sappiamo che $H = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ è un sottospazio vettoriale di V. Allora $J = w + H$ è un sottospazio affine di A, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $E \neq \emptyset$ un sottospazio affine di A. Sono fatti equivalenti:

1) E è un sottospazio affine di A;
2) Esiste $P_0 \in E$ e W_0 sottospazio vettoriale W_0 di V tali che $E = P_0 + W_0 \overset{def}{=} \{P_0 + w \mid w \in W_0\}$;
3) Esiste $T(E)$ sottospazio di V tale che per ogni $P \in E$, $E = P + T(E)$;
4) Esiste $T(E)$ sottospazio di V tale che $F|_E : E \times E \to T(E)$, e $(E, F|_E)$ definisce una struttura di spazio affine nello spazio $T(E)$.

Dim.

Dimostriamo che le prime due proposizioni sono equivalenti.

Supponiamo che E sia un sottospazio affine. Scelto arbitrariamente $P_0 \in E$, e posto W_0 il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori della forma $\overrightarrow{P_0P}$, $P \in E$, è chiaro che $E = P_0 + W_0$.

Viceversa, supponiamo che $E = P_0 + W_0$. Allora:

$$\forall P \in E : P = P_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j w_j ,$$

ove l'ultima sommatoria è una combinazione lineare di vettori di W_0. Allora:

$$\forall P \in E : P = P_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j (P_0 + w_j - P_0) = \Big(1 - \cancel{\sum_{j=1}^{k} a_j}\Big) P_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j (P_0 + w_j)$$

Se per ogni j, $P_j = (P_0 + w_j)$, si ha P come combinazione affine di punti di E:

$$P = P_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j (\overrightarrow{P_0 P_j}) = \sum_{j=1}^{k} a_j P_j$$

dunque E è chiuso per le combinazioni affini dei suoi punti.

Se vale la 3) chiaramente vale la 2), con $W_0 = T(E)$ e P_0 un punto qualsiasi di E: dunque E è un sottospazio affine.

Viceversa, sia E un sottospazio affine, siano $P_0, P_1 \in E$. Sia:

$$E = P_0 + W_0 = P_1 + W_1$$

Vogliamo dimostrare che $W_0 = W_1 = T(E)$, ossia che $T(E)$ è unico e ben definito.

Basta dimostrare che se $P = P_1 + w_1$, allora $w_1 \in W_0$, ossia $W_1 \subseteq W_0$; scambiando poi i ruoli si ottiene l'uguaglianza. Ma:

$$P = P_1 + w_1 = (P_0 + w_0) + w_1 = P_0 + (w_0 + w_1) = P_0 + w_0' ,$$

ove w_0' e w_0 appartengono a W_0. Allora $w_1 = w_0' - w_0 \in W_0$, ossia $W_1 \subseteq W_0$.

Se vale la 4) immediatamente vale la 1).

Viceversa, sia E un sottospazio affine, sia $T(E)$ sottospazio di V tale che per ogni $P \in E$: $E = P + T(E)$. Definiamo

$$F|_E : E \times E \longrightarrow T(E)$$
$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Si ha:

- $\forall P \in E : F|_E(P, P) = 0$,
- $\forall P \in E : F|_{E,P} : E \longrightarrow T(E)$, $F|_{E,P}(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è biiettiva;
- $\forall P, Q, R \in E : F|_E(P, Q) + F|_E(Q, R) + F|_E(R, P) = 0$.

Dunque $(E, T(E))$ definisce una struttura di sottospazio affine su $T(E)$, c.v.d.

Dato $E = P + T(E)$, con $T(E)$ sottospazio vettoriale di V, $T(E)$ è detto GIACITURA o SPAZIO VETTORIALE TANGENTE a E.
E è allora il sottospazio affine di giacitura $T(E)$ passante per P.

Dato un insieme $X \neq \emptyset$ il sottoinsieme $\mathrm{Comb}_a(X)$ formato da tutte le combinazioni affini di punti di X è il più piccolo sottospazio affine contenente X, ossia il sottospazio affine generato da X.
La somma $E + E'$ di due sottospazi affini è il sottospazio affine generato dall'unione $E \cup E'$.

APPLICAZIONI AFFINI

Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Siano A uno spazio affine su V, B uno spazio affine su W.

Un'applicazione $f: A \to B$ è detta APPLICAZIONE AFFINE se per ogni combinazione affine di punti di A, $P = \sum_{j=1}^{k} a_j P_j$, si ha che $f(P) = \sum_{j=1}^{k} a_j f(P_j) = Q \in B$.

PROPOSIZIONE

Sono fatti equivalenti:

- l'applicazione $f: A \to B$ è affine, ossia se $P_1 \dots P_k \in A$, $a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ $\left(\sum_{j=1}^{k} a_j = 1\right)$, allora $f\left(\sum_{j=1}^{k} a_j P_j\right) = \sum_{j=1}^{k} a_j f(P_j)$;
- esiste un'unica applicazione $(df): V \to W$ tale che per ogni $P_0 \in A$, per ogni $P \in A$: $f(P) = f(P_0) + (df)(\overrightarrow{P_0 P})$. Inoltre (df) è lineare.

Dim.

Dimostriamo che 1) implica 2).
Fissiamo arbitrariamente $P_0 \in A$. Definiamo, per ogni $v \in V$:

$$(df)_{P_0}(v) = \overrightarrow{f(P_0) f(P_0 + v)}$$

Dunque:

$\forall P_0, P \in A: (df)_{P_0}(P - P_0) = (df)(\overrightarrow{P_0 P}) = \overrightarrow{f(P_0) f(P)} = f(P) - f(P_0)$,

da cui:

$$f(P) = f(P_0) + df(\overrightarrow{P_0 P})$$

L'applicazione (df) è lineare infatti, sia $P = P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i P_i$:

$$(df)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i\right) = f\left(P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i P_i\right) - f(P_0) = f\left(\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i (P_0 + P_i)\right) - f(P_0) = \cancel{f(P_0)} - \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_0) - \cancel{f(P_0)} + \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_0 + P_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(f(P_0 + P_i) - f(P_0)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{f(P_0) f(P_0 + P_i)} = \sum_{i=1}^{k} a_i (df)(P_i)$$

Inoltre (df) non dipende dalla particolare scelta di P_0:

$$\overrightarrow{f(P_1) f(P_1 + P)} = \overrightarrow{f(P_1) f(P_0)} + \overrightarrow{f(P_0) f(P_1 + P)} = -\overrightarrow{f(P_0) f(P_1)} + \overrightarrow{f(P_0) f(P_1 + P)} = -(df)(\overrightarrow{P_0 P_1}) + (df)(\overrightarrow{P_0 (P_1 + P)}) = (df)(\cancel{P_0} - \cancel{P_1} - \cancel{P_0} + \cancel{P_1} + P) = (df)(P) = \overrightarrow{f(P_0) f(P_0 + P)}$$

Dunque l'esistenza è provata. L'unicità segue subito dal fatto che: $\forall P_0 \in A, \forall P \in A: (df)(\overrightarrow{P_0 P}) = f(P) - f(P_0)$.

Dimostriamo ora che 2) implica 1). Dunque:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i\right) = f\left(P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right).$$

(si ricordi che $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$)

$$f\left(P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right) = f(P_0) + (df)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} a_i (df)(\overrightarrow{P_0 P_i}) =$$

$$= f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} a_i \left(f(P_i) - f(P_0)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) f(P_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_i), \text{ c.v.d.}$$

Un'applicazione affine f è un'AFFINITÀ o ISOMORFISMO AFFINE se è invertibile.

PROPOSIZIONE

Sia $f: A \longrightarrow B$ un isomorfismo affine. Allora:

- $f^{-1}: B \longrightarrow A$ è un isomorfismo affine;
- $(df): V \longrightarrow W$, ossia la parte lineare di f, è invertibile, e inoltre $(d(f^{-1})) = (df)^{-1}$.

Dim

Siano $f(P_0) \dots f(P_k) \in B$. Allora:

$$f^{-1}(\lambda_0 f(P_0) + \dots + \lambda_k f(P_k)) = f^{-1}(f(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k)) = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k =$$

$$= \lambda_0 f^{-1}(f(P_0)) + \dots + \lambda_k f^{-1}(f(P_k)),$$

e dunque f^{-1} è affine.

Ora per ogni $P_0 \in A$ e $v \in V$, sia $f(P_0 + v) = f(P_0) + (df)(v)$;
per ogni $X_0 \in B$ e $w \in W$, sia $f^{-1}(X_0 + w) = f^{-1}(X_0) + (d(f^{-1}))(w)$.

Si ha:

- $P_0 + v = f^{-1}(f(P_0 + v)) = f^{-1}(f(P_0) + (df)(v)) = f^{-1}(f(P_0)) +$
  $+ (d(f^{-1})) \circ (df)(v) = P_0 + (d(f^{-1})) \circ (df)(v) \Rightarrow (d(f^{-1})) \circ (df) = Id_V$;
- $X_0 + w = f(f^{-1}(X_0 + w)) = f(f^{-1}(X_0) + (d(f^{-1}))(w)) = f(f^{-1}(X_0)) +$
  $+ (df) \circ (d(f^{-1}))(w) = X_0 + (df) \circ (d(f^{-1}))(w) \Rightarrow (df) \circ (d(f^{-1})) = Id_W$.

Allora necessariamente (df) e $(d(f^{-1}))$ sono invertibili, e inoltre

$$(d(f^{-1})) = (df)^{-1}, \text{ c.v.d.}$$

Il gruppo delle trasformazioni affini $Aff(A)$ di A è allora dato dagli automorfismi affini di A. Se $A = A(V)$ è uno spazio affine standard, ritroviamo $Aff(A(V)) = Aff(V)$, ossia il gruppo delle trasformazioni di V già analizzato.

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO AFFINE

Sia A uno spazio affine sullo spazio vettoriale V, di dimensione finita. Allora:

$$\dim A \overset{def}{=} \dim V$$

Analogamente, se W è un sottospazio di V e $H = v + W$, $v \in V$, allora:

$$\dim H \overset{def}{=} \dim W$$

Nel caso particolare in cui $\dim W = 1$, si suole parlare di DIREZIONE anziché di GIACITURA.

Un sottospazio affine si definisce:

- RETTA, se $\dim H = 1$;
- PIANO, se $\dim H = 2$;
- IPERPIANO, se $\dim H = n - 1$.

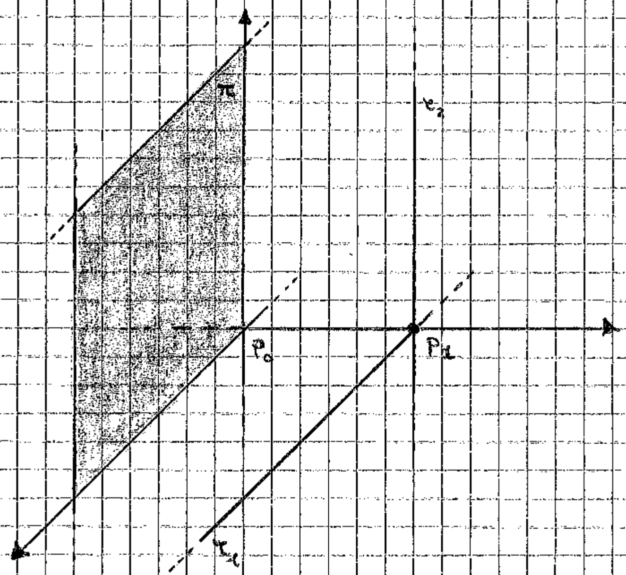
I punti di V sono tutti e soli i sottospazi affini di dimensione 0; V stesso, detto SOTTOSPAZIO AFFINE IMPROPRIO, è l'unico sottospazio affine di dimensione $n = \dim V$.

NOZIONI DI PARALLELISMO

Due sottospazi affini $v+W$ e $v'+W'$ si dicono PARALLELI se o $W \subseteq W'$ o $W' \subseteq W$.

Ovviamente i punti di V e V stesso sono paralleli ad ogni sottospazio affine.

La relazione di parallelismo non è in generale una relazione di equivalenza: il seguente disegno mostra come due rette non parallele tra di loro possono essere entrambe parallele ad un piano:



E' però una relazione di equivalenza se ci si restringe a spazi affini di uguale dimensione, perchè in tale particolare caso $v+W$ e $v'+W'$ sono paralleli se e solo se $W=W'$.

Due sottospazi si dicono IMPROPRIAMENTE PARALLELI se uno dei due contiene l'altro.

PROPOSIZIONE

Due sottospazi affini paralleli o hanno intersezione nulla oppure sono impropriamente paralleli.

Dim.

Supponiamo $W \subseteq W'$, sia $w \in (v+W) \cap (v'+W')$. Allora:

$$v+W = w+W \subseteq w+W' = v'+W', \text{ c.v.d.}$$

APPLICAZIONI CENTROAFFINI

Sia V uno spazio affine e $F: V \to V$ un'affinità.
Sia $v \in V$ tale che $F(v) = v$.

Si dice allora che F è un'APPLICAZIONE CENTROAFFINE di centro v. In altre parole:
$\forall x \in V : F(x) = f(x - v) + v$,
con f applicazione lineare associata ad F.
Infatti:
$\exists c \in V \ni' F(x) = f(x) + c$,
dunque ad esempio:
$$v = F(v) = f(v) + c$$
Perciò:
$\forall x \in V : F(x) = f(x) + c = f(x) + v - f(v) = f(x - v) + v$

Es. Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$, e F_X la simmetria intorno al punto X.

Allora:

- l'applicazione lineare associata è la simmetria intorno a O;
- la traslazione associata è τ_{2X}.

Infatti, poniamo $F_X(X) = X \Rightarrow F_X(P) = f_X(X - P) + c$
Poniamo $F_X(P) = T$. Allora:
$$\vec{OT} = \overrightarrow{OF_X(P)} = -\vec{OP} + 2\vec{OX} = \vec{PO} + 2\vec{OX} = \vec{PX} + \vec{OX}$$
$$\vec{XP} = \vec{OX} + \vec{TO} = \vec{TX}$$
Dunque se $\vec{XP} = \vec{TX}$, T è il simmetrico di P rispetto a X.

SPAZIO AFFINE NUMERICO

Passiamo ora allo studio dei sottospazi affini di $M(n,1,\mathbb{K})$, cioè $\mathbb{K}^n$.

Consideriamo il seguente sistema lineare non omogeneo:

$$AX = B, \quad B \neq 0,$$

dove $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$. Un sistema, dunque, di m equazioni in n incognite. Sia $p = \operatorname{rk} A$.

Allora il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato avrà dimensione $(n-p)$. L'insieme delle soluzioni del sistema originale è allora un sottospazio affine a quello descritto precedentemente, e la dimensione, inoltre, è la stessa. Più precisamente, esso è un traslato, mediante una qualsiasi soluzione particolare del sistema.

Un sistema lineare A tale che $Sol(A) = \xi + W$ è detto SISTEMA DI EQUAZIONI CARTESIANE per $\xi + W$. Se il sistema è costituito da una sola equazione, essa è detta EQUAZIONE DELL'IPERPIANO $\xi + W$.

COROLLARIO

Ogni sottospazio affine di dimensione $(n-p)$ di $M(n,1,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$, $p > 0$, è intersezione di p iperpiani affini.

COMPLEMENTI VARI DI GEOMETRIA AFFINE

PROPOSIZIONE

Siano $S, T \in A$ sottospazi affini non vuoti. Siano $s \in S$ e $t \in T$. Allora:

$$S \cap T \neq \emptyset \iff \vec{st} \in W_S + W_T$$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione.

Per ipotesi $S \cap T \neq \emptyset$. Sia $a \in S \cap T$. Allora:

$$\vec{st} = \vec{sa} + \vec{at} \;,\; \vec{sa} \in W_S \;,\; \vec{at} \in W_T$$

Dunque $\vec{st} \in W_S + W_T$.

Dimostriamo la seconda implicazione.

Per ipotesi, $\vec{st} \in W_S + W_T$. Diciamo $\vec{st} = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_S$, $w_2 \in W_T$. Allora:

$$S \ni s + w_1 = s + \vec{st} - w_2 = t - w_2 \in T \Rightarrow s + w_1 \in S \cap T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \cap T \neq \emptyset \quad \text{c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Siano $S, T \in A$ sottospazi affini non vuoti. Allora:

$\forall s \in S, \forall t \in T: W_{S \cup T} = W_S + W_T + \langle\vec{st}\rangle$

Dim.

Osserviamo innanzitutto che:

$$\langle s, t \rangle = s + \langle\vec{st}\rangle = t + \langle\vec{st}\rangle$$

Sia allora U definito come segue:

$$U \overset{def}{=} s + \langle\vec{st}\rangle + W_S + W_T = t + \langle\vec{st}\rangle + W_S + W_T$$

È necessario e sufficiente verificare che $U = \langle S, T \rangle$.

Un'inclusione è evidente: $U \supseteq S$ e $U \supseteq T$, da cui, essendo U un sottospazio affine, $U \supseteq \langle S, T \rangle$, essendo $\langle S, T \rangle$ il più piccolo sottospazio affine contenente S e T.

Viceversa, si noti che $S, T \subseteq \langle S, T \rangle \Rightarrow s, t \in \langle S, T \rangle$, e inoltre $\vec{st} \in W_{\langle S,T \rangle}$, $W_S, W_T \subseteq W_{\langle S,T \rangle}$. Allora:

$$U = s + \langle\vec{st}\rangle + W_S + W_T \subseteq s + W_{\langle S,T \rangle} = \langle S, T \rangle$$

Dunque la tesi:

$\forall s \in S, \forall t \in T: W_{S \cup T} = W_S + W_T + \langle\vec{st}\rangle$ c.v.d.

TEOREMA (FORMULA DI GRASSMANN PER SOTTOSPAZI AFFINI)

Siano $S, T \subseteq A$ sottospazi affini non vuoti. Allora:

$$\dim(S+T) + \dim(W_S \cap W_T) = \dim S + \dim T + \begin{cases} 0, & S \cap T \neq \emptyset \\ 1, & S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\dim W_{S+T} + \dim(W_S \cap W_T) = \dim W_S + \dim W_T + \begin{cases} 0, & S \cap T \neq \emptyset \\ 1, & S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Dim.

Applicando le proposizioni precedenti, si ha:

$$\dim S+T = \dim(W_S + W_T + \overrightarrow{ST}) = \begin{cases} \dim(W_S + W_T), & S \cap T \neq \emptyset \\ \dim(W_S + W_T) + 1, & S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Applicando allora la formula di Grassmann per gli spazi vettoriali:

$$\dim(W_S + W_T) + \dim(W_S \cap W_T) = \dim W_S + \dim W_T$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(S+T) + \dim(W_S \cap W_T) = \dim S + \dim T + \begin{cases} 0, & S \cap T \neq \emptyset \\ 1, & S \cap T = \emptyset \end{cases},$$

ossia la tesi, c.v.d.

INDIPENDENZA AFFINE, RIFERIMENTI AFFINI

Sia A uno spazio affine su V.
Dati $P_0 \dots P_m$ punti distinti di A (in numero $(m+1)$), essi sono AFFINEMENTE INDIPENDENTI se e solo se $\dim \mathrm{Comb}_a(X) = m$, con $X = \{P_0 \dots P_m\}$.
In tal caso, nell'ipotesi ulteriore che $A = \langle P_0 \dots P_m \rangle$, la $(m+1)$-upla $\{P_0 \dots P_m\}$ è detta RIFERIMENTO AFFINE di A.

PROPOSIZIONE
In tale situazione, ogni $P \in A$ ammette un'unica espressione come combinazione affine, della forma:

$$P = \left(1 - \sum_{j=1}^{m} a_j\right) P_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j P_j$$

Dim.
L'esistenza è garantita dal fatto che $\langle P_0 \dots P_m \rangle = A$, $P \in A$.
Sia dunque:

$$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_m P_m = P = \lambda'_0 P_0 + \dots \lambda'_m P_m,$$

con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i = 1$.
Allora:

$$P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{P_0 P_m} = P = P_0 + \lambda'_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \lambda'_m \overrightarrow{P_0 P_m}$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori $\overrightarrow{P_0 P_1} \dots \overrightarrow{P_0 P_m}$ segue:
$\forall i = 1 \dots m \Rightarrow \lambda_i = \lambda'_i$
Allora:

$$\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i = \lambda'_0, \text{ c.v.d.}$$

Se dunque:

$$P = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i,$$

i coefficienti λ_i, $i = 1 \dots m$ sono detti COORDINATE AFFINI (o BARICENTRICHE) di P.

Ad esempio $A(\mathbb{K}^m)$ ammette un RIFERIMENTO AFFINE CANONICO:

$$X_c = \{0, e_1, e_2 \dots e_m\},$$

ove ciascun e_j è il punto che corrisponde al vettore j-esimo della base canonica di $\mathbb{K}^m$. Se $P = (x_1, \dots, x_m)^t \in A(\mathbb{K}^m)$, le coordinate affini di P rispetto a X_c sono $(x_1, \dots, x_m)$.

In generale, se dim $A = n$ e X è un riferimento affine su A, allora esiste un unico isomorfismo:

$$\Phi_X : A \longrightarrow A(\mathbb{K}^n)$$

che manda X in X_c rispettando l'ordine.

Se $(a_1, \dots, a_n)$ sono le coordinate affini di P rispetto a X, allora $\Phi_X(P) = (a_1, \dots, a_n)^t \in A(\mathbb{K}^n)$.

OSSERVAZIONE

La $(n+1)$-upla $\{P_0 \dots P_n\}$ che costituisce un riferimento affine può essere pensata come una coppia $S = (P_0, R)$, ove R è una base di V come spazio vettoriale.

Notiamo allora che si ha il seguente isomorfismo:

$$\Phi_R : \mathbb{K}^n \longrightarrow \vec{V}$$

e l'affinità (avente Φ_R come omomorfismo associato) seguente:

$$\Phi_S : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$X \longrightarrow \Phi_R(X) + P_0$$

L'applicazione inversa di Φ associa ad ogni $v \in V$ un vettore numerico, detto VETTORE DELLE COORDINATE di V nel riferimento affine S di V.

Infine, notiamo che P_0 ha vettore delle coordinate nullo.

NOZIONI DI DISTANZA

Sia V uno spazio euclideo.
Consideriamo il prodotto scalare standard $<,>$: in ogni caso, ci si può ricondurre a questo caso, considerando una base ortonormale per il prodotto scalare considerato.

Definiamo una DISTANZA:

$$d: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$d(X,Y) = \sqrt{\Phi(X-Y, X-Y)}$$

Ex. Per $V = \mathbb{R}^2$:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Definiamo ora alcuni insiemi:

$$(S(V), \circ) = \{ h: V \to V \mid h \text{ è bigettiva} \}$$
$$\mathrm{Isom}(V, d) = \{ f: V \longrightarrow V \mid \forall P, Q \in V: d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) \}$$
$$O(\Phi) = \{ g \in GL(V) \mid \forall P, Q \in V: \Phi(P,Q) = \Phi(g(P), g(Q)) \}$$

Iniziamo con alcune osservazioni molto semplici:

- $O(\Phi) \subseteq \mathrm{Isom}(V, d)$
  Dato che $d: V \times V \to \mathbb{R}$ è stata definita a partire dai prodotti scalari, una funzione (tra l'altro lineare) che preserva il prodotto scalare preserva a fortiori le distanze;
- $\forall v \in V: \tau_v \in \mathrm{Isom}(V, d)$
  Infatti:
  $\forall v \in V: d^2(\tau_v(P), \tau_v(Q)) = d^2((P+v), (Q+v)) =$
  $= \Phi(P + \cancel{v} - Q - \cancel{v}, P + \cancel{v} - Q - \cancel{v}) = \Phi(P - Q, P - Q) = d^2(P, Q)$;
- $O(\Phi) \subseteq (S(V), \circ)$
  Inclusione ovvia: ogni $f \in O(\Phi)$ è, in particolare, bigettiva
- $< O(\Phi), \{\tau_v\}_{v \in V} > \subseteq (S(V), \circ)$; $< O(\Phi), \{\tau_v\}_{v \in V} > \subseteq \mathrm{Isom}(V, d)$
  Inclusioni ovvie, per quanto visto in precedenza.

PROPOSIZIONE

Si ha la seguente eguaglianza:

$$\mathrm{Isom}(V, d) = \langle O(\Phi), \{\tau_v\}_{v \in V} \rangle$$

Dim.

Un'inclusione, la più ovvia, è stata già dimostrata.

Sia $f \in \mathrm{Isom}(V, d)$, $f(O) = v$. Allora:

$$g = \tau_{-v} \circ f \in \mathrm{Isom}(V, d)$$

$$g(O) = (\tau_{-v} \circ f)(O) = O$$

Il nostro intento è quello di dimostrare che $g \in O(\Phi)$. In questo modo:

$$f = \tau_v \circ g \in \langle O(\Phi), \{\tau_v\}_{v \in V} \rangle$$

$$\mathrm{Isom}(V, d) \subseteq \langle O(\Phi), \{\tau_v\}_{v \in V} \rangle$$

Dunque:

- g preserva la forma quadratica di Φ:

  $\forall\, X \in V: \ \Phi(X, X) = d^2(X, O);$

  $$\Phi(g(X), g(X)) = d^2(g(X), O) = d^2(g(X), g(O)) = $$
  $$= d^2(X, O);$$

- g preserva il prodotto scalare Φ (a priori non sappiamo che g è lineare, dunque è una verifica necessaria, che non può essere bypassata argomentando con la forma quadratica associata):

  $\forall\, X, Y \in V: \ d^2(X, Y) = d^2(g(X), g(Y)) \Rightarrow \Phi(X - Y, X - Y) =$
  $= \Phi(g(X) - g(Y), g(X) - g(Y)) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \cancel{\Phi(X, X)} + \cancel{\Phi(Y, Y)} + 2\Phi(X, Y) = \cancel{\Phi(g(X), g(X))} + \cancel{\Phi(g(Y), g(Y))} +$
  $+ 2\Phi(g(X), g(Y)) \Rightarrow 2\Phi(X, Y) = 2\Phi(g(X), g(Y))$

  Allora (supponendo, al solito, $\mathrm{car}\, \mathbb{K} \neq 2$):

  $$\Phi(g(X), g(Y)) = \Phi(X, Y);$$

- g è lineare: sia infatti $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale per Φ. Si ha che $\mathcal{B}' = \{g(v_1), \dots, g(v_n)\}$ è un'altra base ortonormale per Φ, visto che g preserva Φ. Inoltre:

  $\forall\, v \in V: \ v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ (in modo unico)

  $\qquad g(v) = b_1 g(v_1) + \dots + b_n g(v_n)$ (in modo unico)

Dobbiamo dimostrare che per ogni $i = 1, .., n$: $a_i = b_i$. Ma:

$$a_i = \Phi(v_i, v) = \Phi\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = a_i \, \Phi(v_i, v_i)$$

$$b_i = \Phi(g(v_i), g(v)) = \Phi(v_i, v) = a_i, \text{ c.v.d.}$$

ESERCIZI VARI

1. Sia $V = M(n, \mathbb{R})$, ϕ il prodotto scalare definito come segue
$\forall X, Y \in V: \quad \phi(X, Y) = \text{tr}(XY)$
Sia ora $A \in V$, e f_A definita come segue:

$$f_A : V \longrightarrow V$$
$$X \longrightarrow AX$$

1) Determinare l'aggiunta di f_A.
2) Determinare le matrici A tali che f_A è autoaggiunta.

1) $\forall X, Y \in V: \phi(f(X), Y) = \phi(X, f^*(Y)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall X, Y \in V: \text{tr}(AXY) = \text{tr}(XYA) = \text{tr}(XA^*Y)$
$\Rightarrow \forall X, Y \in V: \text{tr}(XYA) - \text{tr}(XA^*Y) = \text{tr}(XYA - XA^*Y) =$
$= \text{tr}(X(YA - A^*Y)) = 0$

Dato che:
$\forall X \in V: \text{tr}(X(YA - A^*Y)) = \phi(X, YA - A^*Y) = 0$,
$(YA - A^*Y) \in \text{Rad}\,\phi$: visto che (sappiamo che) ϕ è non degenere, allora:

$$YA - A^*Y = 0$$
$$A^*Y = YA$$

Allora:
$\forall Y \in V: \quad f_A^*(Y) = YA$

2) Abbiamo:
$f_A(Y) = AY \qquad\qquad f_A^*(Y) = YA$
Se dunque vogliamo che f sia autoaggiunta:
$f = f^* \Rightarrow \forall Y \in V: f_A(Y) = f_A^*(Y) \Rightarrow AY = YA$

Allora A deve commutare con tutte le matrici, allora A è scalare:

$$E = \{A \in V \mid f_A \text{ è autoaggiunta}\} = \{A \in V \mid A = \lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$, ϕ il prodotto scalare definito come segue:
$\forall A, B \in V: \quad \phi(A, B) = Tr(A^t B)$

Sia ora f definita come segue:

$$f: V \longrightarrow V$$

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

1) Si verifichi che f è ϕ-autoaggiunta.
2) Si determini una base di V ortonormale per ϕ e di autovettori per f.

1) Un primo modo può essere il seguente:

$$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in V: \phi\left(f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) = c\alpha + a\gamma + d\beta + b\delta$$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}\right) = a\gamma + c\alpha + b\delta + d\beta$$

Allora f è ϕ-autoaggiunta.

Un secondo modo può essere il seguente:

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\mathcal{C}$ è ϕ-ortonormale. Allora

$$f \text{ è } \phi\text{-autoaggiunta} \Leftrightarrow A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \text{ è simmetrica}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f \text{ è } \phi\text{-autoaggiunta}$$

2) Notiamo immediatamente che:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo questi quattro autovettori linearmente indipendenti, si ha $V = V_1(f) \,\hat{\oplus}\, V_{-1}(f)$.

Notiamo inoltre che:

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0 \qquad \phi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) = 0$$

Allora:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di ϕ formata da autovettori per f.
Normalizziamo e concludiamo (sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$):

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \phi\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\mathcal{G} = \left\{\frac{v_1}{\sqrt{2}}, \frac{v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_3}{\sqrt{2}}, \frac{v_4}{\sqrt{2}}\right\}$$

3. Sia $A \in O(n)$. Dimostrare che gli autovalori complessi di A hanno norma unitaria.

Complessifichiamo l'endomorfismo indotto da A:

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$f_{A_{\mathbb{C}}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A, $v \neq 0$ un autovettore relativo a λ:

$$Av = \lambda v$$

Allora:

$$A\bar{v} = \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Calcoliamo:

$$(\overline{Av})^t A v = \bar{v}^t \bar{A}^t A v = \bar{v}^t I v = \bar{v}^t v$$

Ma:

$$(\overline{Av})^t A v = (\bar{\lambda}\bar{v})^t \lambda v = \bar{v}^t \bar{\lambda}\lambda v = \|\lambda\|^2 \bar{v}^t v$$

Allora:

$$(\|\lambda\|^2 - 1)\, \bar{v}^t v = 0 \quad \forall v \neq 0$$

Visto che $\bar{v}^t v = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 > 0 \quad \forall v \neq 0$, allora:

$$\|\lambda\|^2 = 1$$

Allora λ è della forma $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

6. Sia $A \in O(n)$ avente tutti gli autovalori reali. Mostrare che A è simmetrica.

Un primo modo è una diretta conseguenza della seguente proposizione:

$$A \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow \begin{cases} A A^t = A^t A \\ A \text{ ha tutti gli autovalori reali} \end{cases}$$

Un'implicazione è ovvia: se A è simmetrica, allora $A = A^t$, e $A A^t = A^2 = A^t A$. Inoltre, il Teorema Spettrale Reale ci assicura che A è diagonalizzabile, quindi ha tutti gli autovalori reali.

Viceversa, se A ha tutti gli autovalori reali, allora:

$\exists M \in GL(n, \mathbb{R}) \ni' M^{-1} A M \in T(n, \mathbb{R})$

Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$\exists P \in O(n) \ni' P^{-1} A P = P^t A P = T \in T(n, \mathbb{R})$

Inoltre:

$$T T^t = P^t A P P^t A^t P = P^t A A^t P = P^t A^t A P = P^t A^t P P^t A P = T^t T$$

Imponendo $T T^t = T^t T$, si trova che $T \in D(n, \mathbb{R})$. Allora $T \in S(n, \mathbb{R})$ e A, congruente con T, è pure simmetrica.

Un secondo modo si può ottenere adeguando ai nostri scopi la seguente proposizione:

φ isometria, $\varphi(H) \subseteq H \Rightarrow \varphi(H^\perp) \subseteq H^\perp$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore per $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ un autovettore relativo a λ: $Av = \lambda v$.

Allora:

$$A(\mathrm{Span}(v)) \subseteq \mathrm{Span}(v) \Rightarrow A((\mathrm{Span}(v))^\perp) \subseteq (\mathrm{Span}(v))^\perp$$

Usando il principio di induzione, trovo una base ortonormale di autovettori per f. Allora:

$\exists P \in O(n, \mathbb{R}) \ni' P^{-1} A P = P^t A P = \Delta \in D(n, \mathbb{R})$

Allora $A \sim \Delta \in S(n, \mathbb{R})$ perché $\Delta \in S(n, \mathbb{R})$

5. Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Provare che esistono e sono uniche una matrice $S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva e $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che si possa ottenere una DECOMPOSIZIONE POLARE:

$$A = SP$$

Dim.

Dimostriamo l'esistenza.

Immediatamente, AA^t è simmetrica. Inoltre essa è definita positiva, infatti:

$\forall X \in \mathbb{R}^n: \; X^t A A^t X = (A^t X)^t (A^t X) = \langle A^t X, A^t X \rangle$,

e il prodotto scalare standard è definito positivo:

$\langle A^t X, A^t X \rangle = 0 \iff A^t X = 0, \; A \in GL(n, \mathbb{R}) \iff X = 0$

Abbiamo dimostrato che, se (AA^t) è simmetrica definita positiva, esiste la cosiddetta "radice quadrata":

$\exists \; S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva tale che $(AA^t) = S^2$

Allora:

$$S^{-1} A A^t S^{-1} = I$$

Dato che $(S^{-1})^t = (S^t)^{-1}$, si ha:

$$S^{-1} A A^t S^{-1} = S^{-1} A A^t (S^{-1})^t = (S^{-1} A)(S^{-1} A)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^{-1} A \in O(n, \mathbb{R})$$

Sia $P = S^{-1} A$. Allora:

$$A = S S^{-1} A = SP$$

Dimostriamo ora l'unicità.

Siano $S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva e $P \in O(n, \mathbb{R})$ tali che $A = SP$.

Allora:

$$A A^t = (SP)(SP)^t = S \cancel{P P^t} S^t = S S^t = S^2$$

Allora S è la "radice quadrata" di AA^t, e l'unicità di essa è stata già dimostrata. Segue immediatamente l'unicità di P:

$$P = S^{-1} A, \text{ c.v.d.}$$

6. Siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$, la prima delle due definita positiva. Allora:

- AB è diagonalizzabile;
- il numero di autovalori positivi di AB è uguale al numero di autovalori positivi di B.

Dim.

Applicando il Teorema Spettrale Reale A e B risultano diagonalizzabili. Inoltre:

$\exists\, S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva t.c. $A = S^2$

Dunque:

$$AB = S^2 B \Rightarrow S^{-1} A B = S B$$

$$S^{-1}(AB) S = S B S = S^t B S$$

Allora $S^t B S$, coniugato a $B \in S(n, \mathbb{R})$, è simmetrica, dunque diagonalizzabile.

Allora AB, simile a $S^t B S$, è diagonalizzabile.

Ora, il numero degli autovalori positivi di AB è uguale al numero di autovalori positivi di $S^t B S = G$.

$G \in S(n, \mathbb{R})$, dunque, pensando G come prodotto scalare, il numero che cerchiamo non è altro che $i_+(G)$, uguale a $i_+(B)$, uguale al numero degli autovalori positivi di B,

c.v.d.

OSSERVAZIONE

$A, B \in S(n, \mathbb{R})$ non implica $AB \in S(n, \mathbb{R})$: si ha:

$$AB \in S(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow AB = BA$$

OSSERVAZIONE

L'uguaglianza tra il numero di autovalori positivi di una matrice e l'indice di positività quando questa viene pensata come prodotto scalare ha senso solo se la matrice è simmetrica, cioè induce un prodotto scalare.

STRUTTURA DI SPAZIO AFFINE DI $\mathbb{R}^n$

Sappiamo già che:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = GL(n,\mathbb{R}) + T_s(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \{ f = \tau_v \circ h \mid h \in GL(n,\mathbb{R}),\ \tau_v \in T_s(\mathbb{R}^n) \}$$

$$\tau_v(X) = X + v$$

Si definisce poi SOTTOSPAZIO AFFINE H del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^n$ (o di V in generale) un insieme del tipo:

$$H = \tau_v(W),\quad v \in \mathbb{R}^n$$

W si definisce allora GIACITURA di H. La dimensione di H è per definizione la dimensione di W.

Sia W un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ (sia cioè $\dim W = n-1$). Allora:

$$W = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \}$$

Ponendo $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e indicando con $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, si ha:

$$W = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \langle B, X \rangle = 0 \}$$

Se ora H è un sottospazio affine di giacitura W, ossia $H = \tau_P(W)$, $P \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$X \in H \iff (X - P) \in W \iff \langle B, X - P \rangle = 0$$

$$X \in H \iff \langle B, X \rangle = \langle B, P \rangle$$

Posto $\langle B, P \rangle = d \in \mathbb{R}$ l'equazione dell'iperpiano affine è dunque:

$$\langle B, X \rangle = d$$

La giacitura avrà invece equazione dell'iperpiano:

$$\langle B, X \rangle = 0$$

Ex. Descrivere esplicitamente la riflessione ortogonale rispetto a H.

Innanzitutto, la retta passante per B è ortogonale ad H. Determiniamo allora l'intersezione:

$$x = tB + P \qquad x \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle B, tB + P \rangle = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\langle B, B\rangle + \langle B, P\rangle = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{d - \langle B, P\rangle}{\langle B, B\rangle}$$

Allora:

$$\pi_H(P) = \frac{1}{2}(P + \sigma(P)) = \frac{d - \langle B, P\rangle}{\langle B, B\rangle} B + P$$

$$\sigma(P) = P + 2\frac{d - \langle B, P\rangle}{\langle B, B\rangle} B$$

Allora la riflessione ortogonale rispetto a H è così definita:

$$\sigma(X) = X + 2\frac{d - \langle B, X\rangle}{\langle B, B\rangle} B$$

ISOMETRIE NELLO SPAZIO AFFINE $\mathbb{R}^n$

Si definisce GRUPPO DELLE ISOMETRIE di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{ f = \tau_v \circ h \mid h \in O(n, \mathbb{R}), \tau_v \in T_S(\mathbb{R}^n) \}$$

Se $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, il luogo dei punti fissi nell'affine è:

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX + B = X \} =$$
$$= \{ X \in \mathbb{R}^n \mid (A - I) X = -B \}$$

Si noti che:

$$\mathrm{Giac}(\mathrm{Fix}(\varphi)) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid (A - I) X = 0 \} =$$
$$= \mathrm{Ker}(A - I) = V_1(A) = \mathrm{Fix}(A)$$

In particolare, $\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si dice SIMMETRIA se $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Ex. Sia $\sigma(X) = AX + B$ una simmetria di $\mathbb{R}^n$. Provare che:

- $A^2 = I$, $\sigma(B) = 0$;
- $\forall P \in \mathbb{R}^n : \dfrac{P + \sigma(P)}{2} \in \mathrm{Fix}(\sigma)$ (dunque $\mathrm{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$);
- $\dfrac{B}{2} \in \mathrm{Fix}(\sigma)$;
- $\exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto a cui σ è data da:

$$\sigma : X \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array} \right] X + \|B\| v_n ;$$

- $\forall P \in \mathbb{R}^n : P - \sigma(P)$ è ortogonale a $\mathrm{Fix}(\sigma)$; $B \perp \mathrm{Fix}(\sigma)$.

- $\sigma^2(X) = X \Rightarrow A(AX + B) + B = A^2 X + AB + B = A^2 X + \sigma(B)$

Valutando $\sigma(0)$, si ha $\sigma^2(0) = \sigma(B) = 0$. Inoltre:

$\forall P \in \mathbb{R}^n : \sigma^2(P) = A^2 P = P \Rightarrow A^2 = I$;

- $\forall P \in \mathbb{R}^n : \sigma\left(\dfrac{P + \sigma(P)}{2} \right) = A\left(\dfrac{P + \sigma(P)}{2} \right) + B =$

$$= \frac{AP}{2} + \frac{A^2 P + AB}{2} + B = \frac{AP}{2} + \frac{P}{2} + \frac{AB + B}{2} + \frac{B}{2} =$$

$$= \frac{AP + B}{2} + \frac{P}{2} + \cancel{\frac{\sigma(B)}{2}} = \frac{\sigma(P) + P}{2} \Rightarrow \frac{P + \sigma(P)}{2} \in \mathrm{Fix}(\sigma).$$

- $\sigma(B) = 0 \Rightarrow \dfrac{B}{2} = \dfrac{B + \sigma(B)}{2} \Rightarrow \dfrac{B}{2} \in \mathrm{Fix}(\sigma).$

- Sappiamo che $Giac(Fix(\sigma)) = Fix(A) = V_1(A)$. Inoltre:

$$A^2 = I \Rightarrow A \in O(n, \mathbb{R}), \ A \text{ è diagonalizzabile}$$

In particolare, munendo $\mathbb{R}^n$ del prodotto scalare standard:

$$\mathbb{R}^n = V_1(A) \overset{\perp}{\oplus} V_{-1}(A)$$

Adottando basi ortonormali per ciascun autospazio, si ottiene:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right]$$

Inoltre $\sigma(B) = O \Rightarrow AB + B = 0 \Rightarrow AB = -B$. Allora $B \in V_{-1}(A)$.
Posso dunque adottare come ultimo vettore della base spettrale $\frac{B}{\|B\|}$, così da avere $\|B\| v_n$ come parte traslatoria

- $\forall P \in \mathbb{R}^n$: $A(P - \sigma(P)) = AP - A^2P - AB = AP + B - P =$
$= \sigma(P) - P \Rightarrow (P - \sigma(P)) \in V_{-1}(A)$

Allora $(P - \sigma(P)) \perp Giac(Fix(\sigma)) = V_1(A)$, il che è equivalente a dire che $(P - \sigma(P)) \perp Fix(\sigma)$.

Per concludere, $\sigma(B) = O \Rightarrow B = (B - \sigma(B)) \perp Fix(\sigma)$.

VERSIONE MATRICIALE DELLA COMPOSIZIONE DI AFFINITÀ

Ricordiamo innanzitutto che:

$$\mathrm{Aff}(V) = V \rtimes GL(V)$$
$$\mathrm{Aff}(V) = \{ \tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in GL(V) \}$$

Inoltre la legge di composizione è la seguente:

$$(\tau_v \circ f) \circ (\tau_w \circ g) = \tau_{f(w)+v} \circ (f \circ g)$$

Passando in coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B}$:

$$V \rightsquigarrow \mathbb{K}^n \qquad GL(V) \rightsquigarrow GL(n, \mathbb{K})$$

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n \rtimes GL(n, \mathbb{K})$$
$$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \{ X \to AX + B \mid A \in GL(n, \mathbb{K}),\ B \in \mathbb{K}^n \}$$

Inoltre, la legge di composizione è

$$(B, A)(B', A') = (AB' + B,\ AA')$$

Vogliamo realizzare $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ come sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$.

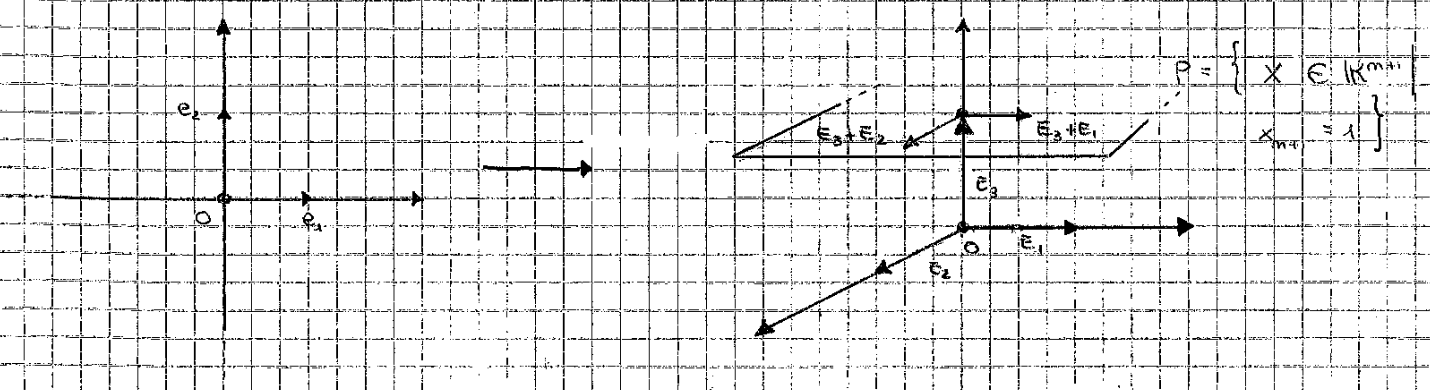
Effettuiamo allora un' "immersione" di $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^{n+1}$ in questo modo:

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow P \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$$
$$(O, e_1, \ldots, e_n) \longrightarrow (E_{n+1},\ E_{n+1} + E_1,\ \ldots,\ E_{n+1} + E_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \longrightarrow Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \hline 1 \end{bmatrix} \in P \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$$

Ad esempio

$\mathbb{K}^2$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{K}^3$



A livello di notazione, $\mathbb{K}^n \neq P \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ verrà indicato con $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$.

Consideriamo allora il gruppo delle trasformazioni in $GL(n+1, \mathbb{K})$ che lasciano invariato P:

$$G(\mathbb{K}^n) \overset{def}{=} \{ g \in GL(n+1, \mathbb{K}) \mid g(P) = P \}$$

Se $\mathcal{B} = \{ E_{n+1} + E_1, E_{n+1} + E_2, \dots, E_{n+1} \}$, si ha, per ogni $g \in G(\mathbb{K}^n)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

ove $A \in GL(n, \mathbb{K})$ poiché $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) \in GL(n+1, \mathbb{K})$ e $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \det A$, e $B \in \mathbb{K}^n$.

Componendo $g, h \in G(\mathbb{K}^n)$, si ottiene il prodotto semi diretto in forma matriciale:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} AA' & K \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

con $K = AB' + B$.

Dunque, posto $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{array}{ccl} Aff(\mathbb{K}^n) = G(\mathbb{K}^n) & = & \{ g \in GL(n+1, \mathbb{K}) \mid g(P) = P \} = \\ \| & & \\ \mathbb{K}^n \rtimes GL(n, \mathbb{K}) & = & \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \mid \det M \neq 0 \right\} \subseteq \\ & \subseteq & GL(n+1, \mathbb{K}) \end{array}$$

Inoltre il seguente è un isomorfismo tra gruppi:

$$\begin{array}{ccc} Aff(\mathbb{K}^n) & \simeq & G(\mathbb{K}^n) \\ (B, A) & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

RIFLESSIONI NELLO SPAZIO AFFINE $\mathbb{R}^n$

Una simmetria σ di $\mathbb{R}^n$ si definisce RIFLESSIONE se:

$$\dim \mathrm{Fix}(\sigma) = n-1$$

Discutiamo ora la composizione di 2 riflessioni. Siano le seguenti due riflessioni:

$$\rho_1 = A_1 X + B_1$$
$$\rho_2 = A_2 X + B_2$$

Abbiamo sicuramente che:

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Fix}(\rho_1) &= H_1 \\ \dim \mathrm{Fix}(\rho_2) &= H_2 \end{aligned} \quad , \quad \dim H_1 = \dim H_2 = n-1$$

$$B_1 \perp H_1 \qquad B_2 \perp H_2$$

CASO 1

$H_1 \parallel H_2$

Si ha:

$$\mathrm{Giac}(H_1) = \mathrm{Giac}(H_2) \quad \Rightarrow \quad B_1 \parallel B_2$$

Allora $B_1 = K B_2$, $K \in \mathbb{R}$

In particolare, $\frac{B_1}{2} \in H_1$ e $\frac{B_2}{2} \in H_2$

Possiamo allora calcolare la distanza tra gli iperpiani:

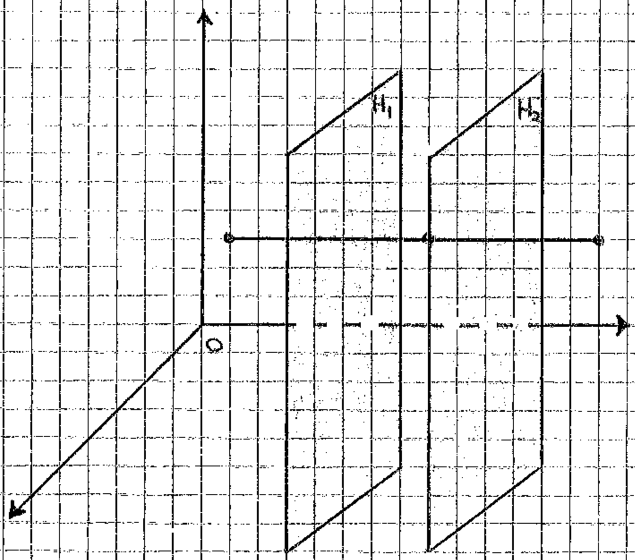
$$d(H_1, H_2) = \frac{\| B_1 - B_2 \|}{2}$$

Notiamo ora che $A_1 = A_2 = A$. Infatti essi hanno autospazi relativi all'autovalore 1, di dimensione $(n-1)$, uguale.

Allora:

$$\begin{aligned} (\rho_2 \circ \rho_1)(X) &= \rho_2(AX + B_1) = A(AX + B_1) + B_2 = \\ &= X + AB_1 + B_2 = X + B_2 - B_1 = \tau_{B_2 - B_1}(X) \end{aligned}$$

Dunque la composizione di 2 riflessioni aventi luoghi dei punti fissi paralleli è una traslazione secondo il vettore $B_2 - B_1$, che esprime il doppio della distanza dei due iperpiani.



CASO 2

$H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

Si ha:

$$\mathrm{Giac}(H_1 \cap H_2) = \mathrm{Giac}(H_1) \cap \mathrm{Giac}(H_2) = K,$$

ove $\dim K = n-2$. Dunque $\dim \mathrm{Giac}(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Inoltre:

$$\mathrm{Giac}(H_1 \cap H_2) \subseteq \mathrm{Fix}(A_2 A_1)$$

Dato che $A_2 A_1 \in O(n, \mathbb{R})$:

$$(\mathrm{Giac}(H_1 \cap H_2))^{\perp} \text{ è invariante per } A_2 A_1$$

Dunque ogni sottospazio affine di dimensione 2 ortogonale a $H_1 \cap H_2$ è invariante per $\rho_2 \circ \rho_1$.

Nel caso particolare $\mathbb{R}^3$, la composizione di due riflessioni di questo tipo è una rotazione intorno alla retta dei punti fissi. L'angolo di rotazione, in particolare, è il doppio dell'angolo compreso tra i due piani H_1 e H_2.

STIME SUL NUMERO DI RIFLESSIONI

Ogni isometria di $Isom(\mathbb{R}^n)$ si può scrivere come composizione di $(n+1)$ riflessioni. Infatti:

$$\sigma \in Isom(\mathbb{R}^n) \quad \sigma(O) = B$$

Considerata ρ riflessione tale che $\rho(B) = O$, si ha:

$$(\rho \circ \sigma)(O) = O \Rightarrow \rho \circ \sigma \text{ è un'isometria lineare}$$

Dunque $\rho \circ \sigma$ si può scrivere come composizione di n riflessioni:

$$\rho \circ \sigma = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_n$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma = \rho \circ \rho_1 \circ \dots \rho_n$$

Dunque σ è composizione di $(n+1)$ riflessioni.

Sia ora $\dim Fix(\sigma) = K$. Allora σ è composizione di $(n-K)$ riflessioni.

Infatti:

- se $\dim Fix(\sigma) = n$, allora $\sigma = Id$;
- se $\dim Fix(\sigma) = K < n$, allora:

  $\exists P \notin Fix(\sigma) \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\sigma(P) \neq P$.

  Sia H l'iperpiano definito come segue:

  $$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X, P) = d(X, \sigma(P))\}$$

  Sicuramente $Fix(\sigma) \subseteq H$. Infatti:

  $\forall X \in Fix(\sigma) = d(X, P) = d(\sigma(X), \sigma(P)) = d(X, \sigma(P))$

  Sia allora ρ la riflessione parallela all'iperpiano H. Si ha:

  $$P \in Fix(\rho \circ \sigma)$$
  $$\Downarrow$$
  $$\dim Fix(\rho \circ \sigma) \geq n+1$$

Iterando, allora, ottengo quanto voluto.

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE DI $\mathbb{R}^2$

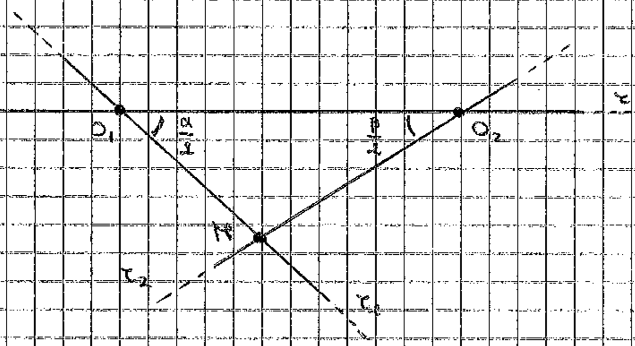
Innanzitutto, per quanto appena dimostrato, ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è composizione di al più 3 riflessioni.

Sia allora σ composizione di k riflessioni:

- $k = 0 \Rightarrow \sigma = \mathrm{Id}$;
- $k = 1 \Rightarrow \sigma$ è una riflessione;
- $k = 2 \Rightarrow$ per quanto visto in precedenza, σ può essere o una traslazione o una rotazione intorno ad un punto fisso.

Prima di affrontare il caso $k = 3$, alcune considerazioni preliminari.

Studiamo ad esempio la composizione di rotazioni. Siano R_{O_1}, R_{O_2} rotazioni. Se $O_1 \equiv O_2$, allora la composizione è una rotazione. Se $O_1 \not\equiv O_2$ la situazione è la seguente:



Si ha allora:

$$R_{O_1} \circ R_{O_2} = \rho_2 \circ \cancel{\rho \circ \rho} \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \rho_1 ,$$

perciò:

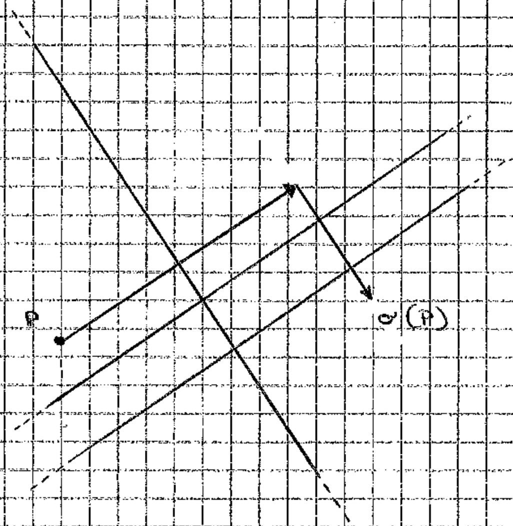
- se $\alpha + \beta = 2\pi$, $R_{O_1} \circ R_{O_2}$ è una traslazione;
- in caso contrario, $R_{O_1} \circ R_{O_2}$ è una rotazione di centro M.

Introduciamo ora una nozione.

Si definisce GLIDE la composizione di una riflessione parallela ad un iperpiano e una traslazione parallela all'asse della riflessione.

Un glide è un'isometria inversa, perché la traslazione si può decomporre mediante due riflessioni parallele e iperpiani paralleli, per un totale di 3 riflessioni.

La rappresentazione di un glide in $\mathbb{R}^2$ è la seguente:



Si noti che un glide non presenta punti fissi.

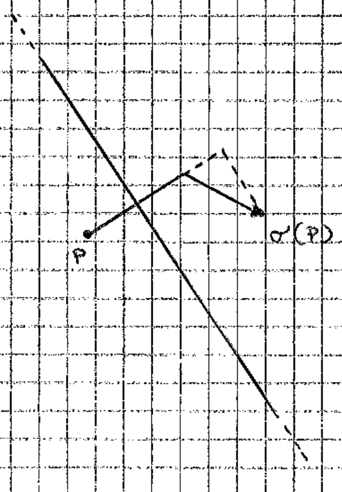
Dunque:

- $K = 3 \Rightarrow \sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$, ρ_i riflessione $\forall i = \{1, 2, 3\}$.

  Riguardo $\rho_1 \circ \rho_2$, le possibilità sono due: o è una traslazione, o è una rotazione.

  Supponiamo che $\rho_1 \circ \rho_2 = \tau_v \Rightarrow \sigma = \tau_v \circ \rho_3$

  Possiamo decomporre v in $v_1 + v_2$ ove $v_1 \perp r_3$ e $v_2 \parallel r_3$



Dato che le traslazioni formano un gruppo Abeliano rispetto alla composizione, certamente è lecito supporre:

$$\sigma = \tau_{v_1} \circ (\tau_{v_2} \circ \rho_3)$$

τ_{v_2}, in particolare, si può scrivere come composizione di due riflessioni relative a rette parallele: una di queste può essere proprio ρ_3:

$$\tau_{v_2} = \rho_3' \circ \rho_3$$

Allora $\sigma = \tau_{v_1} \circ (\rho_3' \circ \cancel{\rho_3 \circ \rho_3}) = \tau_{v_1} \circ \rho_3$ è un glide.

Si noti che, se $r_1 \parallel r_2$, dunque $\rho_1 \circ \rho_2 = \tau_v$, allora:

$$v \perp r_3 \Leftrightarrow \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 \text{ è una riflessione} \Leftrightarrow r_1 \parallel r_2 \parallel r_3$$

Infatti, se $v \perp r_3$, allora $\tau_v = \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_3' \circ \rho_3$ per qualche riflessione ρ_3'. Allora $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \rho_3' \circ \cancel{\rho_3 \circ \rho_3} = \rho_3'$ è una riflessione. Viceversa, se $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ è una riflessione, essa è un particolare glide con $v \perp r_3$, essendo assente la traslazione finale. Ora, se $\tau_v = \rho_1 \circ \rho_2$, allora $v \perp r_1$, $v \perp r_2$. Dunque $v \perp r_3$ se e solo se $r_1 \parallel r_2 \parallel r_3$.

Supponiamo ora che $\rho_1 \circ \rho_2 = R_O \Rightarrow \sigma = R_O \circ \rho_3$.
I casi sono due: il centro della rotazione può appartenere o meno a r_3.

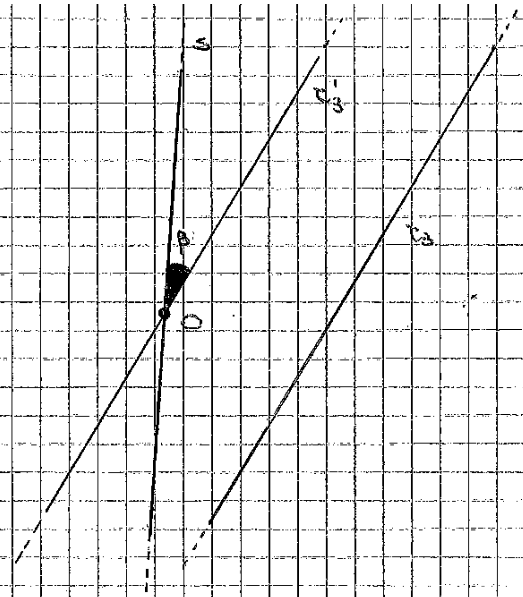
Supponiamo che vi appartenga. Allora le tre rette sono concorrenti. In particolare:

$$\sigma = R_O \circ \rho_3 = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \rho_3' \circ \rho_3 \circ \rho_3 = \rho_3',$$

dunque σ è una riflessione. In realtà si tratta di un se e solo se: se le tre rette sono concorrenti, la rotazione prodotta dalla composizione delle prime due può essere espressa mediante altre due rette, una delle quali è la terza:

$$\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \rho_3' \circ \cancel{\rho_3 \circ \rho_3} = \rho_3' \text{ riflessione}$$

Prima di dimostrare il contrario, esaminiamo il caso in cui il centro di rotazione non appartiene a r_3.



In questo caso, la rotazione può essere descritta mediante la composizione di due riflessioni parallele a due rette incidenti in O, una delle quali parallela a r_3:

$$\sigma = R_O \circ \rho_3 = \rho_\alpha \circ \rho_3' \circ \rho_3 = \rho_\alpha \circ \tau_v$$

Ora, sia $v = v_1 + v_2$, $v_1 \parallel r_3$, $v_2 \perp r_3$. Allora:

$$\sigma = \rho_\alpha \circ \tau_v = \rho_\alpha \circ (\tau_{v_1} \circ \tau_{v_2}) = \tau_{v_1} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{v_2}$$

τ_{v_2} può essere scritta come composizione di due riflessioni aventi assi paralleli a r_3:

$$\sigma = \tau_{v_1} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{v_2} = \tau_{v_1} \circ \rho_\alpha \circ \rho_\alpha' \circ \rho_\alpha'' = \tau_{v_1} \circ \rho^*,$$

e questo è un glide.

Ritornando al caso precedente, abbiamo dimostrato che, se l'angolo di rotazione è non nullo, e se O non è contenuto in r_3, il glide che si ottiene è un glide nel senso proprio del termine.

Dunque, se σ è una riflessione, o l'angolo di rotazione è nullo (e questo caso non rientra nel caso $\rho_1 \circ \rho_2 = R_O$, o se vogliamo è un caso banale), oppure le tre rette sono concorrenti.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

Consideriamo, d'ora in avanti, lo spazio affine standard $\mathbb{K}^n$, avente $(O, x_1, x_2, \dots, x_n)$ come riferimento affine.

Consideriamo ora, all'interno di $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, le equazioni di grado 1:

$$E = \{ q(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid \deg q = 1 \}$$

In particolare:

$$q(X) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$$

Data un'equazione $q \in \mathbb{K}_1[x_1, \dots, x_n]$, possiamo considerare l'iperpiano affine costituito dal luogo di zeri dell'equazione:

$$Z(q) = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0 \}$$

In versione matriciale:

$$E = \{ (A|b) \mid A \in M(1, n, \mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K} \}$$
$$Z = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX + b = 0 \}$$

L'applicazione $\Phi : E \to Z(E)$ che ad ogni equazione associa il suo luogo di zeri è certamente surgettiva: ciò è intrinseco, e deriva direttamente da come $Z(E)$ è stato definito.
L'applicazione non è però iniettiva: moltiplicando un'equazione per uno scalare non nullo l'equazione cambia, il luogo di zeri no.
Effettuiamo allora una proiezione canonica sul quoziente generato dalla relazione di equivalenza che afferma che $(A|b) \sim \lambda(A|b)\ \forall \lambda \neq 0$. L'applicazione $\bar{\Phi} : E/R \to Z(E)$ è ora biettiva.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DEGLI IPERPIANI AFFINI

Sia f una trasformazione affine:

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$X \longrightarrow PX + D \ , \quad P \in GL(n, \mathbb{K}), \ D \in \mathbb{K}^n$$

Istituiamo ora una relazione di equivalenza tra iperpiani affini, che afferma che:

$$\pi_1 \sim \pi_2 \iff \exists \ f \in Aff(\mathbb{K}^n) \ \ni' \ \pi_2 = f(\pi_1)$$

Con la solita notazione:

$$\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$$
$$(P \mid D) \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} P & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Supponiamo che $\pi \subseteq \mathbb{K}^n$ sia un iperpiano luogo di zeri di una certa equazione:

$$\forall \ X \in \pi : \ AX + b = 0 \iff (A \mid b) X = 0$$

In $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Dunque:

$$\pi = \left\{ Y \in \mathbb{K}^{n+1} \ \middle| \ \begin{cases} (A \mid b) Y = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases} \right\} , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

Considerando allora $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\varphi \approx (P \mid D)$, si ha:

$$\begin{cases} (A \mid b) Y = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A \mid b)(PX + D) = 0 \\ x_{n+1} = 1 \end{cases}$$

In definitiva:

$$\begin{cases} (AP \mid AD + b) \ X = 0 \\ x_{n+1} = 1 \end{cases}$$

In conclusione, le affinità mandano iperpiani in iperpiani.

Consideriamo allora

$$E/R^* = \{ (A \mid b) \mid A \in M(1, n, \mathbb{K}),\ A \neq 0,\ b \in \mathbb{K} \} \Big/ \begin{array}{l} (A|b) \sim \lambda (A|b)\ \forall \lambda \neq 0 \\ \quad + \\ (A|b) \sim (PA \mid AD + b) \\ \forall \left(\begin{array}{c|c} P & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \end{array}$$

Consideriamo ora:

$$\mathcal{D} = \{ \text{iperpiani affini} \} \Big/ \begin{array}{l} \pi \sim f(\pi) \\ \forall f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \end{array}$$

La seguente è una bigezione:

$$\Omega : E/R^* \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$[(A \mid b)] \longrightarrow [Z(A \mid b)]$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Sia ora:

$$E_2 = \{ q(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n] \mid \deg q = 2 \}$$

Dato $q \in E_2$, $\mathcal{Z}(q)$ si definisce QUADRICA. L'applicazione $\Phi : E \to \mathcal{Z}(E)$ diventa ora:

$$\Phi_2 \quad E_2 \longrightarrow \mathcal{Z}(E_2)$$
$$q \longrightarrow \mathcal{Z}(q) = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid q(X) = 0 \}$$

Un polinomio di 2° grado si può scrivere in questa forma:

$$q(x_1 \dots x_n) = X^t A X + 2B^t X + d,$$

ora $A \neq 0$, $A \in S(n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$, $d \in \mathbb{K}$.

Ex. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 + x_2 + 1$

Allora la scrittura di q in quella forma è:

$$\underbrace{(x_1 \quad x_2)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{A} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{1}_{d}$$

Possiamo allora "compattare" la scrittura, e in definitiva affermare che:

$$E_2 \approx \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array} \right) \mid M \in S(n+1, \mathbb{K}),\ A \in S(n, \mathbb{K}),\ A \neq 0 \right\}$$

Si noti che $M \in S(n+1, \mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in S(n, \mathbb{K})$, in questo caso.

Se dunque $M \in S(n+1, \mathbb{K})$ è la matrice indotta da $q \in E_2$:

$$\mathcal{Z}(M) \subseteq \mathbb{K}^n$$

Con la solita notazione $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, si ottiene questo sistema equivalente:

$$\begin{cases} Y^t M Y = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

Il polinomio ottenuto è omogeneo, perché presenta solo monomi di grado 2, ed è in $(n+1)$ variabili. In particolare, se $X \in \mathcal{Z}(M)$, allora tutti i suoi multipli vi appartengono.

Es. Considerando l'esempio di prima:

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 + x_2 + 1$$

Si ha:

$$(y_1 \quad y_2 \quad y_3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

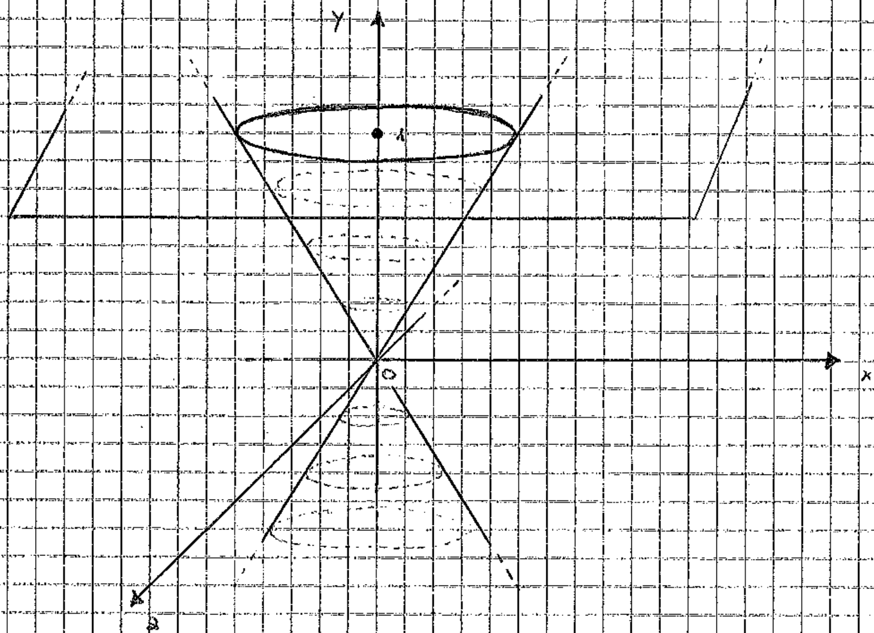
Dunque:

$$\begin{cases} y^2 + 2y_2^2 + 2y_1 y_2 + 2y_1 y_3 + y_2 y_3 + y_3^2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

Nel caso di polinomi di grado 2, si definisce QUADRICA il luogo degli zeri dell'equazione. Si definisce invece CONICA l'intersezione della quadrica con l'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 1$.

Ad esempio, valutiamo il caso:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$



DIFFERENZE IN BASE AL CAMPO

Riassumendo, con la solita notazione $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$. Inoltre:

$$X \longrightarrow Y = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Consideriamo la seguente applicazione, sicuramente surgettiva:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right) \middle| \begin{array}{c} M = M^t \\ A \neq 0 \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{c} M \sim M' \\ \Updownarrow \\ M = \lambda M',\ \lambda \neq 0 \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{cases} Y^t M Y = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases} \right\}$$

L'iniettività di questa applicazione, dunque la sua biettività, dipende dal campo. D'ora in poi sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Su $\mathbb{C}$ l'applicazione è bigettiva. Su $\mathbb{R}$ invece no, e i controesempi si trovano valutando i casi in cui $\mathcal{Z}(q) = 0$ o $\mathcal{Z}(q) = \emptyset$.

Alcuni controesempi:

- $\mathcal{Z}(x_1^2 + x_2^2) = 0 = \mathcal{Z}(x_1^2 + 2x_2^2)$;
- $\mathcal{Z}(x_1^2 + x_2^2 + 1) = \emptyset = \mathcal{Z}(x_1^2 + 2x_2^2 + 1)$.

Studiamo ora la seguente applicazione:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right) \middle| \begin{array}{c} M = M^t \\ A = A^t,\ A \neq 0 \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{c} M \sim M' \\ \Updownarrow \\ M = \lambda M'\ \forall \lambda \neq 0 \end{array} \longrightarrow \{\text{Quadriche}\}$$

Imponiamo le seguenti relazioni di equivalenza:

$$\mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow[f = \left(\begin{array}{c|c} P & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)]{} \mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \qquad Q : \begin{cases} Y^t M Y = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} Q \sim f(Q) \\ \forall f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \end{array}$$

Poniamo $Y = f(X)$, e notiamo che $f^{-1}(Q)$ è univocamente determinato:

$$f^{-1}(Q) = \begin{cases} N^t M N \\ x_{n+1} = 1 \end{cases} \qquad N = \left(\begin{array}{c|c} P & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Su $\mathbb{C}$ è quindi equivalente studiare le equazioni con o senza le relazioni di equivalenza relative alle affinità.

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

Con la solita notazione:

$$\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$X \longrightarrow \left(\frac{X}{1}\right)$$

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \left\{ N = \left(\begin{array}{c|c} P & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \right\}$$

Si noti che:

$$N \in GL(n+1, \mathbb{K}) \iff P \in GL(n, \mathbb{K}),$$

visto che $\det N = \det P$.

Consideriamo ora, sempre in $\mathbb{K}^n$, le equazioni di secondo grado:

$$E_2 = \left\{ M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right) \,\middle|\, A \neq 0 \right\},$$

ove $M \in S(n+1, \mathbb{K})$. Si noti che, per come è costruita, se:

$$M \in S(n+1, \mathbb{K}) \iff A \in S(n, \mathbb{K})$$

Consideriamo la relazione di equivalenza affine $\sim_{aff}$:

$$M \sim_{aff} M' \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0 \ni' M' = \lambda M \quad +$$
$$+ \quad \exists\, N = \left(\begin{smallmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \ni' M' = N^t M N$$

In una forma più compatta:

$$M \sim_{aff} M' \iff M' = \lambda N^t M N, \ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, \ N \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$$

Sia dunque $M \in E_2$. Consideriamo l'equazione associata:

$$q_M(x_1, \dots x_n) = X^t A X + 2B^t X + d$$

Definiamo OMOGENEIZZATO di q_M il seguente polinomio in $(n+1)$ variabili omogeneo di secondo grado:

$$\hat{q}_M(y_1 \dots y_{n+1}) = Y^t M Y$$

Allora:

$$q_M(x_1 \dots x_n) \longrightarrow \hat{q}_M(x_1 \dots x_n, 1)$$

Il luogo di zeri di $\hat{q}_M$ è un cono di centro O.
Il luogo di zeri di q_M è invece una QUADRICA di $\mathbb{K}^n$:

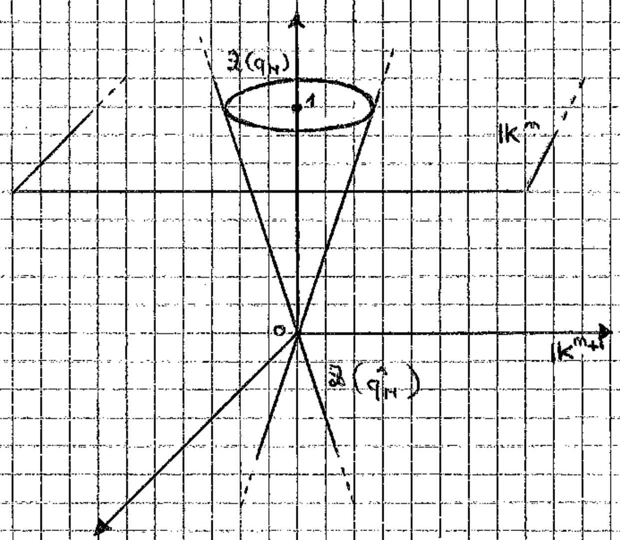
$$\begin{cases} \hat{q}_M(Y) = 0 \\ y_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Essendo $\hat{q}_M$ omogeneo di grado 2:

$$\hat{q}_M(\lambda X) = \lambda^2 \hat{q}_M(X) \quad \forall \lambda \neq 0$$

Allora:

$$\hat{q}_M(X) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \neq 0 : \hat{q}_M(\lambda X) = 0$$



Consideriamo ora:

$$\mathcal{Q} = \{ \text{Quadriche di } \mathbb{K}^n \}$$

Al solito:

$Q \sim_{aff} Q' \Leftrightarrow \exists f \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $Q' = f(Q)$

Sappiamo che:

$$M \sim_{aff} M' \Rightarrow \mathcal{Z}(q_M) \sim_{aff} \mathcal{Z}(q_{M'})$$

Il viceversa, abbiamo visto, dipende dal campo.

Restringiamoci per semplicità al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e al caso $n=2$. In queste condizioni, le quadriche si dicono CONICHE.

Lo schema sarà il solito: cercheremo una serie di invarianti per poi determinare una forma normale per le equazioni a meno di equivalenza affine.

È logico pensare che una parte della ricerca sarà comune per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$; un'altra parte, invece, dipenderà dal campo.

Innanzitutto calcoliamo, dati $\mathcal{A} \in E_n$ e $N \in Aff(\mathbb{K}^n)$, $N^t \mathcal{A} N$:

$$N^t \mathcal{A} N = \left[\begin{array}{c|c} P^t & 0 \\ \hline D^t & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} P & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P^t & 0 \\ \hline D^t & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} AP & AD+B \\ \hline B^t P & B^t D + d \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} P^t A P & P^t A D + P^t B \\ \hline D^t A P + B^t P & D^t A D + D^t B + B^t D + d \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} P^t A P & P^t (AD + B) \\ \hline (D^t A + B^t) P & D^t (AD + B) + B^t D + d \end{array}\right]$$

Allora:

- essendo $N \in Aff(\mathbb{K}^n)$, dunque $N \in GL(n+1, \mathbb{K})$, si ha $N^t \mathcal{A} N \sim_s \mathcal{A}$, dunque $rk\, \mathcal{A}$ è invariante;
- focalizzando l'attenzione su A, si ha $P^t A P \sim_s A$, dunque $rk\, A$ è invariante.

Allora la coppia $(rk\, A, rk\, \mathcal{A})$ è invariante per equivalenza affine. Per forza di cose, ovviamente, $rk\, A \leq rk\, \mathcal{A}$.

Procederemo ora alla determinazione delle forme normali per le equazioni a meno di equivalenza affine, usando ciò che è a nostra disposizione:

- traslazioni;
- moltiplicazioni per scalare;
- azione di sottomatrici congruenti.

Andiamo per gradi. Innanzitutto operiamo una prima distinzione:

- esiste $D \in \mathbb{K}^n \ni' AD + B = 0 \Rightarrow AD = -B$ (sottocaso A CENTRO);
- $\forall D \in \mathbb{K}^n : AD \neq -B$ (sottocaso SENZA CENTRO).

Prima di continuare, notiamo innanzitutto che l'espressione matriciale di una traslazione è:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Notiamo inoltre che decidere se ci troviamo in un caso a centro o senza centro equivale a risolvere un sistema lineare non omogeneo, o meglio a valutarne (mediante ad esempio il Teorema di Rouché-Capelli) la risolubilità.

Perché si parla di sottocasi "a centro" e "senza centro"? In effetti, supponendo che $AD = -B$, si ha:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline D^t & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline D^t & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & AD+B \\ \hline B^t & B^tD+d \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline D^t & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B^t & B^tD+d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D^tA+B^t & B^tD+d \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline (AD+B)^t & B^tD+d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B^tD+d \end{array}\right]$$

In sostanza, l'equazione è del tipo $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right]$. Allora la conica è invariante per la simmetria centrale, visto che presenta solo termini di grado pari. Vi è allora un CENTRO DI SIMMETRIA.

Nella trattazione che segue, può capitare che oggetti differenti vengano denotati con lo stesso nome: ciò non deve trarre in inganno, ma serve per non appesantire la notazione.

D'ora in poi verrà analizzato il SOTTOCASO A CENTRO. Tramite un'opportuna traslazione, dunque:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right] = M \rightsquigarrow M' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right]$$

Analizziamo allora la coppia di invarianti ($\text{rk } A$, $\text{rk } M$).

I casi sono 4:

	$\text{rk } A$	$\text{rk } M$	
1)	2	3	$(d \neq 0)$
2)	2	2	$(d = 0)$
3)	1	2	$(d \neq 0)$
4)	1	1	$(d = 0)$

La rappresentazione matriciale dei quattro casi, a grandi linee, è la seguente:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{rk } A = 2$ $\quad$ $\text{rk } A = 2$ $\quad$ $\text{rk } A = 1$ $\quad$ $\text{rk } A = 1$

Nel primo e nel terzo caso possiamo moltiplicare per d^{-1}, in modo da ottenere:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{rk } A = 2$ $\quad$ $\text{rk } A = 2$ $\quad$ $\text{rk } A = 1$ $\quad$ $\text{rk } A = 1$

Consideriamo ora affinità del tipo $\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, ossia aventi parte traslatoria nulla. Notiamo che:

$$\left[\begin{array}{c|c} P^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} P^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} AP & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P^t A P & 0 \\ \hline 0 & d \end{array}\right]$$

Dovendo trattare circa la ricerca di forme normali mediante congruenza, la casistica è differente a seconda che $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Supponiamo dunque, per ora, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

In questo caso, a seconda che $\text{rk } A = 2$ o $\text{rk } A = 1$, vedendo A come matrice indotta da un prodotto scalare definito o semidefinito positivo, si ha che:

$\exists\, P \in GL(2, \mathbb{K})$ t.c. $P^t A P = \left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & d \end{array}\right]$ o $P^t A P = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & d \end{array}\right]$

Le forme normali nel caso complesso sono allora 4:

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: questo è il caso NON DEGENERE. Si ha:
$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0,$$
da cui la conica risulta un'ELLISSE IMMAGINARIA;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - i x_2)(x_1 + i x_2) = 0,$$
da cui la conica risulta una COPPIA DI RETTE COMPLES= SE INCIDENTI;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 + 1 = 0 \quad (x_1 - i)(x_1 + i) = 0,$$
da cui la conica risulta una COPPIA DI RETTE COMPLES= SE PARALLELE;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 = 0,$$
da cui la conica risulta una RETTA DOPPIA COMPLESSA, ossia una coppia di rette complesse coincidenti.

D'ora in poi, sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
La coppia di invarianti ($\text{rk}\, A$, $\text{rk}\, M$) non è più sufficiente. Introduciamo allora $w(A)$ e $w(M)$, ossia gli indici di Witt di A e M (che sono invarianti). Dunque:

	$\text{rk}\, A$	$\text{rk}\, M$	$w(A)$	$w(M)$
1)	2	3	0	0
2)	2	3	0	1
3)	2	3	1	1
4)	2	2	0	1
5)	2	2	1	2
6)	1	2	1	1
7)	1	2	1	2
8)	1	1	1	2

Le forme normali nel caso reale sono allora 8:

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso si ha:
$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0,$$
da cui si ha che la conica è l'INSIEME VUOTO (essendo un'ellisse immaginaria);

- $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso
$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$
da cui la conica è un' ELLISSE;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$
da cui la conica è un' IPERBOLE. Un'altra formale è:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$
da cui la conica si riduce a un PUNTO (0), essendo una coppia di rette complesse incidenti;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$$
da cui la conica è una COPPIA DI RETTE REALI INCIDENTI;

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso:
$$x_1^2 + 1 = 0,$$
da cui la conica è l' INSIEME VUOTO (essendo una coppia di rette complesse parallele);

- $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$: in questo caso
$$-x_1^2 + 1 = 0 \Rightarrow (1 - x_1)(1 + x_1) = 0$$
da cui la conica è una COPPIA DI RETTE REALI PARALLELE

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso :

$$x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ,$$

da cui la conica si riduce a una RETTA DOPPIA REALE.

Ora in poi studieremo il SOTTOCASO SENZA CENTRO.
Il campo, in questo caso, è indifferente.
Innanzitutto, $\text{rk}\, A = 1$. Infatti $\text{rk}\, A \geq 1$, e $\text{rk}\, A < 2$, visto che altrimenti il sistema lineare non omogeneo $AD = -B$ avrebbe e prima soluzione. Allora, dato $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right]$:

$$\exists \; N = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \; \text{t.c.} \; N^t M N = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & d \end{array}\right], \quad b_2 \neq 0$$

Notiamo ora che $\det(N^t M N) = -b^2 \neq 0$, da cui necessariamente:

$$(\text{rk}\, A, \text{rk}\, M) = (1, 3)$$

Questa è una coppia che nel caso a centro non compare.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)
La conica è senza centro se e solo se $(\text{rk}\, A, \text{rk}\, M) = (1, 3)$.

Con opportune modificazioni, si giunge alla seguente forma canonica:

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$: in questo caso, si ha :

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 ,$$

da cui la conica è una PARABOLA.

OSSERVAZIONE
Il metodo si generalizza per ogni $n \geq 2$: la casistica, però, diviene sempre più complessa.

ESERCIZIO SUGLI SPAZI AFFINI

Ex. Si consideri, nello spazio affine $A^4_{\mathbb{R}} = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ il piano π e la retta r così definiti:

$$\pi = \begin{cases} z + t = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad r = \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Si determinino equazioni cartesiane di una retta s che intersechi sia π che r, e tale che il vettore $v = (1, -1, 0, 1)$ generi la giacitura di s.

Sia $W = \mathrm{Span}(v)$. Allora s è della forma:

$$s = P + W$$

Possiamo usare la notazione parametrica per r:

$$r = \left\{\left(x,\ x - 1,\ -\frac{3}{2}x + 1,\ -\frac{x}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

Dato che $r \cap s \neq \emptyset$, imponiamo $P \in r \cap s$. Dunque:

$$s = \left\{\left(x + y,\ x - y - 1,\ -\frac{3}{2}x + 1,\ -\frac{x}{2} + y\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Imponendo ora che $s \cap \pi \neq \emptyset$, si ha che esiste un punto Q di coordinate:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = -x - y \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2 = +3x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$Q = (6,\ -3,\ -2,\ 3)$$

appartenente a s. Dunque possiamo ora ricavare equazioni cartesiane per s:

$$\begin{cases} z = -2 \\ x + y = 3 \\ x - t = 3 \end{cases}$$

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE A MENO DI ISOMETRIE

Cerchiamo ora di risolvere il problema della classificazione delle coniche a meno di isometrie. Consideriamo allora:

$$Isom(\mathbb{R}^2, d) \subseteq Aff(\mathbb{R}^2)$$

La forma matriciale di un'isometria è la seguente:

$$\left[\begin{array}{c|c} P & \Delta \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \quad P \in O(2, \mathbb{R})$$

Dunque $P^{-1} = P^t$.

Notiamo che, se $N = \left[\begin{array}{c|c} P & \Delta \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \in Isom(\mathbb{R}^2, d)$, allora:

$$(\det P)^{-1} = \det P^{-1} = \det P^t = \det P \Rightarrow \det P = \pm 1$$

Allora ricaviamo due invarianti a meno di isometrie:

$$\det P^t A P = \det P^{-1} A P = \det A$$
$$\det N^t M N = \det M$$

Un'altro invariante è $\operatorname{tr} A$, dato che $P^t A P = P^{-1} A P \sim A$.

Il prodotto per scalare, però, può modificare questi invarianti: in particolare, può cambiare il SEGNO degli invarianti.

Definiamo dunque:

- l'INVARIANTE CUBICO I_3, ossia $\det M$;
- l'INVARIANTE QUADRATICO I_2, ossia $\det A$;
- l'INVARIANTE LINEARE I_1, ossia $\operatorname{tr} A$.

Il nome di ognuno di questi invarianti deriva proprio dal loro comportamento a seguito di una moltiplicazione per scalare. Moltiplicando M per $\rho \in \mathbb{K}$, $\rho \neq 0$, si ottiene:

- $\det M' = \rho^3 \det M$;
- $\det A' = \rho^2 \cdot \det A$;
- $\operatorname{tr} A' = \rho \cdot \operatorname{tr} A$.

In particolare solo il segno di $\det A$ è invariante per moltiplicazione per uno scalare.

Questi tre invarianti, opportunamente impiegati, permettono una classificazione completa delle coniche reali.

Diamo dunque la classificazione completa:

- $I_3 \neq 0 \Rightarrow$ la conica è non degenere:
  - $I_2 = 0 \Rightarrow (rk\,A, rk\,M) = (1, 3) \Rightarrow$ PARABOLA;
  - $I_2 > 0 \Rightarrow$ ELLISSE:
    - $I_1 I_3 < 0 \Rightarrow$ ELLISSE REALE;
    - $I_1 I_3 > 0 \Rightarrow$ ELLISSE IMMAGINARIA ($\emptyset$ in $\mathbb{R}$);
  - $I_2 < 0 \Rightarrow$ IPERBOLE:
    - $I_1 = 0 \Rightarrow$ IPERBOLE EQUILATERA;
    - $I_1 \neq 0 \Rightarrow$ IPERBOLE NON EQUILATERA;
- $I_3 = 0 \Rightarrow$ la conica è degenere:
  - $I_2 = 0 \Rightarrow rk\,A = 1$:
    - $rk\,M = 1 \Rightarrow (rk\,A, rk\,M) = (1, 1) \Rightarrow$ RETTA DOPPIA;
    - $rk\,M = 2 \Rightarrow (rk\,A, rk\,M) = (1, 2)$. Ci sono due casi:
      - COPPIA DI RETTE REALI PARALLELE;
      - COPPIA DI RETTE COMPLESSE PARALLELE ($\emptyset$ in $\mathbb{R}$);
  - $I_2 < 0 \Rightarrow$ RETTE REALI INCIDENTI;
  - $I_2 > 0 \Rightarrow$ RETTE COMPLESSE INCIDENTI (PUNTO (O) in $\mathbb{R}$).

I tre invarianti I_3, I_2, I_1 possono essere utilizzati per determinare la forma normale di una conica a meno di isometrie.

Ex. Studiamo l'equazione:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 3 = 0$$

Non occorrono traslazioni. Infatti l'espressione matriciale è:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 \end{array}\right],$$

da cui capiamo che si tratta di un sottocaso "a centro".
Si ha:

- $I_3 = -150$;
- $I_2 = 50$;
- $I_1 = 15$.

Dunque, essendo $I_1 I_3 < 0$, la conica è un ELLISSE REALE.

La forma normale sarà allora del tipo:

$$N' = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sfruttiamo allora l'invarianza rispetto alla moltiplicazione per scalari delle seguenti espressioni:

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} \qquad \frac{I_2}{I_1^2}$$

Si ha:

- $\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\cancel{\lambda_1 \lambda_2})}{(\cancel{\lambda_1 \lambda_2})} = (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\overset{5}{\cancel{50}} \cdot \overset{1}{\cancel{15}}}{(-\underset{-10}{\cancel{150}})} = -5$;
- $\frac{(\lambda_1 \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} = \frac{(\lambda_1 \lambda_2)}{25} = \frac{\overset{2}{\cancel{50}}}{\underset{9}{\cancel{225}}} = \frac{2}{9} \Rightarrow (\lambda_1 \lambda_2) = \frac{50}{9}$.

Allora:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -5 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{50}{9} \end{cases} \Rightarrow \left(\lambda_1 = -\frac{5}{3},\ \lambda_2 = -\frac{10}{3}\right) \vee \left(\lambda_1 = -\frac{10}{3},\ \lambda_2 = -\frac{5}{3}\right)$$

Allora la forma normale è (sostanzialmente):

$$N'' = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ex. Studiamo l'equazione:

$$4xy + 3y^2 + 2x + 4y = 0$$

La matrice che la rappresenta è:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Effettuiamo una traslazione per riportarci in un caso più semplice. Osserviamo che rk $A = 2$, dunque $AD = -B$ ha a priori soluzione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Dunque:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -\frac{5}{4} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{array}\right]$$

Notiamo che rk $A' = 2$, rk $M' = 3$, $w(A) = 1$, $w(M') = 1$.
Dunque la conica è un'IPERBOLE.

A meno di equivalenza affine allora, la forma normale è:

$$M'' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Volendo invece determinare la forma normale a meno di isometrie, abbiamo:

- $\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)(\cancel{\lambda_1\lambda_2})}{(\cancel{\lambda_1\lambda_2})} = \dfrac{3\cdot(-4)}{5} = -\dfrac{12}{5}$;
- $\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2} = \dfrac{144}{25(\lambda_1\lambda_2)} = -\dfrac{9}{4} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = -\dfrac{144\cdot 4}{9\cdot 25} = -\dfrac{64}{25}$.

Dunque una soluzione è:

$$\lambda_1 = -\frac{16}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{5},$$

donc que la forme normale est :

$$M'' = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{16}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ESERCIZI VARI

Ex. Costruire, se esiste, una trasformazione affine tale che:

$\forall\, i = 0, 1, 2 : f(P_i) = Q_i$,

ove:

- $P_0 = (0, 2)$; $Q_0 = (1, 0, 1)$;
- $P_1 = (1, 3)$; $Q_1 = (3, -1, 1)$;
- $P_2 = (-1, 2)$; $Q_2 = (1, 4, -1)$

In primo luogo:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = (1, 1)$$
$$\overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0 = (-1, 0)$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = Q_1 - Q_0 = (2, -1, 0)$$
$$\overrightarrow{Q_0Q_2} = Q_2 - Q_0 = (0, 4, -2)$$

Notiamo che $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$ sono linearmente indipendenti.

Ora:

$$\forall P \in \mathbb{K}^2 : \begin{cases} P = t_0 P_0 + t_1 P_1 + t_2 P_2 \\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x, y) = t_0(0, 2) + t_1(1, 3) + t_2(-1, 2) \\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{cases} x = t_1 - t_2 \\ y = 2t_0 + 3t_1 + 2t_2 \\ 1 = t_0 + t_1 + t_2 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & x \\ 2 & 3 & 2 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \blacktriangleright \begin{cases} t_1 = y - 2 \\ t_0 = 5 + x - 2y \\ t_2 = -x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = (5 + x - 2y)P_0 + (y-2)P_1 + (y - x - 2)P_2 \\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Ora:

$$f(x, y) = f(P) = (5 + x - 2y)\, f(P_0) + (y - 2)\, f(P_1) + (y - x - 2)\, f(P_2) =$$
$$= (5 + \cancel{x} - 2y + 3y - 6 + y - \cancel{x} - 2,\ -y + 2 + 4y - 4x - 8,\ 5 + x - 2y + \cancel{y} - \cancel{2} + - \cancel{y} + x + \cancel{2}) = (2y - 3,\ -4x + 3y - 6,\ 2x - 2y + 5)$$

Allora:

$$f(X) = AX + B, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, se f è una trasformazione affine:

$$\forall P \in \mathbb{R}^2 : f(P) = f(P_0) + \varphi(P - P_0),$$

dove φ è un'applicazione lineare. In particolare, φ è tale che:

$$\varphi(P_1 - P_0) = Q_1 - Q_0$$
$$\varphi(P_2 - P_0) = Q_2 - Q_0$$

Dunque:

$$\varphi(1,1) = (2,-1,0)$$
$$\varphi(-1,0) = (0,4,-2)$$

Allora:

$$\varphi(e_1) = (0,-4,2)$$
$$\varphi(e_2) = (2,3,-2)$$

Dunque:

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ora:

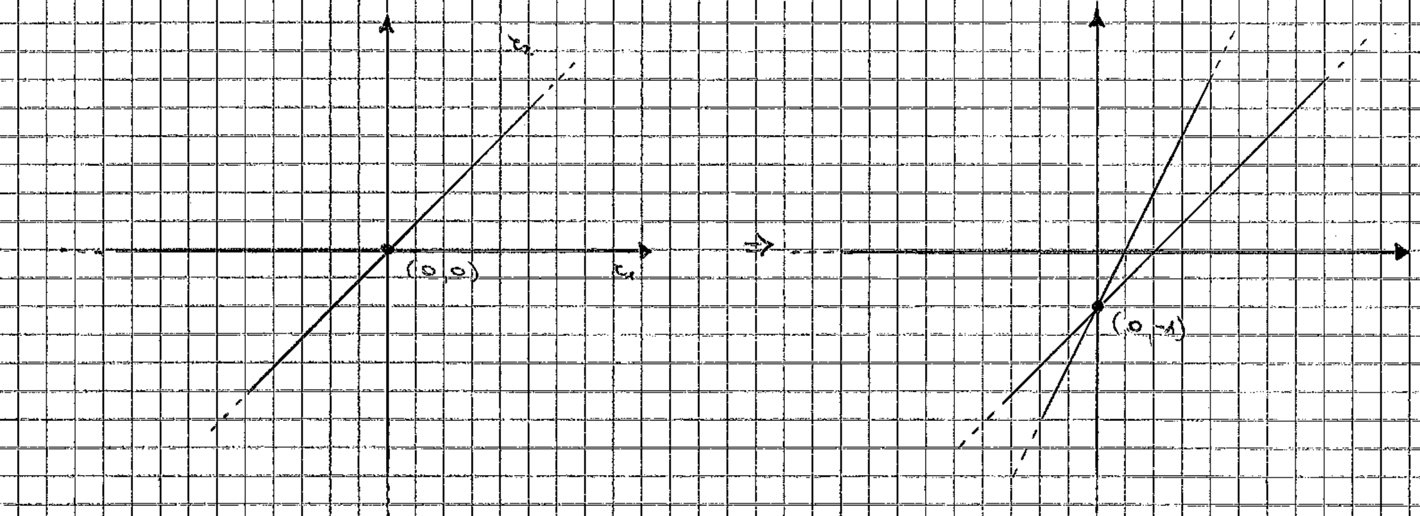
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ex. Costruire, se esiste, una trasformazione affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(r_i) = s_i \quad \forall\, i = \{1, 2\}$, ove:

- $r_1 = \{y = 0\}$; $r_2 = \{x = y\}$
- $s_1 = \{y = x - 1\}$; $s_2 = \{y = 2x - 1\}$



Innanzitutto, necessariamente:

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Impongo, per esempio:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora, ponendo φ parte lineare di f:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = AX + B$$

OSSERVAZIONE

Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'affinità: poniamo $f(X) = AX + B$, con $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$.

Sia r_1 una retta affine:

$$r_1 = \{ P_1 + w \mid w \in W,\ \dim W = 1 \}$$

Notiamo ora che:

$$f(P_1 + w) = A(P_1 + w) + B =$$
$$= Aw + AP_1 + B$$

Questa è una retta affine di giacitura $A(W)$, che passa per il punto $AP_1 + B$. Si noti che $A(W)$ ha dimensione 1, perché $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $\dim W = 1$.

Infine, se $r_1 \parallel r_2$, ossia r_1 e r_2 hanno la stessa giacitura, allora anche $f(r_1) \parallel f(r_2)$, perché hanno la stessa giacitura.

Ex. Siano $H_1 = P_1 + W_1$, $H_2 = P_2 + W_2$ sottospazi affini aventi giaciture W_1 e W_2. Ricordiamo che negli spazi astratti la notazione $P_1 + W_1$ indica i punti di W_1 traslati del vettore P_1:

$$P_1 + W_1 = \tau_{P_1}(W_1)$$

Provare che:

- $H_1 \subseteq H_2 \iff W_1 \subseteq W_2 \wedge P_2 - P_1 \in W_2$;
- $H_1 \cap H_2 = \emptyset \iff P_2 - P_1 \notin W_1 + W_2$.

Riguardo al primo punto:

- $W_1 \subseteq W_2$, $P_2 - P_1 \in W_2 \Rightarrow H_1 = P_1 + W_1 \subseteq$
$\subseteq P_2 - (P_2 - P_1) + W_2 = P_2 + W_2 = H_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$
- $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow P_1 \in H_2 \Rightarrow H_2 = P_1 + W_2$

  Allora:

  - $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow P_1 + W_1 \subseteq P_1 + W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2$;
  - $P_2\ P_1 \in H_2 \Rightarrow P_2 - P_1 \in W_2$.

Riguardo al secondo punto:

- $P_2 - P_1 \in W_1 + W_2 \Rightarrow \exists\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \ \ni\ P_2 - P_1 = w_1 + w_2$.
Allora $P_1 + w_1 = P_2 - w_2$. Dato che $P_1 + w_1 \in H_1$, $P_2 + w_2 \in H_2$ deduciamo che $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.
Per contronominale, allora:
$$H_1 \cap H_2 = \emptyset \Rightarrow P_2 - P_1 \notin W_1 + W_2\ ;$$
- $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ R \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow R = P_1 + w_1,\ w_1 \in W_1$
$R = P_2 + w_2,\ w_2 \in W_2$
Allora $P_1 + w_1 = P_2 + w_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = w_1 - w_2 \in W_1 + W_2$.
Per contronominale, allora:
$$P_2 - P_1 \notin W_1 + W_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \emptyset\ ,\ \text{c.v.d.}$$

Ex. Siano $H_1 = P_1 + W_1$, $H_2 = P_2 + W_2$ dei sottospazi affini.
Sia $W_0 = W_1 + W_2 + \text{Span}(P_2 - P_1)$.
Provare che $H_1 + H_2 = P_1 + W_0$

Innanzitutto:
- $P_1 + W_0 \supseteq H_1$. Infatti:
$W_1 \subseteq W_0 \Rightarrow H_1 = P_1 + W_1 \subseteq P_1 + W_0\ ;$
- $P_1 + W_0 \supseteq H_2$. Infatti:
$P_2 = P_1 + (P_2 - P_1) \in P_1 + W_0$, $P_2 - P_1 \in W_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow H_2 = P_2 + W_2 \subseteq P_1 + (P_2 - P_1) + W_0 = P_1 + W_0$ perché $(P_2 - P_1) \in W_0$.

Allora $P_1 + W_0 \supseteq H_1 + H_2$. Per dimostrare l'uguaglianza, è sufficiente dimostrare che se L è un sottospazio affine tale che $L \supseteq H_1$ e $L \supseteq H_2$, allora $L \supseteq P_1 + W_0$.
Dunque, se $L \supseteq H_1$, allora $P_1 \in L$. Dunque $L = P_1 + W$, ove W è la giacitura di L. Ora:
- $L \supseteq H_1 \Rightarrow P_1 + W \supseteq P_1 + W_1 \Rightarrow W \supseteq W_1\ ;$
- $L \supseteq H_2 \Rightarrow P_2 \in L \Rightarrow L = P_2 + W \Rightarrow P_2 + W \supseteq P_2 + W_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow W \supseteq W_2\ ;$
- $P_1, P_2 \in L \Rightarrow P_2 - P_1 \in W \Rightarrow W \supseteq \text{Span}(P_2 - P_1)$.

Allora $W \supseteq W_0 = W_1 + W_2 + \text{Span}(P_2 - P_1)$. Dunque la tesi:
$$H_1 + H_2 = P_1 + W_0\ ,\ \text{c.v.d.}$$

FORMULA DI GRASSMANN AFFINE

Siano $H_1 = P_1 + W_1$, $H_2 = P_2 + W_2$. Allora:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + k,$$

con $k = 0$ se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, 1 se $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

Dim.

Supponiamo che $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Dunque:

$$\exists\, P \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \begin{array}{l} H_1 = P + W_1 \\ H_2 = P + W_2 \end{array} \Rightarrow H_1 + H_2 = P + (W_1 + W_2)$$

Allora:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) =$$
$$= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Supponiamo ora che $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Allora:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(W_1 + W_2 + \operatorname{Span}(P_2 - P_1)) =$$
$$= \dim(W_1 + W_2) + \dim(\operatorname{Span}(P_2 - P_1)) =$$
$$= \dim(W_1 + W_2) + 1$$

Allora:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1 =$$
$$= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Se due sottospazi affini H_1 e H_2 sono SGHEMBI, ossia

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset \quad , \quad W_1 \cap W_2 = \{0\},$$

allora:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 + 1.$$

ESERCIZI VARI

Ex. Siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$. Allora:

- $A = A^m \ \forall m \geq 1 \iff A$ è semidefinita positiva;
- $A = A^{2m+1} \ \forall m \geq 0$
- $A = B \iff A^m = B^m \ \forall m \geq 2$

Se A è simmetrica, allora:

$$A^2 = A A^t \text{ è semidefinita positiva}$$

Infatti:

$\forall X \in \mathbb{R}^n : X^t A^t A X = (AX)^t AX = \langle AX, AX \rangle \geq 0$, dunque A^2 è semidefinita positiva.

Per il teorema spettrale reale:

$\exists P \in O(n, \mathbb{R}) \ \ni' \ P^t A P = P^{-1} A P = D \in \Delta(n, \mathbb{R})$.

Allora:

$$D^m = (P^t A P)^m = P^t A^m P \Rightarrow D^m = A^m \ \forall m \geq 1$$

Allora, sia $\sigma(A) = (i_+, i_-, i_0)$. Si ha:

$$\sigma(A^2) = (i_+ + i_-, 0, i_0),$$

da cui segue il primo punto:

$$A = A^m \ \forall m \geq 1 \Rightarrow A = A^{2k} \ \forall k \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_-(A) = 0 \Rightarrow A \text{ è semidefinita positiva}$$

$$\sigma(A) = (k, 0, i_0) \Rightarrow \forall m \geq 1 : \sigma(A^m) = (k, 0, i_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots$$

Anche il secondo punto è evidente, visto che gli autovalori conservano il proprio segno se elevati per una potenza dispari:

$$A = A^{2m+1} \ \forall m \geq 1$$

Anche il terzo punto, ora, segue subito: un'implicazione è ovvia; per l'altra, si noti che:

$$A = A^3 = B^3 = B \Rightarrow A = B.$$

Es. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, e sia $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ una base di V^*. Allora esiste Φ prodotto scalare non degenere tale che se v_j è il vettore che Φ-rappresenta f_j, allora $\{v_1 \dots v_n\}$ è una base di V ortogonale per Φ;
- Dato Φ prodotto scalare non degenere, sia F_Φ il seguente isomorfismo:

$$
\begin{aligned}
F_\Phi : \operatorname{End}(V) &\longrightarrow \operatorname{Bil}(V \times V, \mathbb{K}) \\
f &\longrightarrow F_\Phi(f) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \\
&\qquad\qquad (v, w) \longrightarrow \Phi(v, f(w))
\end{aligned}
$$

Siano allora Φ e ψ prodotti scalari non degeneri. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$ tale che $F_\Phi(f) = \psi$. Allora f è ψ-autoaggiunta.
- Siano $A, B, C \in S(n, \mathbb{R})$. In particolare, sia A definita positiva. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ortogonale per $\langle , \rangle_A$, $\langle , \rangle_B$, $\langle , \rangle_C$.

- Consideriamo l'applicazione:

$$
\begin{aligned}
F_\Phi : V &\longrightarrow V^* \\
v &\longrightarrow \Phi_v : V \longrightarrow \mathbb{K} \\
&\qquad\quad w \longrightarrow \Phi(v, w)
\end{aligned}
$$

Se Φ è non degenere, F_Φ è un isomorfismo. Considero allora il passaggio al biduale, e l'isomorfismo canonico:

$$V \longrightarrow V^* \longrightarrow V^{**}$$

Esiste dunque una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $v_i^* = f_i \ \forall i$. Considero allora il seguente prodotto scalare:

$$\Phi \ \text{:} \ M_{\mathcal{B}}(\Phi) = I$$

Si ha, in effetti, ciò che si vuole:

$$\forall v_j \in \mathcal{B} : F_\Phi(v_j)(v_i) = \Phi(v_j, v_i) = \delta_{ij} \ ;$$

$$f_j(v_i) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij} \Rightarrow F_\Phi(v_j) = f_j \quad \forall j = 1 \dots n$$

- L'affermazione è vera. Infatti:
$\forall x, y \in V: \psi(f(x), y) = \phi(f(x), f(y)) =$
$= \phi(f(y), f(x)) = \psi(f(y), x) = \psi(x, f(y))$.

- L'affermazione è falsa.
Supponiamo che $\mathcal{B}$ suddetta esista. Senza perdere di generalità, posso supporla ortonormale per A.
Sia allora $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = N \in O(n, \mathbb{R})$
Si ha:

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\langle , \rangle_B) = D_1 \in D(n, \mathbb{R}) \qquad D_1 = M^t B M$
$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\langle , \rangle_C) = D_2 \in D(n, \mathbb{R}) \qquad D_2 = M^t C M$

Allora:
$BC = M D_1 \cancel{M^t M} D_2 M^t = M D_1 D_2 M^t = M D_2 D_1 M^t = CB$,
ma questo non è detto nelle ipotesi.

Ex. Ridurre a forma canonica la conica di equazione:

$$x^2 + y^2 + 4xy + 8x - 2y - 10 = 0$$

La matrice associata è:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 4 & -1 & -10 \end{array}\right]$$

Ora, diagonalizziamo A:

$\det(A - xI) = (1-x)^2 - 4 = 1 + x^2 - 2x - 4 =$
$= x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

Mediante il procedimento di Lagrange si ha che

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2 - 2e_1\}$$

è una base ortogonale per $\langle , \rangle_A$.
Dunque, notiamo che:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 4 & -1 & -10 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ \hline 4 & -9 & -10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ \hline 4 & -9 & -10 \end{array}\right]$$

Ora operiamo una traslazione, forti del fatto che $rk\, A = 2$, dunque $AX = -B$ ha sicuramente una soluzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -4 & -3 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ \hline 4 & -9 & -10 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -4 & -3 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ \hline 4 & -9 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Non occorre moltiplicare per uno scalare, essendo $d = 1$.
Completiamo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

dunque la conica è un' IPERBOLE.

Ex. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri la conica C_λ di $\mathbb{R}^2$ di equazione:

$$(3+\lambda)\, x^2 + \lambda y^2 + 4xy = \lambda$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui C_λ è rispettivamente:

- vuota;
- affinemente equivalente alla conica di equazione $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x - 8y + 3 = 0$.

Fissato poi $\lambda = -2$, si determini un'affinità di $\mathbb{R}^2$ che trasformi C_{-2} nella sua forma canonica.

La matrice associata a C_λ, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, è:

$$M_\lambda = \left[\begin{array}{cc|c} (3+\lambda) & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right]$$

Calcoliamo $\det M_\lambda$:

$$\det M_\lambda = \left[(3+\lambda)\lambda - 4\right](-\lambda) = (-\lambda)\left[+\lambda^2 + 3\lambda - 4\right] =$$
$$= (-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = (-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-1)$$

Perché C_λ sia vuota:

- $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$. Nel nostro caso, dunque:
$$\begin{cases} \lambda \neq 0, -4, 1 \\ \lambda < -4 \ \vee\ \lambda > 1 \\ -4 < \lambda < -\frac{3}{2} \ \vee\ 0 < \lambda < 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset;$$
- $I_3 = 0$, $I_2 = 0$. Necessariamente $\lambda = -4$ o $\lambda = 1$. Ma in entrambi si hanno rette reali parallele.

Analizziamo ora l'altra conica:

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 \\ \hline 4 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Si ha:

$$\det B = 3(9-16) + (-3+16) + 4(4-12) = -21 + 13 - 32 < 0$$
$$\det A = 9 - 1 = 8 > 0$$
$$\operatorname{tr} A \cdot \det B < 0$$

La conica, allora, è un ELLISSE REALE.

Risolviamo allora il seguente sistema:

$$\begin{cases} \det C_\lambda \neq 0 \\ \det A_\lambda > 0 \\ \operatorname{tr} A_\lambda \cdot \det C_\lambda < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \neq 0, -4, 1 \\ \lambda < -4 \ \vee \ \lambda > 1 \\ \lambda < -4 \ \vee \ -\frac{3}{2} < \lambda < 0 \ \vee \ \lambda > 1 \end{cases}$$

Allora C_λ è affinemente equivalente a B se e solo se:

$$\lambda \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

Fissiamo ora $\lambda = -2$. Consideriamo C_{-2}:

$$C_{-2} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Non occorrono traslazioni.

Effettuiamo il prodotto per lo scalare reale $\frac{1}{2}$:

$$C_{-2}' = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Risulta evidente che la segnatura di A_{-2} sia $(1,1,0)$, da cui la conica risulta un'IPERBOLE. Ora:

$$B = \left\{ \sqrt{2}\, e_1 , \frac{2e_1 - e_2}{\sqrt{3}} \right\}$$

è una base ortogonale normalizzata per $\langle \, , \rangle_{A_{-2}}$.

Dunque:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L'affinità è dunque la seguente:

$$N = \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ex. Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Si dimostri che per ogni sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3, la restrizione di Φ a W è degenere;
- Si dimostri che, se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 e la restrizione di Φ a W è nulla, allora il radicale di Φ è contenuto in W;
- Si dimostri che esistono esattamente due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 su cui la restrizione di Φ è nulla.

- Notiamo immediatamente che $\operatorname{rk} A = 2$. Infatti il minore principale di taglia 2 è invertibile; di contro, le ultime tre colonne sono uguali a meno di una costante reale. Allora $\dim \operatorname{Rad} \Phi = 2$.

Quindi, dato $W \subseteq \mathbb{R}^4$, $\dim W = 3$, si ha:

$$\dim W + \dim \operatorname{Rad} \Phi = 5 > 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim(W \cap \operatorname{Rad} \Phi) > 0$$

Allora $\Phi|_W$ è necessariamente degenere.

- Consideriamo una base di $\operatorname{Rad} \Phi$ estesa a base di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{ 2e_2 - e_3,\ e_3 - e_4,\ e_2,\ e_1 - e_2 \}$$

La matrice associata è:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui è evidente che $\sigma(\Phi) = (1, 1, 2)$.

Si ha allora:

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Rad}\,\Phi \,\hat{\oplus}\, Z,$$

con $\Phi|_Z$ non degenere. Inoltre

$$w(\Phi|_Z) = 1, \quad w(\Phi|_{\mathrm{Rad}\,\Phi}) = 2$$

$$\dim W = 3, \quad w(\Phi|_W) = 3$$

Allora necessariamente:

$\exists\, \mathcal{B}$ di W t.c. $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, $w_1, w_2 \in \mathrm{Rad}\,\Phi$, $w_3 \in Z$, $\Phi(w_3, w_3) = 0$.

Dunque $\mathrm{Rad}\,\Phi \subseteq W$.

- Mediante una scrittura in forma normale di Witt, abbiamo:

$$\mathcal{G} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia ora $v \in Z$, $v = \alpha w_3 + \beta w_4$. Imponiamo che $\Phi(v,v) = 0$. Allora:

$$\Phi(v,v) = \alpha^2 \Phi(w_3, w_3) + \beta^2 \Phi(w_4, w_4) + 2\alpha\beta\, \Phi(w_3, w_4) =$$
$$= 2\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } \beta = 0$$

Necessariamente v è un multiplo di w_3 o di w_4.

Gli unici due sottospazi che soddisfano le richieste sono allora:

$$W_1 = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3) \quad \text{e} \quad W_2 = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_4).$$

Ex. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4. Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo non diagonalizzabile, e tale che i sottospazi $Ker(f - Id)^2$ e $Ker(f + Id)^2$ hanno entrambi dimensione positiva. Si determinino tutte le possibili forme di Jordan di f, specificando i rispettivi polinomi minimi.

Sappiamo che -1, 1 sono autovalori per f. Dunque:

- vi sono altri autovalori. In realtà, dato che f non è diagonalizzabile, vi può essere al massimo un altro autovalore. In tal caso le forme di Jordan sono tre:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

I polinomi minimi sono

- $q_A(x) = (x-1)(x+1)(x-\lambda)^2$;
- $q_B(x) = (x-1)(x+1)^2(x-\lambda)$;
- $q_C(x) = (x-1)^2(x+1)(x-\lambda)$.

- non vi sono altri autovalori. In questo caso, allora, abbiamo sette forme di Jordan:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

I polinomi minimi sono:

- $q_D(x) = (x-1)^3(x+1)$;
- $q_E(x) = (x-1)^2(x+1) = q_F(x)$;
- $q_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$;
- $q_H(x) = (x-1)(x+1)^2 = q_J(x)$;
- $q_K(x) = (x-1)(x+1)^3$.

Ex. Si consideri $\mathbb{R}^5$ come spazio vettoriale reale, e sia $\Phi : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare tale che, per ogni $X = (x_1, \dots, x_5)^t \in \mathbb{R}^5$:

$$\Phi(X, X) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 - \sum_{i=3}^{5} x_i^2$$

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^5$ lo spazio vettoriale generato dai vettori:

$$v_1 = e_1 + e_2 - e_4 \qquad v_2 = e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4$$

Determinare le possibili segnature (i_+, i_-, i_0) dei sottospazi tridimensionali $Z \subseteq \mathbb{R}^5$ tali che $Z \cap W = \{0\}$, esibendo per ogni terna trovata un sottospazio che la realizzi.

Innanzitutto raccogliamo informazioni su Φ e su W:

$$M_{\mathcal{E}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma(\Phi) = (2, 3, 0) \\ \omega(\Phi) = 2 \end{array}$$

$$\Phi(v_1, v_1) = 1 \qquad \Phi(v_2, v_2) = -1 \qquad \Phi(v_1, v_2) = -1$$

$$\sigma(\Phi|_W) = (1, 1, 0)$$

Ex. Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice a coefficienti complessi:

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Si determini la forma di Jordan di A_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e la forma di Jordan di A_λ^n per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $n \geq 2$.

Determiniamo il polinomio caratteristico della matrice:

$$\begin{aligned} P_{A_\lambda}(x) &= (\lambda+1-x)\left((\lambda+1-x)(\lambda-1-x)+1\right) = \\ &= (\lambda+1-x)\left((\lambda-x)^2 - \cancel{1} + \cancel{1}\right) = \\ &= (\lambda+1-x)(\lambda-x)^2 \end{aligned}$$

Inoltre $\dim \operatorname{Ker}(A_\lambda - \lambda \, Id) = 1$, da cui si ha che:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \; J(A_\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Ora, se $\lambda \neq 0, -1$ (in realtà il caso $\lambda = -1$ si può includere in questo caso), si ha che:

$$A_\lambda^n \sim (J(A_\lambda))^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda^n & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^n \end{bmatrix},$$

visto che $\dim \operatorname{Ker}((J(A_\lambda))^n - \lambda^n \, Id) = 1 < 2$.

Se $\lambda = 0$, invece, si ha:

$$J(A_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \forall n \geq 2 \quad J(A_0)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Per ogni numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$, siano:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Siano $W_1 = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, $W_2 = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione di $W_1 \cap W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Analizziamo W_1. La dimensione di questo sottospazio è 2 per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, visto che entrambi i vettori sono non nulli e (evidentemente) linearmente indipendenti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Lo stesso non si può dire di W_2: infatti i vettori sono non nulli e linearmente indipendenti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Nel caso $\lambda = 0$, $v_4 = 0$, da cui $\dim W_2 = 1$.

Se $\lambda \neq 0$, notiamo che $\{v_1, v_2, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \neq 0 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

Nel caso in cui $\lambda = 0$, una base è $\{v_1, v_2, v_3\}$. Infatti:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Dunque, tenuto conto che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\dim(W_1 + W_2) = 3$:

- per ogni $\lambda \neq 0$: $\dim W_1 + \dim W_2 = 4 \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$;
- $\lambda = 0 \Rightarrow \dim W_1 + \dim W_2 = 3 \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$.

ESERCIZI DAL FORTUNATO

13. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice avente un autovalore reale $\alpha \neq 0$ di molteplicità algebrica n. Si dimostri che, per ogni intero $k \geq 1$:

$$A^k \text{ è diagonalizzabile} \iff A \text{ è diagonalizzabile}$$

Sia A diagonalizzabile. Allora:

$\exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ s.t. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \alpha\, \mathrm{Id}$

La matrice $\alpha\, \mathrm{Id}$ è anche la forma di Jordan di A. Dunque:

$\exists\ N \in GL(n, \mathbb{R})$ s.t. $N^{-1} A N = \alpha\, \mathrm{Id}$

Ora, per ogni $k \geq 1$,

$$(N^{-1} A N)^k = N^{-1} A^k N = (\alpha\, \mathrm{Id})^k = \alpha^k\, \mathrm{Id},$$

dunque A^k è diagonalizzabile perché la forma di Jordan è diagonale.

Sia ora A non diagonalizzabile. Allora nella forma di Jordan ci sarà qualche 1 sulla diagonale. Senza perdere di generalità, supponiamo che:

$$J(A) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$$

Elevando al quadrato, e in genere alla k-esima potenza, si ha:

$$B = J(A^k) = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & & 0 \\ & \alpha^k & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \alpha^k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha^k & 1 & & \\ & \alpha^k & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \alpha^k \end{bmatrix},$$

dunque A^k non è diagonalizzabile perché la sua forma di Jordan non è diagonale. Difatti il polinomio caratteristico è $p_B(x) = (\alpha^k - x)^n$, ma la presenza del termine $k\alpha^{k-1} \neq 0$ assicura che $\mu_g(\alpha^k) < \mu_a(\alpha^k)$.

Ciò conclude la dimostrazione.

136. Siano $M, N \in M(n, \mathbb{R})$, e supponiamo che $M^2 = N^2 = I$, e che $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N$. Allora $M \sim N$.

Il fatto che $M^2 = N^2 = I$ ci dice che:

$\exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di $\mathbb{R}^n \ni' M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_M) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right]$

$\exists\ \mathcal{D} = \{w_1 \dots w_n\}$ di $\mathbb{R}^n \ni' M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(g_N) = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-s} \end{array}\right]$

Ora, $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N$, dunque

$$r - (n - r) = s - (n - s)$$
$$2r - \cancel{n} = 2s - \cancel{n}$$
$$r = s$$

Dunque M e N sono simili alla stessa matrice:

$$M \sim \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right] \sim N$$

Per transitività allora $M \sim N$.

137. Siano A e B due matrici reali simmetriche, con A definita positiva e B definita negativa. Dimostrare che $\operatorname{tr}(AB) < 0$.

Muniamo $\mathbb{R}^n$ del prodotto scalare standard $\langle\ ,\ \rangle$. Allora:

$\exists\ P \in O(n, \mathbb{R}) \ni' P^{-1}AP = P^t AP = D_1 \in D(n, \mathbb{R})$

Con questo cambio di base, la matrice B va in B', simile a B. Ora, B' è definita negativa, dunque induce un prodotto scalare definito negativo. Gli elementi nella diagonale, allora, sono tutti negativi. A questo punto notiamo che $\operatorname{tr}(D_1 B') < 0$ perché è una sommatoria di termini strettamente negativi, e inoltre, per concludere:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(M^{-1}ABM) = \operatorname{tr}(M^{-1}AMM^{-1}BM) = \operatorname{tr}(D_1 B')$$

1.5. Sia $M(n,\mathbb{R})$ tale che $M^2 = M$ e $\operatorname{Tr} M = k$. Si dimostri che $k \in [0,n] \cap \mathbb{N}$, e che $\operatorname{rk} M = k$.

Notiamo subito che:

$$\mathbb{R}^n = V_0(M) \oplus V_1(M)$$

Infatti:

$\forall X \in \mathbb{R}^n: \quad X = (X - MX) + MX,$

ora:

- $M(X - MX) = MX - MX = 0 \Rightarrow (X - MX) \in V_0(M)$;
- $M(MX) = MX \Rightarrow (MX) \in V_1(M)$.

Inoltre:

$X \in V_0(M) \cap V_1(M) \Rightarrow MX = X,\ MX = 0 \Rightarrow X = 0.$

Dunque:

$\exists\ \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ t.c. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_M) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

Dato che la traccia è invariante per similitudine, necessariamente $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.
È inoltre evidente, in questo caso, che $\operatorname{rk} M = k$, visto che anche il rango è invariante per similitudine.

2.1. Sia A la matrice triangolare superiore:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & a_{1,2} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}, \quad a_{1,2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n} \neq 0.$$

Dimostrare che:

$$J(A) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$$

Chiaramente $P_A(x) = (\alpha - x)^n$, da cui l'unico autovalore è α, con $\mu_a(\alpha) = n$. Ma, notiamo che:

$$a_{1,2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk}(A - \alpha I) = n - 1 \Rightarrow \mu_g(\alpha) = 1$$

Allora vi è un unico blocco di Jordan, ovvero la tesi.

30. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è:

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con k univocamente determinato.

Notiamo che:

$$V = V_1(f) \oplus V_0(f)$$
$$v = f(v) - f(v) + v,$$

con:

- $f(f(v)) = f(v) \Rightarrow f(v) \in V_1(f)$,
- $f(f(v) - v) = f(v) - f(v) = 0 \Rightarrow f(v) - v \in V_0(f)$.

Inoltre:

$v \in V_1(f) \cap V_0(f) \Rightarrow v = f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

Dunque:

$\exists\ \mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$,

ove $k = rk\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right]$ (e in generale in qualunque base) è univocamente determinato.

Alternativamente, f è radice del polinomio:

$$q(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

Il polinomio minimo di f è della forma:

$$q_f(x) = x^\alpha (x-1)^\beta,$$

con $\alpha, \beta \in [0,1] \cap \mathbb{N}$. In ogni caso l'endomorfismo risulta diagonalizzabile, dunque, in generale:

$\exists\ \mathcal{B}$ di V t.c. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right]$

32. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare su V semidefinito positivo, o negativo. Si dimostri che:

$$V^\perp = \{ v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0 \}$$

L'equivalenza può essere scritta in questo modo:

$$\mathrm{Rad}\ \Phi = I_S\ \Phi,$$

con $I_S\ \Phi = \{ v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0 \}$.

La prima inclusione è ovvia:

$x \in \mathrm{Rad}\ \Phi \Rightarrow \Phi(x, v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow \Phi(x, x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in I_S\ \Phi$

Notiamo ora che:

$\exists\ \mathcal{B}$ di V t.c.:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right],$$

con $V = \mathrm{Rad}\ \Phi \oplus W$, con $\Phi|_W$ anisotropo. In W dunque, non vi sono vettori isotropi. Allora $I_S\ \Phi \subseteq \mathrm{Rad}\ \Phi$, da cui l'uguaglianza.

Equivalentemente, per dimostrare la seconda inclusione, si può ricorrere alla formula di Cauchy-Schwarz:

$\forall v \in V: \quad 0 \leq \Phi(x, v)^2 \leq \Phi(x, x)\, \Phi(v, v)$

$\forall v \in V: \quad 0 \leq \Phi(x, v) \leq 0 \Rightarrow \Phi(x, v) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_S\ \Phi \subseteq \mathrm{Rad}\ \Phi$

26. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, una applicazione lineare. Si dimostri che esiste un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^n$ invariante per f e tale che $0 < \dim W \leq 2$.

Sia $P_f(x) \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio caratteristico di f. Il fatto che $n \geq 1$ ci assicura che $\deg P_f(x) > 0$. Ora, essendo il campo $\mathbb{R}$, il grado massimo dei polinomi irriducibili sarà 2:

$$P_f(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (x-\alpha)^{m_\alpha} \cdot \prod_{\mu \notin \mathbb{R}} \left((x-\mu)(x-\bar{\mu})\right)^{m_\mu} =$$

$$= \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (x-\alpha)^{m_\alpha} \cdot \prod_{\mu \notin \mathbb{R}} \left(x^2 - (\mu+\bar{\mu})x + \mu\bar{\mu}\right)^{m_\mu}$$

In ogni caso, è garantita la presenza di una retta f-invariante, nel caso che $\prod_{\alpha \in \mathbb{R}} (x-\alpha)^{m_\alpha} \neq 1$, o di un piano f-invariante, nel caso che $\prod_{\mu \notin \mathbb{R}} (x^2-(\mu+\bar{\mu})x+\mu\bar{\mu})^{m_\mu} \neq 1$. Il fatto che $\deg P_f(x) > 0$ ci assicura che almeno una retta o un piano f-invariante effettivamente esista.

27. Sia $f: V \to V$ un endomorfismo non nilpotente di uno spazio vettoriale V. Si dimostri che esiste un sottospazio vettoriale $A \neq \{0\}$ di V tale che $f(A) = A$.

Le possibilità sono due:

- esiste un autovalore reale $\lambda \neq 0$. Allora la forma di Jordan di A_f presenterà un blocco relativo all'autovalore λ. Detta $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base che genera tale blocco di Jordan, sicuramente $f(\mathrm{Span}(w_1)) = (\mathrm{Span}\, w_1)$;
- esiste un autovalore complesso $\mu \neq 0$. Allora anche $\bar{\mu}$ è autovalore, e $\mu_a(\bar{\mu}) = \mu_a(\mu)$. Considerando la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo complessificato $f_{\mathbb{C}}$, esistono allora un blocco di Jordan relativo a μ (una base è $\{k_1, \dots, k_h\}$) e uno relativo all'autovalore $\bar{\mu}$ (una base è $\{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_h\}$). Allora:

$$f\left(\mathrm{Span}\left(\frac{k_1+\bar{k}_1}{2}, \frac{k_1-\bar{k}_1}{2i}\right)\right) = \mathrm{Span}\left(\frac{k_1+\bar{k}_1}{2}, \frac{k_1-\bar{k}_1}{2i}\right)$$

23. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$, $\mathrm{rk}\, A = 1$. Dimostrare che:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \mathrm{tr}\, A \neq 0.$$

Se $\mathrm{rk}\, A = 1$, allora la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è fissata: $n-1$.
Consideriamo la forma di Jordan di A:

$$J(A) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \quad 0 \\ \hline 0 & O \end{array}\right]$$

Se $\mathrm{tr}\, A \neq 0$, allora:

$$\mathbb{K}^n = V_0(A) \oplus V_{\mathrm{tr} A}(A),$$

da cui A è diagonalizzabile.
Se $\mathrm{tr}\, A = 0$, allora l'unico endomorfismo nilpotente diagonalizzabile è quello nullo. Ma $\mathrm{rk}\, A = 1$ esclude questa possibilità. Dunque A non è diagonalizzabile.

25. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f: V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = Id$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto al quale la matrice associata ad f è:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right],$$

con k univocamente determinato.

Ammettiamo che una base del genere esista. Allora, essendo la traccia invariante per similitudine, si ha:

$$\mathrm{tr}\, A = k + (k-n) = 2k - n$$

$$k = \frac{\mathrm{tr}\, A + n}{2},$$

da cui si evince che k è univocamente determinato.
Ora, f è radice di $q(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, da cui si evince che f è diagonalizzabile, e ha solamente gli autovalori 1 e -1. Si ha la tesi.

33. Sia $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare nilpotente. Allora $g^n = 0$.

Se g è nilpotente, allora $p_f(x) = \pm x^n$, essendo l'unico autovalore 0. E dato che sicuramente

$$p_f(f) = 0,$$

risulta $g^n = 0$.

41. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un sottospazio vettoriale π di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $f(\pi) \subseteq \pi$.

I casi sono sostanzialmente 2:

- $p_f(x)$ ha una radice reale e due complesse coniugate (chiaramente le tre radici sono a due a due diverse tra loro). Allora:

$$J(f) = \mu \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\mu} & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

da cui è evidente che $\mathrm{Span}(v_2, v_3) \supseteq f(\mathrm{Span}(v_2, v_3))$;

- $p_f(x)$ ha solo radici reali. Allora esiste una base a bandiera per f, da cui sicuramente:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) \supseteq f(\mathrm{Span}(v_1, v_2)).$$

66. Sia V uno spazio vettoriale, U e W due sottospazi vettoriali di V di dimensione n e m rispettivamente, tali che $V = U \oplus W$. Siano:

$$\mathcal{F}_1 = \{ f \in \mathrm{Hom}(V, V) \mid f(U) \subseteq W \wedge f(W) \subseteq U \}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{ f \in \mathrm{Hom}(V, V) \mid f(U) \subseteq U \wedge f(W) \subseteq W \}$$

Calcolare $\dim \mathcal{F}_1$ e $\dim \mathcal{F}_2$, e dimostrare che $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Sia $\mathcal{B} = \{ u_1 \dots u_n, w_1 \dots w_m \}$ una base di V formata dall'unione di una base di U e una di W.

Allora:

$$f \in \mathcal{F}_1 \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array}\right]$$

$$g \in \mathcal{F}_2 \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$

Dunque $\dim \mathcal{F}_1 = 2mn$, $\dim \mathcal{F}_2 = m^2 + n^2$.
Contando che $\dim \operatorname{End}(V) = \dim \operatorname{Hom}(V,V) = (n+m)^2 =$
$= m^2 + 2mn + n^2 = \dim \mathcal{F}_1 + \dim \mathcal{F}_2$, se dimostriamo che $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$, allora si avrà $\dim(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) = \dim \operatorname{End}(V)$, $(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) \subseteq \operatorname{End}(V)$, da cui $\operatorname{Hom}(V,V) = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Sia dunque $h \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Allora $h(U) \subseteq W \cap U$ e $h(W) \subseteq W \cap U$. Ma $W \cap U = \{0\}$, visto che i due sottospazi sono in somma diretta. Allora $h(U) = \{0\}$ e $h(W) = \{0\}$, da cui $h(U+W) = h(V) = \{0\}$. Dunque $h = 0$, e ciò conclude l'esercizio.

Studiamo ora lo stesso problema nel caso $V = U + W$, $U \cap W = Z$, $\dim Z = k > 0$. Sia $\dim U = n$, $\dim W = m$. Sia $\mathcal{G} = \{z_1 \dots z_k\}$ una base di $Z = U \cap W$. Estendendola a destra, a base di W, a sinistra, a base di U, otteniamo:

$$\mathcal{B} = \{u_1 \dots u_{n-k}, z_1 \dots z_k, w_1 \dots w_{m-k}\}$$

Si ha:

$$f \in \mathcal{F}_1 \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & * & * \\ * & * & * \\ \hline * & * & 0 \end{array}\right]$$

$$f \in \mathcal{F}_2 \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & * \\ \hline 0 & * & * \end{array}\right]$$

Dunque:
- $\dim \mathcal{F}_1 = 2mn - k^2$;
- $\dim \mathcal{F}_2 = m^2 + n^2 - k^2$.

55. Siano $A, B \in M(2, \mathbb{C})$. Si dimostri che:

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} A \text{ e } B \text{ hanno gli stessi autovalori} \\ \text{e per ciascuno di essi si ha} \\ \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(B) \end{array}$$

Si dimostri poi che il ragionamento può essere esteso a $A, B \in M(3, \mathbb{C})$, e che si può in ogni caso sostituire $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}$. È ancora vera la coimplicazione nel caso $A, B \in M(4, \mathbb{C})$?

In tutti i casi, e con qualsiasi campo l'implicazione $(\Rightarrow)$ è ovvia.
Studiamo dunque l'implicazione opposta. Siano $A, B \in M(2, \mathbb{C})$. Se esse hanno autovalori distinti μ, η complessi, allora sono entrambe simili alla matrice:

$$J = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$$

dunque $A \sim B$. Discorso simile nel caso $A, B \in M(2, \mathbb{R})$: se A e B hanno autovalori reali distinti o complessi coniugati (distinti), allora sono simili. Nel primo caso, si ha $A \sim J \sim B \Rightarrow A \sim B$ anche in $\mathbb{R}$; nel secondo caso, la similitudine si dimostra complessificando il tutto.
Nel caso in cui gli autovalori di A siano ridotti ad un unico valore λ, le forme di Jordan possibili sono:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

e la forma di Jordan è univocamente determinata da $\dim V_\lambda(A)$ (se è 2, allora J_1, se è 1, allora J_2).
Discorso analogo nel caso reale.
Dunque la coimplicazione sussiste per qualsiasi campo, se la taglia delle matrici è 2.

Siano ora $A, B \in M(3, \mathbb{C})$. Se gli autovalori di A sono tutti distinti, allora A e B sono diagonalizzabili: e sappiamo che, per matrici diagonalizzabili aventi autovalori tutti di molteplicità algebrica e geometrica 1, l'uguaglianza degli autovalori è un

invariante completo per similitudine. Discorso analogo nel caso reale, qualora A presenti tre autovalori reali distinti o uno reale e due complessi coniugati.
Qualora C presenti due autovalori uguali tra loro (in $\mathbb{R}$ ci ritroviamo già nel caso in cui A e B siano triangolabili) allora le forme di Jordan possibili sono ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$):

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad e \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

mentre se l'autovalore è unico, allora si hanno le seguenti tre possibilità:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad e \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad e \quad J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

In ogni caso, la conoscenza degli autovalori e $\dim V_\lambda(A)$ determina univocamente la forma di Jordan.
Dunque la semplificazione vale anche nel caso in cui le matrici (complesse o reali) siano di taglia 3.

Se $A, B \in M(4, \mathbb{C})$ la semplificazione non vale più, e il controesempio è anche facile da fornire:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Sia per A che per B si ha $Sp\, f = \{\lambda\}$, $\dim V_\lambda(f) = 2$.
Ma A e B, già in forma normale di Jordan, non sono identiche, quindi non sono simili.

141. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = \mathrm{Id}$.

- Esiste su V un prodotto scalare definito positivo rispetto al quale f è autoaggiunta?
- È vero che f risulta autoaggiunta rispetto ad un qualsiasi prodotto scalare su V definito positivo?

Partiamo subito con una considerazione: fissato il prodotto scalare standard, una matrice è autoaggiunta se e solo se è simmetrica. Infatti:

$$A^* = I \cdot A^t \cdot I = A^t = A \Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow A \in S(n, \mathbb{R})$$

Sia dunque $B = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V tale che:

$$G = M_B^B(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right]$$

Notiamo che G è simmetrica. Dunque il prodotto scalare tale che B è ortonormale è definito positivo, ed è tale che f è autoaggiunta.

In generale non è vero che f è autoaggiunta per ogni prodotto scalare. Per fornire un controesempio, consideriamo la seguente matrice, rappresentante un'involuzione.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Determiniamone una simile che non è simmetrica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \tilde{G}$$

La nuova matrice non è simmetrica, e rappresenta un'involuzione secondo una base B. Il prodotto scalare tale che $M_B(\phi) = I$ è definito positivo ed è tale che $\tilde{G}$ non è autoaggiunta.

46. Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$. Si dimostri che $v\,w^t$ è simmetrica se e solo se v e w sono linearmente indipendenti.

Siano v e w linearmente dipendenti. Allora $w = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dunque:

$\forall\, a_{ij} \in M = v\,w^t : \ a_{ij} = v_i w_j = v_i(\lambda v_j) = (\lambda v_i) v_j =$
$= v_j(\lambda v_i) = a_{ji} \Rightarrow M \in S(n, \mathbb{R})$.

Viceversa, sia $M \in S(n, \mathbb{R})$. Allora

$$v\,w^t = w\,v^t \Rightarrow v\,w^t - w\,v^t = 0$$

Se $v = 0$, allora $v = 0 \cdot w$, dunque v e w sono linearmente indipendenti. Altrimenti:

$$v\,w^t v - w\,v^t v = 0$$
$$v \langle w, v \rangle - w \|v\|^2 = 0$$

Ora, $\|v\|^2 \neq 0$ perché $v \neq 0$. Allora la combinazione lineare di 0 citata sopra comprova la lineare dipendenza di v e w.

50. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = \mathrm{Id}$. Si supponga che esistano due sottospazi vettoriali H e K di V tali che $V = H \oplus K$, $f(H) \subseteq K$, $f(K) \subseteq H$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è del tipo:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right]$$

Innanzitutto, notiamo che n è univocamente determinato. Sia $n = \dim H$. Allora, ricordando che f è un isomorfismo, si ha:

$$\dim H = \dim f(H) \leq \dim K = \dim f(K) \leq \dim H$$
$$\dim H = \dim K = n$$
$$\dim V = 2n$$

Sia ora $\{h_1 \ldots h_m\}$ una base di H. Allora $\{k_1 \ldots k_m\} = \{f(h_1) \ldots f(h_m)\}$ è una base di K. In più:

$$\{f(f(h_1)) \ldots f(f(h_m))\} = \{h_1 \ldots h_m\}$$

Allora, detta $\mathcal{B} = \{h_1 \ldots h_m, k_1 \ldots k_m\} = \{h_1 \ldots h_m, f(h_1) \ldots f(h_m)\}$ si ha:

$$G = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right]$$

28. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f: V \to V$ una applicazione lineare diagonalizzabile. Sia $W \leq V$ un sottospazio invariante per f, ossia $f(W) \subseteq W$.

- Dire se esiste un supplementare U per W ($V = W \oplus U$) che sia invariante per f.
- $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile?

Dimostriamo prima che $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile. La dimostrazione è semplice:

$f \in Diag(V) \Rightarrow q_f(x)$ è libero da quadrati $\Rightarrow$
$q_{f|_W}(x) \mid q_f(x)$ è libero da quadrati $\Rightarrow f|_W \in Diag(W)$

Sia dunque $\mathcal{B} = \{w_1 \ldots w_k\}$ una base di autovettori per f di W. Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \ldots v_m\}$ una base di autovettori di V. Allora $\mathcal{G} = \{w_1 \ldots w_k, v_1 \ldots v_m\}$ è un sistema di generatori di V, da cui può essere estratta una base $\mathcal{G}' = \{w_1 \ldots w_k, v_{j_1} \ldots v_{j_h}\}$ di autovettori per f di V. Dunque $U = Span(v_{j_1} \ldots v_{j_h})$ è tale che $V = W \oplus U$, ed è f-invariante perché somma diretta di spazi f-invarianti di dimensione 1.

Alternativamente sia $\mathcal{B} = \{w_1 \ldots w_k, v_1 \ldots v_h\}$ una base di autovettori di W per f estesa a una base di autovettori di V per f. Allora la matrice associata a f nella base $\mathcal{B}$ è autoaggiunta perché simmetrica (è diagonale), dunque (una volta munito V di un prodotto scalare tale che $\mathcal{B}$ risulta ortonormale), si ha che $W^\perp$ è f-invariante, e $V = W \hat{\oplus} W^\perp$.

[illegible]. Sia V uno spazio vettoriale e siano A, B due sottospazi vettoriali di V tali che $V = A \oplus B$. Se $f : A \to A$ e $g : B \to B$, si consideri l'applicazione lineare $L : V \to V$ definita da $L(v) = f(a) + g(b)$, dove $v = a + b$, con $a \in A$, $b \in B$. Dimostrare che:

$$L \text{ è diagonalizzabile} \Leftrightarrow f, g \text{ sono diagonalizzabili.}$$

Siano f, g diagonalizzabili. Siano allora le seguenti una base di autovettori per f di A e una base di autovettori per g di B:

$$\mathcal{B} = \{a_1 \dots a_k\} \qquad , \qquad \mathcal{D} = \{b_1 \dots b_h\}$$

allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{D} = \mathcal{G}$ è una base di autovettori per L di V, visto che $L|_A = f$ e $L|_B = g$, e visto che $V = A \oplus B$.

Viceversa, sia L diagonalizzabile. Sia $\mathcal{D} = \{v_1 \dots v_m\}$ una base di autovettori per L di V. Dato che $V = A \oplus B$:
$\forall\, i = 1 \dots m \;\; \exists!\, a_i \in A, b_i \in B \;\ni'\; v_i = a_i + b_i$

Otteniamo dunque due liste di autovettori per A e per B, visto che:

$$L(v_i) = f(a_i) + g(b_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a_i) = \lambda_i a_i \;\wedge\; g(b_i) = \lambda_i b_i$$

Consideriamo le due funzioni proiettive seguenti:

$$\pi_A : V \longrightarrow A \qquad\qquad \pi_B : V \longrightarrow B$$
$$v_i \longrightarrow a_i \qquad\qquad v_i \longrightarrow b_i$$

Dato che $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_m) = V$, allora:

$$\mathrm{Span}(a_1 \dots a_m) = \pi_A(V) = A \;,\; \mathrm{Span}(b_1 \dots b_m) = \pi_B(V) = B$$

Dunque dalle liste di generatori $\mathcal{A} = \{a_1 \dots a_m\}$ e $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_m\}$ posso estrarre due basi formate da autovettori per f e g rispettivamente: $\tilde{\mathcal{A}} = \{a_{j_1} \dots a_{j_k}\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{b_{e_1}, \dots b_{e_h}\}$.

Dunque $f : A \to A$ e $g : B \to B$ sono diagonalizzabili.

20. Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ una matrice tale che $\operatorname{rk} A = r$.
Fissato $k \in \mathbb{N}$, sia:

$$S = \{ X \in M(n, k, \mathbb{K}) \mid AX = 0 \}$$

Si dimostri che S è uno spazio vettoriale (con le usuali operazioni sulle matrici) e se ne calcoli la dimensione.

S è uno spazio vettoriale, infatti:

- $0 \in S$, visto che $A \cdot 0 = 0$;
- $B, C \in S \Rightarrow A(B+C) = AB + AC = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (B+C) \in S$;
- $B \in S \Rightarrow A(\lambda B) = \lambda A \cdot B = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow (\lambda B) \in S$.

Riguardo la dimensione, essendo $\operatorname{rk} A = r$:
$\exists\ \mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{K}^m$ t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(A) = J$, ove:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline & & & \end{array} \quad 0 \right]$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $X \in S$, allora, è che le prime r righe siano nulle.

$$S = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline * \end{array}\right]$$

Dunque $\dim S = k(n - r)$.

56. Siano U, V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con $\dim U = k$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, e sia $g : U \to V$ una fissata applicazione lineare di rango r. Dimostrare che l'insieme:

$$\mathcal{F} = \{ f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid f \circ g = 0 \}$$

è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V, W)$, e calcolarne la dimensione.

Le verifiche sono del tutto semplici:

- $0 \circ g = 0 \Rightarrow 0 \in \mathcal{F}$;
- $f, h \in \mathcal{F} \Rightarrow f \circ g = h \circ g = 0 \Rightarrow f \circ g + h \circ g = (f + h) \circ g = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow f + h \in \mathcal{F}$;
- $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f \circ g = 0 \Rightarrow \lambda\, f \circ g = (\lambda f) \circ g = 0 \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{F}$

Ora, affinché $f \circ g = 0$, necessariamente $\operatorname{Imm} g \subseteq \operatorname{Ker} f$.
Dunque $\dim \operatorname{Ker} f = r$.

Allora, presa una base $\mathcal{K} = \{k_1 \dots k_r\}$ di $\operatorname{Ker} f$ estesa a base $\mathcal{B} = \{k_1 \dots k_r, v_{r+1} \dots v_n\}$ di W, e presa una base qualsiasi di W, sia essa $\mathcal{D}$, si ha:

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \end{array}\right]$$

Allora $\dim \mathcal{F} = (n - r)\, n$.

3. Sia $M \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore tale che $[M]_{i,i} = 1$ per ogni $i = 1 \dots n$. Si dimostri che, se esiste un intero $k \geq 1$ tale che $M^k = I$, allora $M = I$.

Sia M così fatta:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & * \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Più precisamente, sia $a = [M]_{j,j+1}$ per qualche $j = 1, \dots, n-1$. Dimostriamo che $[M^k]_{j,j+1} = k \cdot a$, facendo uso del principio di induzione. La proposizione è vera per $k = 1$. Ora:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ddots & & * \\ & \ddots & k \cdot a & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ddots & * \\ & \ddots & a \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ddots & * \\ & \ddots & h \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ove $h = [M^k]_{j,j} \cdot [M]_{j,j+1} + [M^k]_{j,j+1} \cdot [M]_{j+1,j+1} = 1 \cdot a + k\, a \cdot 1 =$
$= (k+1)\, a$.

Dunque necessariamente la "sopradiagonale" deve essere nulla.

Si può iterare il procedimento valutando via via la prima sovradiagonale che a priori non è nota. In generale, si avrà sempre lo stesso fenomeno:

$$[M^k]_{j,j} \cdot [M]_{j,j+1} + [M^k]_{j,j+1} \cdot [M]_{j+1,j+1} = (k+1)\, a$$

Se dunque $M^k = I$ per qualche k, allora $M = I$.

Alternativamente:

$$(M^k - I) = 0 = (M - I)(M^{k-1} + M^{k-2} + \dots + M + I)$$

La matrice $(M^{k-1} + \dots + I)$ presenta sulla diagonale principale tutti termini uguali a $k \neq 0$, ed è triangolare superiore. Dunque è invertibile. Allora $M - I = 0$, ossia $M = I$.

1. Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo K e siano $f: V \to W$ e $g: V \to Z$ applicazioni lineari. Si dimostri che:

$$\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow \exists\, L: W \to Z \text{ lineare tale che } g = L \circ f$$

Se suddetta funzione esiste, allora:
$\forall x \in \mathrm{Ker}\, f: \; g(x) = (L \circ f)(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, g$.
Allora $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$.
Se invece vale $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$, sia:

$$B = \{f_1 \dots f_k, v_1 \dots v_m\}$$

una base di $\mathrm{Ker}\, f$ estesa a base di V.
Dato che $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$, allora i vettori $f(v_1) \dots f(v_m)$ sono una base di $\mathrm{Im}\, f$, che può essere estesa a base B' di W:

$$B' = \{f(v_1) \dots f(v_m), w_1 \dots w_n\}$$

Imponendo ora $L(f(v_i)) = g(v_i)$ $\forall i = 1 \dots m$, $L(w_i) = g(w_i)$ (a piacere) per ogni $i = 1 \dots n$, si ha che $g = L \circ f$, e L è lineare.

1. Si consideri la seguente successione di spazi vettoriali ed applicazioni lineari:

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0,$$

e si supponga che per ogni $i = 0 \dots n-1$ si abbia $\mathrm{Imm}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$. Si dimostri che

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$$

Si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\dim V_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\dim \mathrm{Ker}\, f_i + \dim \mathrm{Imm}\, f_i) =$$

$$= -\dim \mathrm{Ker}\, f_1 \pm \dim \mathrm{Imm}\, f_n = -\dim \mathrm{Imm}\, f_0 \pm \dim \mathrm{Imm}\, f_n =$$

$= -0 \pm 0 = 0$, come volevasi dimostrare.

2. Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ una matrice di rango r. Si dimostri che ogni minore B di A ottenuto scegliendo r righe linearmente indipendenti di A e r colonne linearmente indipendenti di A è invertibile. Si dimostri poi che il rango di una matrice simmetrica M coincide con il massimo degli ordini dei minori invertibili di M aventi la diagonale nella diagonale di M.

Riordiniamo la matrice in modo tale da avere la seguente situazione:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & \end{array}\right]$$

Consideriamo:

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} B & \end{array}\right]$$

Certamente $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, \hat{A} = r$, visto che le righe di A che non concorrevano a formare B erano sicuramente linearmente dipendenti con le rimanenti, dato che per ipotesi:

$$\dim \mathrm{Imm}\, A = r = \dim \mathrm{Span}(R_1 \dots R_r)$$

Ora, per ipotesi $\dim \mathrm{Span}(C_1 \dots C_r) = r$, dunque $C_1 \dots C_r$ sono un sistema di generatori (o meglio una base) dello spazio generato dalle colonne di A. Allora anche $\hat{C}_1 \dots \hat{C}_r$ è un sistema di generatori dello spazio generato dalle colonne di $\hat{A}$, ed essendo esattamente r, dato che $rk\,\hat{A} = r$, ne sono una base. Dunque in particolare sono linearmente indipendenti. Allora B, formata da colonne linearmente indipendenti, ha rango massimo r, dunque è invertibile.

La restrizione alle matrici simmetriche è ora di facile studio. I minori aventi la diagonale sulla diagonale di $A \in S(n, \mathbb{R})$ sono, per costruzione, quelli formati in questo modo:

$$B = (R_1 \dots R_r \mid C_1 \dots C_r)$$

$$\forall i = 1 \dots r : R_i^t = C_i ,$$

ossia dove righe e colonne sono "sostanzialmente" le stesse (a meno di trasposizione).

Sia dunque $r = rk\,A$, p il massimo degli ordini dei minori invertibili costruiti in questo modo. È ovvio che $p \le r$. Viceversa, scegliendo r righe linearmente indipendenti e le r colonne associate alle righe, si ottiene un minore $B \in S(r, \mathbb{R})$ invertibile, per il punto 1. Allora $p \ge r$, da cui $p = r$.

5. Si determinino tutte le matrici $A \in M(n, \mathbb{K})$ tali che per ogni matrice $B \in M(n, \mathbb{K})$: $AB = BA$.

Sia $B = E_{ij}$ la matrice avente tutti 0, tranne un 1 in posizione i, j. Sia $i \ne j$. Presa $A = E_{i,i}$, si ha:

$$E_{i,j} \cdot E_{i,i} \ne E_{i,i} \cdot E_{i,j}$$

$$0 \ne E_{i,j}$$

Dunque $B \in \mathcal{D}(n, \mathbb{R})$

Sia dunque:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \ne \lambda_j \quad \forall i \ne j$$

Sia, ad esempio, $\lambda_1 = B_{1,1}$, $\lambda_j = B_{i,i}$. Consideriamo allora $A = E_{1,i}$. Si ha:

$$B \cdot E_{1,i} = E_{1,i} \cdot B$$
$$\lambda_1 \cdot E_{1,i} = \lambda_j \cdot E_{1,i},$$

da cui $\lambda_1 = \lambda_j$.

Allora $B = \lambda\,\mathrm{Id}$ per $\lambda \in \mathbb{K}$.

Osserviamo ora che queste matrici commutano con tutte le matrici:

$$\lambda\,\mathrm{Id} \cdot A = A \cdot \lambda\,\mathrm{Id}$$
$$\lambda\,\mathrm{Id} \cdot A = \lambda \cdot A \cdot \mathrm{Id}$$
$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot A$$

Dunque, denotato con E questo insieme:

$$E = \{X \in M(n, \mathbb{K}) \mid X = \lambda\,\mathrm{Id},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

6. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right],$$

con $A \in M(n, \mathbb{K})$, $B \in M(m, \mathbb{K})$, $C \in M(n, m, \mathbb{K})$.

Innanzitutto:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline O & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

$$\det M = \det B \cdot \det A$$

Vien dunque da pensare che:

$$P_M(x) = P_A(x) \cdot P_B(x)$$

In effetti:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A - x\,\mathrm{Id} & C \\ \hline O & B - x\,\mathrm{Id} \end{array}\right] = \det(A - x\,\mathrm{Id}) \cdot \det(B - x\,\mathrm{Id}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_M(x) = P_A(x) \cdot P_B(x).$$

7. Siano V, W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, $\dim W = m$. Siano $V_1 \subseteq V$, $W_1 \subseteq W$ sottospazi vettoriali di dimensione n_1 e m_1 rispettivamente. Si consideri l'insieme:

$$\mathcal{F} = \{ f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \ker f \supseteq V_1 \wedge \operatorname{Im} f \subseteq W_1 \}$$

Si dimostri che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V,W)$ e se ne calcoli la dimensione.

Verifichiamo che $\mathcal{F}$ sia uno spazio vettoriale:

- banalmente $0 \in \mathcal{F}$;
- $a, b \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall v \in V_1 : a(v) + b(v) = 0 + 0 = 0$;
  $\forall v \in V : (a+b)(v) = w_1 + w_2 = w \in V_2 \Rightarrow (a+b) \in \mathcal{F}$;
- $a \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall v \in V_1 : (\lambda a)(v) = \lambda \cdot a(v) = \lambda \cdot 0 = 0$,
  $\forall v \in V : (\lambda a)(v) = \lambda \cdot a(v) = \lambda \cdot w_1 \in V_2 \Rightarrow (\lambda a) \in \mathcal{F}$.

Sia ora $\mathcal{B} = \{v_1', \dots, v_{n_1}', v_{n_1+1}, \dots, v_n\}$ una base di V_1 estesa a base di V. Sia $\mathcal{D} = \{w_1', \dots, w_{m_1}', w_{m_1+1}, \dots, w_m\}$ una base di W_1 estesa a base di W. Allora, per ogni $f \in \mathcal{F}$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dunque $\dim \mathcal{F} = m_1 (n - n_1)$.

8. Sia V uno spazio vettoriale reale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Dire se esistono due funzionali $f, g \in V^*$ tali che $b(v,w) = f(v)\, g(w) \quad \forall v, w \in V$.

La matrice associata alla forma bilineare, in caso affermativo, sarebbe:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{bmatrix} f(v_1)\,g(v_1) & \dots & f(v_1)\,g(v_n) \\ \vdots & * & \vdots \\ f(v_n)\,g(v_1) & \dots & f(v_n)\,g(v_n) \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha sempre rango 1. Dato che a priori il rango della forma bilineare può essere anche strettamente maggiore di 1, concludiamo che tali funzionali non esistono, per lo meno non sistematicamente.

9. Costruire, se esiste, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^8 \to M(3,\mathbb{R})$ tale che $\operatorname{Imm} f \supseteq \{ A \in M(3,\mathbb{R}) \mid \operatorname{rk} A = 2 \}$

Sfruttiamo la nozione di spazio vettoriale applicata a $\operatorname{Imm} f$ per dimostrare che $\operatorname{Imm} f$, in teoria, dovrebbe essere $M(3,\mathbb{R})$, avente dimensione 9, dunque per dimostrare, tramite la formula delle dimensioni, che tale applicazione lineare non può esistere.

Sia $A \in GL(3,\mathbb{R})$. Allora $A = (C_1, C_2, C_3)$, con C_1, C_2 e C_3 linearmente indipendenti. Ma $A = B + C$, $B = (C_1, \frac{1}{2} C_2, 0)$, $C = (0, \frac{1}{2} C_2, C_3)$, ove $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} C = 2$. Dunque le matrici di rango 3 sono incluse in $\operatorname{Imm} f$.

Sia ora B una matrice di rango 2. Moltiplicandola per lo scalare $0 \in \mathbb{R}$ otteniamo la matrice nulla, che quindi appartiene a $\operatorname{Imm} f$.

Sia ora A una matrice di rango 1: $A = (C_1, \ldots)$. Supponiamo $C_1 \neq 0$: gli altri casi sono analoghi. Siano C_2, C_3 colonne linearmente indipendenti con C_1 e tra loro. Allora:

$$A = \left[C_1 \,\middle|\, \lambda_1 C_1 + C_2 \,\middle|\, \lambda_2 C_1 + C_3 \right] - \left[0 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, C_3 \right],$$

dunque le matrici di rango 1 appartengono a $\operatorname{Imm} f$. Allora $\dim \operatorname{Imm} f = 9$, essendo $\operatorname{Imm} f = M(3,\mathbb{R})$. Dunque tale applicazione lineare non può esistere.

12. Si consideri l'applicazione:

$$\langle\,,\,\rangle : M(m,m,\mathbb{R}) \times M(m,m,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle\,,\,\rangle : (A,B) \to tr(A^t B)$$

Si dimostri che $\langle\,,\,\rangle$ è un prodotto scalare definito positivo. Nel particolare caso in cui $n = m$, si determini l'ortogonale del sottospazio $S(n,\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche.

Dimostriamo solo che $\langle\,,\,\rangle$ è definito positivo.

$\forall A \in M(m,m,\mathbb{R})$: $\langle A, A \rangle = tr(A^t A) =$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a^2_{ij} \geq 0$, e l'uguaglianza sussiste solo nel caso $A = 0$. Dunque $\langle\,,\,\rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Essendo $\langle\,,\,\rangle$ anisotropo, allora:

$$\dim M(n,\mathbb{R}) = \dim S(n,\mathbb{R}) + \dim (S(n,\mathbb{R}))^\perp$$
$$\dim (S(n,\mathbb{R}))^\perp = \frac{n(n-1)}{2}$$

Facilmente $A(n,\mathbb{R}) = (S(n,\mathbb{R}))^\perp$.

Dimostriamo un fatto preliminare:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \cdot a_{ij} = tr(AB)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Dunque

$\forall A \in A(n,\mathbb{R}),\ S \in S(n,\mathbb{R})$: $\langle A, S \rangle = tr(A^t S) =$

$= tr(S A^t) = tr(S^t(-A)) = \langle S, -A \rangle = -\langle S, A \rangle =$

$= -\langle A, S \rangle \Rightarrow \langle A, S \rangle = 0$

Dunque $(S(n,\mathbb{R}))^\perp = A(n,\mathbb{R})$.

13. Si consideri l'applicazione:

$$\langle\, , \rangle : M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle\, , \rangle : (A, B) \longrightarrow \mathrm{tr}(AB)$$

Dimostrare che $\langle\, , \rangle$ è un prodotto scalare non degenere. Determinare poi l'ortogonale di $S(n, \mathbb{R})$. Determinare infine la segnatura di $\langle\, , \rangle$.

L'applicazione è lineare rispetto al primo argomento:

- $\mathrm{tr}((A+B)C) = \mathrm{tr}(AC + BC) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AC)$;
- $\mathrm{tr}((\lambda A)C) = \mathrm{tr}(\lambda \cdot AC) = \lambda \cdot \mathrm{tr}(AC)$.

Inoltre è simmetrica:

$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \langle B, A \rangle$

Dunque è un prodotto scalare.

Ora, sia $A \in M(n, \mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Rad}\langle\, , \rangle$. Allora è vero che:

$$\langle A, A^t \rangle = 0$$

$$\mathrm{tr}(AA^t) = \mathrm{tr}(A^t A) = 0$$

Allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow A = 0$$

Dunque $\langle\, , \rangle$ è non degenere.

Notiamo ora che:

$\forall\, S \in S(n, \mathbb{R}) : \langle S, S \rangle = \mathrm{tr}(SS) = \mathrm{tr}(S^t S) \geq 0$, e l'uguaglianza avviene se e solo se $S = 0$;

$\forall\, A \in A(n, \mathbb{R}) : \langle A, A \rangle = \mathrm{tr}(AA) = -\mathrm{tr}(A^t A) \leq 0$, e l'uguaglianza avviene se e solo se $A = 0$;

$\forall\, S \in S(n, \mathbb{R}),\ A \in A(n, \mathbb{R}) : \langle A, S \rangle = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(S^t A^t) =$
$= \mathrm{tr}(S(-A)) = -\mathrm{tr}(SA) = -\langle S, A \rangle \Rightarrow \langle A, S \rangle = 0$

Allora si ha:

$$M(n, \mathbb{R}) = S(n, \mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A(n, \mathbb{R})$$

$\langle\, , \rangle|_{S(n,\mathbb{R})}$ definito positivo

$\langle\, , \rangle|_{A(n,\mathbb{R})}$ definito negativo

Dunque $S(n, \mathbb{R})^{\perp} = A(n, \mathbb{R})$, e $\sigma(\langle\, , \rangle) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, 0 \right)$.

14. Sia $N \in ST(n, \mathbb{R})$. Dimostrare che $N^n = 0$. Nel caso particolare in cui sulla sopradiagonale vi siano solamente elementi non nulli, si dimostri che $N^k \neq 0 \ \forall \ k < n$.

Abbiamo che

$$M_e^e(N) = B = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Allora:

- $Be_1 = 0$;
- $Be_2 = * e_1$;
- $\vdots$
- $Be_n = * e_{n-1} + \ldots + * e_1$.

In generale, dunque, $Be_i = * e_{i-1} + \ldots + * e_1$.

Sia allora $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$.

Allora:

$$B^n(v) = B^{n-1}(* e_1 + \ldots + * e_{n-1}) =$$
$$= B^{n-2}(* e_1 + \ldots + * e_{n-2}) = \ldots = B(* e_1) = 0$$

Se dunque $\forall v \in V : B^n(v) = 0$, deduciamo che $B^n = 0$.

Supponendo ora che sulla sopradiagonale vi siano solamente elementi non nulli, notiamo che, per ogni $k < n$:

$$B^k(e_n) = B^{k-1}(\lambda_1 e_{n-1} + \ldots + * e_1) = \ldots =$$
$$= B(\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} e_{n-k+1} + \ldots + * e_1) = 0 \Leftrightarrow n - k + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \geq n$$

Dunque $\forall \ k < n : B^k \neq 0$.

15. Sia $f: M(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare tale che:
$$f(AB) = f(BA) \quad \forall A,B \in M(n,\mathbb{K})$$
Dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che:
$$f(X) = \lambda \cdot \operatorname{tr} X \quad \forall X \in M(n,\mathbb{K})$$

Consideriamo la base canonica $\mathcal{C} = \{E_{1,1}, \dots, E_{nn}\}$ di $M(n,\mathbb{K})$.

Sia $E_{i,j}$ un elemento di $\mathcal{C}$, con $i \neq j$. Allora:
$$E_{i,j} = E_{i,i} \cdot E_{i,j}$$
Dunque:
$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i} \cdot E_{i,j}) = f(E_{i,j} \cdot E_{i,i}) = f(0) = 0$$

Sia ora $f(E_{1,1}) = \lambda$.

Allora, dato che:
$$E_{i,i} = E_{i,1} \cdot E_{1,i},$$
si ha:
$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,1} \cdot E_{1,i}) = f(E_{1,i} \cdot E_{i,1}) = f(E_{1,1}) = \lambda$$

Allora $f(E_{i,i}) = \lambda \quad \forall i = 1..n$.

Concludiamo che:
$$\forall X \in M(n,\mathbb{K}): f(X) = \lambda \cdot \operatorname{tr} X, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

16. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\langle , \rangle$ un prodotto scalare su V definito positivo su V. Sia $f: V \to V$ una applicazione lineare avente tutti gli autovalori reali. Si dimostri che esiste una base ortonormale di V a ventaglio per f.

Se lo spettro è totalmente reale, allora l'endomorfismo è triangolabile. Sia $\mathcal{B}$ una base che triangola f:
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$$

Applichiamo dunque il seguente algoritmo:

- $w_1 = v_1$;
- $w_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\Phi(v_i, v_k)}{\Phi(v_k, v_k)}$

La base ottenuta è, per costruzione, a ventaglio per f e ortogonale per $\langle , \rangle$. Normalizziamo, per ottenere il risultato finale:

$$g = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$$

17. Si dimostri che il polinomio minimo della matrice:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

è il minimo comune multiplo tra i polinomi minimi di A e B.

Se $q_M(x)$ deve annullarsi in M, allora in particolare $q_M(A) = 0$, $q_M(B) = 0$, da cui si ha che:

$$q_A(x) \mid q_M(x), \quad q_B(x) \mid q_M(x)$$

$$m.c.m.(q_A, q_B) \mid q_M$$

D'altronde, sia p un polinomio tale che $q_A \mid p$, $q_B \mid p$. Allora $p(M) = 0$, da cui $q_M \mid p$. Allora:

$$q_M = m.c.m.(q_A, q_B)$$

38. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si dimostri che:

$$\exists\, K \in \mathbb{N} \ni' A^K = I \iff A^2 = I$$

Una freccia è ovvia: se $A^2 = I$, allora $A^{2K} = I \ \forall K \in \mathbb{N}$.
Viceversa, sia $A^K = I$ per qualche $K \in \mathbb{N}$.
Allora, se N è la matrice che diagonalizza A (che d'ora in poi supporremo invertibile, dato che $A^K = I$ è impossibile per omomorfismi non iniettivi), si ha:

$$N^{-1} A^K N = N^{-1} A N N^{-1} A N \dots N^{-1} A N = (N^{-1} A N)^K = N^{-1} I N = I,$$

con la differenza che ora $N^{-1} A N = D \in \mathcal{D}(n, \mathbb{R})$.
Se dunque:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_K \end{bmatrix},$$

allora:

$$D^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^i \end{bmatrix}$$

Imponendo $\lambda_j^k = 1 \ \forall j = 1 \dots n$, si ha che:

- $k \equiv 1 \ (2) \Rightarrow \lambda_i = 1 \ \forall i$
- $k \equiv 0 \ (2) \Rightarrow \lambda_i^2 = 1 \ \forall i \Rightarrow \lambda_i = \pm 1 \ \forall i$

Nel più generale dei casi, allora, si ha, a meno di riordinare la base:

$$D = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right] \Rightarrow D^2 = \begin{bmatrix} I_n \end{bmatrix}$$

Dunque A^2, simile a D^2, è l'identità, visto che $[I]_\sim = \{I\}$.

25. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $g: V \to V$ una applicazione lineare di rango r.
Sia $L: \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(V,V)$ l'applicazione definita da $L(f) = g \circ f$.
Dimostrare che L è lineare e calcolare $\dim \mathrm{Ker}\, L$ e $\dim \mathrm{Imm}\, L$.

Effettuiamo le dovute verifiche:

- $L(0) = g \circ 0 = 0$;
- $L(f+h) = g \circ (f+h) = g \circ f + g \circ h = L(f) + L(h)$;
- $L(\lambda f) = g \circ (\lambda f) = \lambda \cdot g \circ f = \lambda \cdot L(f)$.

Sappiamo già che $\mathrm{rk}\, g = r$, dunque $\dim \mathrm{Ker}\, g = n - r$.
Se dunque vogliamo che $L(f) = g \circ f = 0$, allora $\mathrm{Imm}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$. Dunque:

$$\dim \mathrm{Ker}\, L = n(n-r) = n^2 - nr$$

$$\dim \mathrm{Imm}\, g = \dim \mathrm{Hom}(V,V) - \dim \mathrm{Ker}\, L =$$

$$= \cancel{n^2} - \cancel{n^2} + nr = nr$$

53. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ avente solo l'autovalore 1 e tale che $A^k = A^{k+1}$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Si dimostri che A è la matrice identica.

Se $Sp\, A = \{1\}$, allora $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Dunque:
$$A^k = A^{k+1} \Rightarrow I = A$$

54. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $v_1 \dots v_k$ vettori di V. Su V^* si consideri il prodotto scalare definito da:
$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)\, g(v_i) \quad \forall f, g \in V^*$$
Si determinino, in funzione dei v_i, l'indice di positività e di nullità di tale prodotto scalare.

Innanzitutto notiamo che questo prodotto scalare è semidefinito positivo:
$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{k} [f(v_i)]^2 \geq 0 \quad \forall f \in V^*$$
In particolare $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \in Ann(Span(v_1 \dots v_k))$.
Se dunque $\dim Span(v_1 \dots v_k) = r$, allora:
$$\dim Ann(Span(v_1 \dots v_k)) = n - r,$$
da cui:
$$\sigma(\langle , \rangle) = (r, 0, n-r).$$

63. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, V_1 e V_2 due sottospazi vettoriali di V. Si dimostri che:
- $Hom(W, V_1 \cap V_2) = Hom(W, V_1) \cap Hom(W, V_2)$;
- $Hom(W, V_1 + V_2) = Hom(W, V_1) + Hom(W, V_2)$.

Sicuramente vale la prima inclusione. Inoltre:
$\forall f \in Hom(W, V_1) \cap Hom(W, V_2)$: $Im\, f \in V_1$, $Im\, f \in V_2 \Rightarrow Im\, f \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow f \in Hom(W, V_1 \cap V_2)$.
Dunque $Hom(W, V_1 \cap V_2) = Hom(W, V_1) \cap Hom(W, V_2)$.
Sicuramente vale la seconda inclusione:
$$Hom(W, V_1 + V_2) \supseteq Hom(W, V_1) + Hom(W, V_2)$$

Inoltre, se $f \in Hom(W, V_1+V_2)$, allora, presa $\mathcal{B}$ base di W, a priori esiste la seguente decomposizione (che può non essere unica):

$\forall i=1...m : f(w_i) = v_i = a_i + b_i$, $a_i \in V_1$, $b_i \in V_2$

Allora, dette g e h le applicazioni lineari tali che:

$\forall i=1...m : g(w_i) = a_i \in V_1$

$h(w_i) = b_i \in V_2$,

si ha che $f = g+h$, con $g \in Hom(W, V_1)$, $h \in Hom(W, V_2)$.

Allora vale l'altra inclusione:

$$Hom(W, V_1+V_2) \subseteq Hom(W, V_1) + Hom(W, V_2),$$

da cui l'uguaglianza.

57. Fissate due matrici $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, si consideri l'insieme:

$$E(A,B) = \{X \in M(n, \mathbb{K}) \mid AX = XB\}$$

Si dimostri che $E(A,B)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$, e che se $A_1 \sim A$ e $B_1 \sim B$, allora $E(A_1, B_1)$ è isomorfo a $E(A,B)$.

Effettuiamo le dovute verifiche:

- $0 \in E(A,B)$, visto che $A0 = 0 = 0 \cdot B$;
- $G, H \in E(A,B) \Rightarrow AG = GB$, $AH = HB \Rightarrow$
  $\Rightarrow AG + AH = A(G+H) = (G+H)B = GB + HB \Rightarrow$
  $\Rightarrow (G+H) \in E(A,B)$;
- $G \in E(A,B) \Rightarrow AG = GB \Rightarrow A(\lambda G) = \lambda \cdot AG = \lambda \cdot GB =$
  $= (\lambda G)B \Rightarrow (\lambda G) \in E(A,B)$.

Siano ora $A_1 \sim A$ e $B_1 \sim B$. In altre parole:

$\exists M, N \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $A_1 = MAM^{-1}$, $B_1 = NAN^{-1}$

Valutiamo $E(A_1, B_1)$:

$$E(A_1, B_1) = \{Y \in M(n, \mathbb{K}) \mid MAM^{-1}Y = YNAN^{-1}\}$$

Consideriamo allora il seguente isomorfismo:

$$X \longrightarrow Y = MXN^{-1}$$

Dunque

$X \in E(A,B) \Rightarrow AX = XB \Rightarrow MAXN^{-1} = MXBN^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow MAM^{-1}MXN^{-1} = MXN^{-1}NBN^{-1} \Rightarrow MXN^{-1} \in E(A_1,B_1)$;

$Y \in E(A_1,B_1) \Rightarrow A_1 Y = YB_1 \Rightarrow M^{-1}A_1 YN = M^{-1}YB_1N \Rightarrow$

$\Rightarrow M^{-1}A_1 M M^{-1} YN = M^{-1}YNN^{-1}B_1N \Rightarrow M^{-1}YN \in E(A,B)$.

Dunque $E(A,B)$ è isomorfo a $E(A_1,B_1)$.

60. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle\, ,\rangle$ un prodotto scalare non degenere su V. Sia $f: V \longrightarrow V$ una applicazione lineare autoaggiunta rispetto a $\langle\, ,\rangle$, e sia $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma bilineare definita da:

$$b(v,w) = \langle f(v), w\rangle$$

Dimostrare che l'indice di nullità di b è uguale alla dimensione di $\operatorname{Ker} f$.
Nel caso che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\langle\, ,\rangle$ sia definito positivo, dimostrare che i_+ e i_- di b coincidono con il numero di autovalori positivi e negativi di f.

Sia $v \in \operatorname{Ker} f$. Allora:

$\forall w \in V: \ \langle v, w\rangle = b(f(v), w) = b(0, w) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in \operatorname{Rad} \langle\, ,\rangle$.

Sia ora $v \notin \operatorname{Ker} f$. Allora

$f(v) \neq 0 \Rightarrow f(v) \notin \operatorname{Rad}\langle\, ,\rangle \Rightarrow \exists\, w \in V$ t.c. $b(f(v), w) =$
$\langle v, w\rangle \neq 0 \Rightarrow v \notin \operatorname{Rad}\langle\, ,\rangle$.

Dunque $i_0(\langle\, ,\rangle) = \dim \operatorname{Ker} f$.

Sia ora $\mathcal{B}$ una base ortonormale per $\langle\, ,\rangle$. Se f è autoaggiunta, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in S(n, \mathbb{R})$. Per il teorema spettrale, allora, esiste una base $\mathcal{D}$ ortonormale per $\langle\, ,\rangle$ di autovettori per f. Sia $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Allora:

$$b(v_i, v_j) = \langle f(v_i), v_j\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij},$$

da cui $\mathcal{D}$ è ortogonale per b. Allora, a questo punto, la tesi è ovvia: $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(b)$, infatti, è in forma normale di Sylvester, e presenta gli autovalori di f nella diagonale.

68. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica e definita positiva. Si dimostri che, se esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $A^p = I$, allora $A = I$.

Dato che A è simmetrica e definita positiva, essa è simile, per un corollario del teorema spettrale reale, a una matrice diagonale avente gli autovalori positivi. Sia essa D:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \lambda_i > 0 \ \forall i$$

Al variare di $p \in \mathbb{N}$, si ha:

$$A^k \sim D^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^p \end{bmatrix}$$

Supponiamo che $D^p = I$ per qualche $p \in \mathbb{N}$. Allora necessariamente $D = I$, visto che l'unica radice positiva di 1 è 1. Allora A, simile all'identità, è l'identità stessa, visto che $[I]_\sim = \{I\}$.

107. Dimostrare che ogni matrice $M \in M(n, \mathbb{C})$ è simile alla sua trasposta.

Sia $\mathcal{B}$ una base di Jordan per M, e N la matrice di cambiamento di base da e a $\mathcal{B}$. Si ha:

$$N^{-1} M N = J_M$$

Trasponendo tutto, abbiamo:

$$N^t M^t N^{-1\,t} = J_M^t$$

Dunque:

$$M \sim J_M \qquad J_M^t \sim M^t$$

Dimostriamo allora che $J_M \sim J_M^t$. Siano $v_i \dots v_{i+k}$ vettori formanti un blocco di Jordan relativo a λ:

$$M_{\{v_i \dots v_{i+k}\}}(f|) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Invertendo la lista dei vettori, si ha:

$$M_{v_{i+1} \dots v_i}(f_1) = \begin{bmatrix} \lambda & & & & 0 \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ 0 & & & 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

il che comprova che $J_\mu \sim J_\mu^t$. Dunque per transitività $M = M^t$.

14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f: V \to V$ un'applicazione lineare. Supponiamo che esista un vettore v di V tale che $f^{n-1}(v) \neq 0$, $f^n(v) = 0$. Dimostrare che i vettori $\{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ sono una base di V.

Basta dimostrare la lineare indipendenza:

$$0 = a_1 v + a_2 f(v) + \dots + a_n f^{n-1}(v)$$

$$f(0) = 0 = a_1 f(v) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(v) + \cancel{a_n f^n(v)}$$

$$f^2(0) = 0 = a_1 f^2(v) + \dots + a_{n-2} f^{n-1}(v)$$

$$\dots$$

$$f^{n-1}(0) = 0 = a_1 f^{n-1}(v)$$

Allora $a_1 = 0$. Risalendo, si ha quanto voluto:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e sia $b: V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e k la dimensione di $V^\perp$. Dire se gli endomorfismi di V tali che $\forall v, w \in V: b(f(v), w) = 0$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, V)$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

Effettuiamo le verifiche:

- $b(0(v), w) = b(0, w) = 0 \quad \forall v, w \in V \Rightarrow 0 \in Z$;
- $a, c \in Z \Rightarrow \forall v, w \in V: b(a(v), w) = b(c(w), w) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow b(a(v) + c(v), w) = b((a+c)(v), w) = 0 \quad \forall v, w \in V \Rightarrow$
  $\Rightarrow a + c \in Z$;
- $a \in Z \Rightarrow \forall v, w \in V: b((\lambda a)(v), w) = \lambda \cdot b(a(v), w) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_{e}) \in \mathcal{Z}$

Allora la risposta è affermativa.

Dato che $K = \dim V^{\perp}$, sia $\mathcal{B} = \{k_1 \dots k_k, v_1 \dots v_{n-k}\}$ una base di $V^{\perp}$ estesa a base di V. Dato che $b|_{\mathrm{span}(v_1 \dots v_{n-k})}$ è non degenere, occorre che $\mathrm{Imm}\, f \subseteq \mathrm{Span}(k_1 \dots k_k)$.

Dunque:

$$f \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c} * \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Allora $\dim \mathcal{Z} = n \cdot k$.

69. Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensioni n e m rispettivamente. Siano $f: V \to W$ e $g: W \to V$ due applicazioni lineari, la prima iniettiva, la seconda surgettiva. Si costruisca un endomorfismo L di W tale che $g \circ L \circ f$ sia l'identità su V.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V. Essendo f iniettiva, $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti, che può essere esteso a base $\mathcal{D}$ di W.

$$\mathcal{D} = \{f(v_1) \dots f(v_n), w_1 \dots w_{m-n}\}$$

(È ovvio che $m \geq n$).

D'altra parte, essendo g surgettiva, esiste un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{x_1 \dots x_n\}$ di W tale che $g(x_i) = v_i \quad \forall i = 1 \dots n$.

Imponendo allora $L(f(v_i)) = x_i \quad \forall i = 1 \dots n$ e, ad esempio, $L(w_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m-n$, si ottiene quanto voluto:

$$g \circ L \circ f = \mathrm{Id}_V.$$

10. Siano E, F, G spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ e siano $f: F \to G$, $g: E \to G$ applicazioni lineari. Si dimostri che:

$$\text{Imm } f \supseteq \text{Imm } g \iff \exists\, L: E \to F \text{ lineare tale che } g = f \circ L$$

Se esiste $L: E \to F$ lineare tale che $g = f \circ L$, allora:
$\forall v \in \text{Imm } g$: $v \in \text{Imm}(f \circ L) \Rightarrow v \in \text{Imm } f$

Allora $\text{Imm } g \subseteq \text{Imm } f$.

Viceversa, sia $\text{Imm } g \subseteq \text{Imm } f$.

Sia $\mathcal{G} = \{v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_m\}$ una base di $\text{Ker } g$ estesa a base di E. Impongo innanzitutto, allora:

$$L(v_i) = 0 \quad \forall\, i = 1 \dots k$$

Per ogni vettore w_i, allora, $g(w_i)$ è non nullo.
Ma $\text{Imm } g \subseteq \text{Imm } f$, dunque $g(w_i) = f(x_i)$ per qualche $x_i \in F$. Imponiamo allora:

$$L(w_i) = x_i \quad \forall\, i = 1 \dots m,$$

e otteniamo quanto voluto.

16. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n ed $f: V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare. Sia $w \in V$, $w \notin \text{Ker } f$. Si consideri $L: V \to V$ definita da:

$$L(v) = v + f(v)\, w$$

Dire se L è diagonalizzabile.

Dato che $\dim \text{Imm } f \leq \dim \mathbb{K} = 1$, $\dim \text{Imm } f \leq 1$.
Dato che $w \notin \text{Ker } f$, allora f non è l'applicazione nulla dunque $\dim \text{Imm } f = 1$. Sia allora:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_{n-1}, w\}$$

una base di $\text{Ker } f$ estesa con w a base di V.
Si ha:

$\forall\, i = 1 \dots n-1$: $L(v_i) = v_i + f(v_i)\, w = v_i$;

$$L(w) = w + f(w)\, w = (1 + f(w))\, w$$

Dato che $(1 + f(w)) \neq 1$, vi sono un autospazio relativo all'autovalore 1 di dimensione $(n-1)$, e un autospazio relativo all'autovalore $(1 + f(w))$ di dimensione 1.

L, dunque, non può che essere diagonalizzabile.

11. Su $\mathbb{R}^n$ si consideri il prodotto scalare standard e sia $\mathcal{V}$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ definito da:

$$\mathcal{V} = \{ A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mid Av \in (\mathrm{Span}(v))^\perp \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \}$$

Si dimostri che $\mathcal{V}$ coincide con l'insieme $A(n,\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.

Sappiamo che $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ si può decomporre in modo unico come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$A = B + C, \quad B \in S(n,\mathbb{R}), \quad C \in A(n,\mathbb{R})$$

Ora, è ovvio che:

$$\langle Av, v \rangle = \langle Bv, v \rangle + \langle Cv, v \rangle$$

Notiamo che:

$$\langle Cv, v \rangle = (Cv)^t v = v^t C^t v = v^t (-C) v = -v^t C v =$$
$$= -\langle v, Cv \rangle = \langle v, Cv \rangle \Rightarrow \langle Cv, v \rangle = 0$$

Dunque $A(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{V}$. Imponiamo che:

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n : \langle Bv, v \rangle = 0, \quad B \in S(n,\mathbb{R})$$

Possiamo però cambiare base, e diagonalizzare B, per il teorema spettrale reale. Sia dunque:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

È evidente che, se $[\tilde{B}]_{ii} \neq 0$, allora $\langle v_i, Bv_i \rangle \neq 0$. Allora $\tilde{B}$ è la matrice nulla. B, simile a $\tilde{B}$, è allora la matrice nulla, visto che $[0]_\sim = \{0\}$.

Dunque A è antisimmetrica:

$$\mathcal{V} = A(n,\mathbb{R})$$

84. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ matrici nilpotenti e tali che $A^{n-1} \neq 0$ e $^{n-1} \neq 0$. Dire se $A \sim B$.

Sicuramente $A \sim B$. Infatti l'unica forma di Jordan nilpotente e tale che $J^{n-1} \neq 0$ è:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo allora $A \sim J \sim B$, si ha $A \sim B$.

85. Per ogni $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, sia $f_{AB} : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$ l'applicazione lineare definita da:

$$f_{AB}(X) = AX + XB$$

Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale:

$$V = \{ f_{AB} \in \operatorname{Hom}(M(n, \mathbb{K}), M(n, \mathbb{K})) \mid A, B \in M(n, \mathbb{K}) \}$$

Sia $W = \{ f : X \to AX \}$, $W' = \{ f : X \to XB \}$.

È evidente che $\dim W = \dim W' = n^2$.

Allora $\dim V = 2n^2 - \dim W \cap W'$.

Sia allora $f \in W \cap W'$. Innanzitutto è vero che:

$$A \cdot I = I \cdot B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = B$$

A questo punto, sappiamo bene che le matrici che commutano con qualsiasi matrice sono quelle scalari.

Allora $\dim W \cap W' = 1$, da cui:

$$\dim V = 2n^2 - 1$$

86. Sullo spazio vettoriale $M(n, \mathbb{R})$ si consideri il prodotto scalare $\langle X, Y \rangle = tr(XY)$. Data una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$, sia φ_A l'applicazione lineare:

$$\varphi_A : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$$
$$\varphi_A(X) = AX$$

Determinare le matrici A tali che φ_A è autoaggiunta rispetto a $\langle , \rangle$.

Studiamo la seguente uguaglianza:

$$\langle \varphi_A(X), Y \rangle = \langle X, \varphi_A(Y) \rangle$$
$$tr(AXY) = tr(XAY)$$
$$tr(XYA) = tr(YXA)$$

Consci del fatto che $E_{i,i} \cdot E_{i,j} = E_{i,j}$, $E_{i,j} \cdot E_{i,i} = 0$, si ha:

$$tr(E_{i,i} \cdot E_{i,j} \cdot A) = 0$$
$$tr(E_{i,j} \cdot A) = 0$$

La matrice $B = E_{i,j} \cdot A$ è nulla a meno dell'i-esima riga, che presenta la j-esima riga di A. Perché $tr(B) = 0$, occorre allora che $[A]_{i,j} = 0$.

Iterando, otteniamo che $A \in D(n, \mathbb{R})$.

Consci ora del fatto che $E_{i,j} \cdot E_{j,i} = E_{i,i}$, $E_{j,i} \cdot E_{i,j} = E_{j,j}$, si ha:

$$tr(E_{i,i} \cdot A) = tr(A \cdot E_{j,j})$$

Allora $[A]_{i,i} = [A]_{j,j}$

In conclusione, $A = \lambda Id$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostriamo ora che una qualsiasi matrice di questo tipo va bene:

$$tr(\lambda Id\, X\, Y) = tr(X(\lambda Id)Y)$$
$$\lambda(tr(XY)) = \lambda(tr(XY))$$

Allora le matrici scalari sono tutte e sole quelle tali che la funzione indotta è autoaggiunta per $\langle , \rangle$.

87. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e sia A la matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A.

Notiamo che, sottraendo $(a-b)Id$ ad A, la matrice che si ottiene ha rango 1 e dunque necessariamente nell'espressione polinomiale di $\det A$ vi è un fattore $(b-a)^{n-1}$. Notiamo però che anche $(b+(n-1)a)$ è autovalore, visto che il vettore $v = (1, 1, \ldots, 1)^t$ è un autovettore ad esso relativo. Allora A è diagonalizzabile e:

$$\det A = (b-a)^{n-1}(b+(n-1)a) =$$
$$= (b-a)^n + na(b-a)^{n-1}$$

77. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Si dimostri che A è triangolabile se e solo se $A = 0$.

Se $A = 0$, $A \in T(n, \mathbb{R})$, e non c'è nulla da dimostrare.

Viceversa, consideriamo $A_{\mathbb{C}} = A$ come matrice che induce un endomorfismo (antisimmetrico) in $\mathbb{C}^n$, complessificato di $\mathbb{R}^n$. Dato che $A = -A^t = -\overline{A}^t$ (visto che è a coefficienti reali), si ha che $AA^* = A^*A$, ossia A è normale. Per il teorema spettrale hermitiano, allora, A è diagonalizzabile. In $\mathbb{R}$, dunque, A è diagonalizzabile a blocchi la cui taglia è 1 (nel caso di autovalori reali) o 2 (nel caso di autovalori complessi coniugati). Notiamo ora che:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \langle Av, v \rangle = v^t A^t v = -v^t A v = -\langle v, Av \rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle Av, v \rangle = 0.$$

Se dunque λ è autovalore reale e $v \neq 0$ è autovettore relativo a λ:

$$0 = \langle v, Av \rangle = \lambda \|v\|^2$$

Il prodotto scalare standard è definito positivo, dunque:

$$v \neq 0 \Rightarrow \|v\|^2 \neq 0$$

Allora $\lambda = 0$.

L'unico endomorfismo nilpotente e diagonalizzabile, essendo esso simile all'endomorfismo nullo, è l'endomorfismo nullo. Dunque $A = 0$.

100\. Sia A una matrice di Jordan in $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ invertibile. Trovare la forma di Jordan di A^{-1}.

Senza perdere di generalità, studiamo solamente i casi in cui A sia un blocco di Jordan relativo ad un autovalore reale o a due autovalori complessi coniugati:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} \|\alpha\|\cos\theta & \|\alpha\|\sin\theta & 1 & 0 \\ \|\alpha\|(-\sin\theta) & \|\alpha\|\cos\theta & 0 & 1 \\ \hline & & \ddots & \end{array} \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda A_1, notiamo che A_1^{-1} è la seguente matrice:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{(n+1)}\lambda^{-n} \\ & \lambda^{-1} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Dato che $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \ldots, \lambda^{-n} \in \mathbb{R}^*$, dunque $\operatorname{rk} A_1^{-1} = n-1$. Allora:

$$J(\lambda_1^{-1}) = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 1 & & 0 \\ & \lambda^{-1} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

A questo punto è evidente che, nel caso complesso, si ha il seguente cambiamento:

$$\begin{bmatrix} \|\alpha\|\cos\theta & \|\alpha\|\sin\theta \\ -\|\alpha\|\sin\theta & \|\alpha\|\cos\theta \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \|\alpha^{-1}\|\cos\theta & -\|\alpha^{-1}\|\sin\theta \\ \|\alpha^{-1}\|\sin\theta & \|\alpha^{-1}\|\cos\theta \end{bmatrix}$$

113. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $<,>$ un prodotto scalare su V tale che $<v,v> \neq 0$ per ogni $v \neq 0$. Si dimostri che allora $<,>$ è definito positivo o definito negativo.

La condizione $<v,v> \neq 0 \ \forall v \neq 0$ implica che $\omega(<,>) = 0$ ossia $<,>$ sia definito in qualche modo.

114. Si determini l'insieme $\mathcal{F}$ delle matrici $A \in M(n, \mathbb{R})$ tali che:

$$M^t A M = A \quad \forall M \in GL(n, \mathbb{R})$$

Supponiamo $M^{-1} = M^t$. Allora $M^{-1} A M = A$, da cui $A = \lambda I$. Tornando indietro:

$$M^t \lambda I M = \lambda I \Rightarrow \lambda (M^t M - I) = 0$$

Dato che a priori $(M^t M - I) \neq 0$, allora $\lambda = 0$.
Dunque $\mathcal{F} = \{0\}$.

108. Sullo spazio vettoriale $M(m, n, \mathbb{R})$ si consideri il prodotto scalare $<X, Y> = \operatorname{tr}(X^t Y)$. Data $A \in M(m, \mathbb{R})$, sia φ_A l'applicazione lineare:

$$\varphi_A : M(m, n, \mathbb{R}) \to M(m, n, \mathbb{R})$$
$$\varphi_A(X) = AX$$

Determinare l'insieme delle matrici A tali che φ_A è autoaggiunta rispetto a $<,>$

Studiamo l'uguaglianza:

$$<\varphi_A(X), Y> = <X, \varphi_A^*(Y)>$$
$$\operatorname{tr}(X^t A^t Y) = <X, \varphi_A^*(Y)>$$

Allora $\varphi_A^*(Y) = A^t Y$. Imponendo $\varphi_A^* = \varphi_A^*$, si ha che, per ogni $X \in M(m, n, \mathbb{R})$:

$$A^t X = AX,$$

e questo è vero se e solo se $A \in S(n, \mathbb{R})$, o equivalentemente $A = A^t$.

27. Siano V e W spazi vettoriali dotati ciascuno di un prodotto scalare definito positivo. Sia $f: V \to W$ una applicazione lineare e sia $f^*: W \to V$ l'applicazione aggiunta di f. Si dimostri che:

- f è iniettiva $\Leftrightarrow f^* \circ f: V \to V$ è un isomorfismo;
- f è surgettiva $\Leftrightarrow f \circ f^*: W \to W$ è un isomorfismo.

Nel primo caso, è ovvio che $\dim V \leq \dim W$. Siano $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Se $f^* \circ f \; V \to V$ è un isomorfismo, allora $rk(f^* \circ f) = n \leq rk\, f \leq n \Rightarrow rk\, f = n \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f è iniettiva.
Viceversa, sia f iniettiva.
Dimostriamo prima che $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
$w \in \operatorname{Ker} f^* \Leftrightarrow f^*(w) = 0 \Leftrightarrow \langle f^*(w), v \rangle_V = 0 \;\; \forall v \in V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle w, f(v) \rangle_W = 0 \;\; \forall v \in V \Leftrightarrow w \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Se dunque $\dim \operatorname{Ker} f^* = \dim (\operatorname{Im} f)^\perp = 0$, f^* è iniettiva. Dunque $f^* \circ f$, composizione di funzioni iniettive, è iniettiva. Essendo un endomorfismo, esso è biunivoco.

Nel secondo caso, è ovvio che $n = \dim V \geq \dim W = m$.

Se f non è surgettiva, a maggior ragione non lo è $f \circ f^*$, che dunque non è un isomorfismo.
Se f invece è surgettiva, dimostriamo prima che $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$.
$v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow \langle f(v), w \rangle_W = 0 \;\; \forall w \in W \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle v, f^*(w) \rangle_V = 0 \;\; \forall w \in W \Leftrightarrow v \in (\operatorname{Im} f^*)^\perp$

Allora $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp \Leftrightarrow (\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$.

A questo punto $\dim \operatorname{Im} f^* = m$, da cui $f \circ f^*$, composizione di omomorfismi surgettivi, è un endomorfismo surgettivo, ossia è un isomorfismo.

32. Sia A una matrice di $M(n, \mathbb{K})$ e sia $L: M(n,\mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$ l'applicazione lineare definita da $L(X) = AX$. Dimostrare che:

- L è iniettiva $\Leftrightarrow$ A è invertibile;
- λ è autovalore per L $\Leftrightarrow$ λ è autovalore per A;
- L è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile.

- Sia A non invertibile. Allora esiste $v \neq 0$ t.c. $f(v) = Av = 0$. Allora la matrice $X = (v|0 \dots 0)$, non nulla è tale che $AX = 0$, visto che $AX = (AX_1 | A0 | \dots | A0) = (Av | 0 \dots 0) = (0|0 \dots 0)$. Dunque $\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$, e L non è iniettiva.
Se A è invece invertibile, allora $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Ma abbiamo visto che $X \in \operatorname{Ker} L \Leftrightarrow X_1 \dots X_n \in \operatorname{Ker} f$. Allora, se $X \in \operatorname{Ker} L$, si ha $X = 0$. Dunque L è iniettiva.
- Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore per A. Allora $\exists\, v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$. Allora $X_1 = (v|0 \dots 0)$, $X_2 = (0|v| \dots 0)$ ... sono tutti autovettori per L linearmente indipendenti: si noti come il rapporto, con questo metodo, è di $1:n$.
Viceversa, sia $X \neq 0$ autovettore per L relativo a λ. Allora tutte le colonne, in particolare una colonna che sicuramente è non nulla, sono autovettori per A.
- Sia A diagonalizzabile. Allora esistono n autovettori linearmente indipendenti. Con il metodo visto al punto 2, posso sicuramente generare $n \cdot n = n^2$ autovettori per L linearmente indipendenti. Allora L è diagonalizzabile.
Viceversa, sia L diagonalizzabile. Degli n^2 autovettori, certamente ne esistono alcuni capaci di generare le matrici $X = (v|0 \dots 0)$. Le prime colonne di queste matrici possono allora formare una base di autovettori per A. Dunque è diagonalizzabile.

67. Sia V uno spazio vettoriale reale e $f: V \to V$ una applicazione lineare. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V invarianti per f e tali che $V = W_1 + W_2$. È vero che, se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ hanno solo autovalori reali, allora f ha tutti gli autovalori reali?

Sia $\mathcal{E} = \{d_1 \dots d_s\}$ una base di $W_1 \cap W_2$. Questo è uno spazio vettoriale f-invariante, essendo intersezione di spazi vettoriali f-invarianti.

Possiamo estendere $\mathcal{E}$ a base prima di W_1 e poi di W_2:

$$\mathcal{D} = \{d_1 \dots d_s, g_1 \dots g_k\} \qquad \mathcal{G} = \{d_1 \dots d_s, h_1 \dots h_l\}$$

Allora la seguente è una base di V:

$$\mathcal{B} = \{d_1 \dots d_s, g_1 \dots g_k, h_1 \dots h_l\}$$

Se ora $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ hanno solo autovalori reali, possiamo determinare una base tale che:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{smallmatrix} & * & * \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{smallmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

Essendo questa matrice triangolare superiore, possiamo affermare dunque che f ammette solo autovalori reali.

68. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $f_1 \dots f_m, g$ dei funzionali di V^*. Dimostrare che:

$$\exists\, a_i \in \mathbb{K} : g = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \iff \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} g$$

Dimostriamo la prima implicazione.

Sia $v \in \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} f_i$. Allora:

$$g(v) = a_1 f_1(v) + \dots + a_m f_m(v) = 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} g$$

Dimostriamo la seconda implicazione:

Identificando con Φ l'isomorfismo canonico col biduale, si ha:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} g \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} \Phi(\operatorname{Ker} f_i) \subseteq \Phi(\operatorname{Ker} g) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}(f_i) \subseteq \mathrm{Ann}\, g \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Span}\, f_i = \mathrm{Span}(f_1 \ldots f_n) \supseteq$
$\supseteq \mathrm{Span}\, g$,

da cui g è combinazione lineare di $f_1 \ldots f_n$.

62. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle\, , \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia $v_0 \in V$ un vettore tale che $\langle v_0, v_0 \rangle = 0$. Si dimostri che esiste una base di V contenente v_0 e ortogonale per $\langle\, , \rangle$ se e solo se $(\mathrm{Span}(v_0))^{\perp} = V$.

Sia $\mathcal{B} = \{v_0, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V ortogonale per $\langle\, , \rangle$. Allora:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\langle\, , \rangle) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & * \end{bmatrix},$$

da cui $v_0 \in \mathrm{Rad}\langle\, , \rangle$, dunque $(\mathrm{Span}(v_0))^{\perp} = V$.

Viceversa, se $(\mathrm{Span}(v_0))^{\perp} = V$, allora $v_0 \in \mathrm{Rad}\langle\, , \rangle$, da cui $\dim \mathrm{Rad}\langle\, , \rangle \neq 0$. Allora, tramite l'algoritmo di ortogonalizzazione di una base, possiamo ottenere una base tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\langle\, , \rangle) = \begin{bmatrix} I_k & & \\ & -I_k & \\ & & O_q \end{bmatrix},$$

ove in particolare la base di $\mathrm{Rad}\langle\, , \rangle$ può contenere v_0. Dunque esiste una base che soddisfa la richiesta:

$$\mathcal{B} = \{ p_1 \ldots p_h, m_1 \ldots m_k, v_0, a_2, \ldots, a_q \}$$

12. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$, con $rk\,A = k$. Si dimostri che esistono due matrici $P \in GL(n, \mathbb{R})$ e $Q \in O(n)$ tali che:

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Usando il punto 1, poi, dimostrare che $rk\,AA^t = rk\,A$.

Tramite l'algoritmo raffinato di Gauss, possiamo partire da $(A \mid I)$ e ridurre A ad una matrice $\hat{A}$ tale che:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \; 1 & & & \\ 0 \dots & 0 \; 1 & & \\ 0 \dots & & 0 \; 1 & \\ & & \dots & \end{bmatrix}$$

Applicando le stesse operazioni a I, otteniamo allora P tale che $PA = \hat{A}$.

Ora effettuiamo una permutazione delle colonne per ricondurci ad una matrice B:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice $Q \in O(n)$ che realizza tale permutazione è una matrice di cambiamento di base dalla base canonica ad una sua permutazione (due basi ortonormali per il prodotto scalare standard), dunque è effettivamente ortogonale.

Ora:

$$PAQ = B$$

$$Q^t A^t P^t = B^t = B$$

$$PA\cancel{Q}\cancel{Q^t} A^t P^t = B^2 = B$$

$$PAA^t P^t = B$$

Allora $rk\,AA^t = rk\,A$.

138. Siano $A_1, A_2 \dots A_k$ matrici di $M(n, \mathbb{K})$ tali che $A_1 + A_2 + \dots + A_k = I$. Si dimostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

- $A_i^2 = A_i$ per ogni $i = 1 \dots k$;
- $A_i A_j = 0$ per ogni $i \neq j$;
- $rk\, A_1 + \dots + rk\, A_k = n$.

Se $A_i^2 = A_i$ per ogni $i = 1 \dots k$, allora A_i è una proiezione per ogni $i = 1 \dots k$. Dunque $rk\, A = Tr\, A$.
Allora:

$rk\, A_1 + \dots + rk\, A_k = Tr\, A_1 + \dots + Tr\, A_k = Tr\, (A_1 + \dots A_k) =$
$= Tr\, I = n$.

Da $A_1 + \dots + A_k = I$ otteniamo che:

$$Imm\, A_1 + \dots + Imm\, A_k = \mathbb{K}^n$$

D'altronde, da $\dim Imm\, A_1 + \dots + \dim Imm\, A_k = n$ abbiamo

$$Imm\, A_1 \oplus \dots \oplus Imm\, A_k = \mathbb{K}^n$$

Sia ora $x = A_i v$. Allora esiste un'unica decomposizione in addendi diretti, che è la seguente:

$$A_i v = A_1 A_i v + \dots + A_i^2 v + \dots + A_k A_i v$$

Ma $A_i v \in Imm\, A_i$, dunque necessariamente $A_i^2 v = A_i v$, e $A_j A_i v = 0$ $\forall\, j = 1 \dots k$. Dato che ciò vale per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, allora si ha che $A_i^2 = A_i$ $\forall\, i = 1 \dots k$, $A_j A_i = 0$ $\forall\, i, j = 1 \dots k$, $i \neq j$.

Infine, se $A_i A_j = 0$ $\forall\, i, j = 1 \dots k$, $i \neq j$, allora dalla relazione $A_1 + \dots A_k = I$, moltiplicando ambo i membri per A_i, si ottiene:

$$A_1 A_i + \dots + A_i^2 + \dots A_k A_i = A_i^2 = I \cdot A_i = A_i$$

e ciò vale per ogni $i = 1 \dots k$.

129. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione ≥ 1 e siano $f, g : V \to V$ due applicazioni lineari. Si supponga che $fg - gf = f$. Si dimostri che:

- $\operatorname{Ker} f$ è invariante per g;
- esiste un autovettore comune per f e g;
- esiste una base a bandiera comune per f e g.

- Sia $v \in \operatorname{Ker} f$. Allora $(fg - gf)(v) = f(v) = 0$, da cui

$$(fg)(v) = g(f(v)) =$$
$$= f(g(v)) = 0$$

Allora $g(v) \in \operatorname{Ker} f$, dunque $g(\operatorname{Ker} f) \subseteq \operatorname{Ker} f$.

- Sia λ un autovalore per f, e consideriamo:

$$V_\lambda(f) = \operatorname{Span}(v_1 \dots v_m)$$

Allora $\operatorname{Span}(v_1 \dots v_m) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

- Abbiamo dimostrato che $\operatorname{Ker} f$ è g-invariante. Se dunque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, allora esisterà un autovettore comune per f e g relativo all'autovalore 0.

Per assurdo sia f invertibile. Allora:

$$g - f^{-1} g f = \operatorname{Id}$$
$$f^{-1} g f = g - \operatorname{Id}$$

Ora $f^{-1} g f \sim g$, dunque imponiamo:

$$P_g(x) = P_{g - \operatorname{Id}}(x) = P_g(x+1)$$

Gli unici polinomi che soddisfano questa relazione sono le costanti. Ma $\deg P_g(x) \geq 1$, dunque tutto ciò è assurdo. Allora $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, dunque esiste un autovettore comune per f e g.

- Procediamo per induzione. Il passo base è ovvio. Consideriamo $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e $B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g)$. Ora, sia v_1 un autovettore comune. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ una nuova base. Allora:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right], \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \left[\begin{array}{c|c} \beta & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B' \\ 0 & \end{array}\right]$$

Quindi A' e B' sono ancora tali che $A'B' - B'A' = A'$.
Per ipotesi induttiva, allora, esiste $\mathcal{G} = \{v_2 \dots v_n\}$ a bandiera comune per f e g. A questo punto:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$

è una base a bandiera comune per f e g.

Si noti come è evidente, per come funziona l'induzione, che f sia nilpotente.

123. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$ e sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare non degenere su V avente indici i_+ e i_- uguali.
- Si trovi un sottospazio $H \subseteq V$ di dimensione uguale a n tale che $\langle , \rangle|_H = 0$
- È possibile determinare un sottospazio H come al punto precedente ma tale che $\dim H > n$?

Sappiamo che esiste una base ortogonale normalizzata per $\langle , \rangle$ tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\langle , \rangle) = \left[\begin{array}{c|c} I_n & \\ \hline & -I_n \end{array}\right], \quad \mathcal{B} = \{p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n\}$$

Riordiniamo la base in questo modo:

$$\mathcal{B}' = \{p_1, q_1, \dots p_n, q_n\}$$

È evidente che, nella matrice $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$, ci sia un alternanza di 1 e -1 sulla diagonale.
Ora:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Span}(p_i, q_i)$$

Allora la seguente:

$$\mathcal{D} = \{p_1 + q_1, \dots p_n + q_n\}$$

è una base ortogonale di $H = \operatorname{Span}(p_i + q_i, i = 1 \dots n)$.
Notiamo che $\dim H = n$.

In fine:

$\langle p_i+q_i, p_i+q_i\rangle = \langle p_i, p_i\rangle + \cancel{\langle p_i, q_i\rangle} + \cancel{\langle q_i, p_i\rangle} + \langle q_i, q_i\rangle =$

$= 1 - 1 = 0$

dunque $\langle , \rangle|_H \equiv 0$.

Uno spazio vettoriale di dimensione maggiore di n non può esistere. Infatti, ammesso che esista uno spazio G di dimensione $(n+1)$ con quelle caratteristiche, esiste una base $\mathcal{G}$ tale che:

$$M_{\mathcal{G}}(\langle , \rangle) = \left[\begin{array}{c|c} O_{n+1} & * \\ \hline * & * \end{array}\right]$$

Il rango di questa matrice è però non maggiore di $2n-2$, e ciò è assurdo.

10. Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V di dimensione n.
Si dimostri che esiste $v \in V$ tale che $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ è una base di V se e solo se tutti gli autovalori sono distinti.

Se $\{v, \varphi(v) \dots \varphi^{n-1}(v)\}$ è una base (ciclica) di V, allora $q_\varphi(x) = \pm P_\varphi(x)$. Essendo f diagonalizzabile, $q_f(x)$ è libero da quadrati. Essendo allora $P_\varphi(x)$ libero da quadrati, deduciamo che f ha autovalori distinti e due a due.
Viceversa, se f ha tutti gli autovalori distinti, allora, presa una base di autovettori per V:

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$$

allora $w = v_1 + \dots + v_n$ genera una base ciclica. Infatti la matrice contenente le coordinate di $w, \varphi(w), \dots \varphi^{n-1}(w)$ è di Vandermonde, ed è invertibile poiché gli autovalori sono tutti distinti. Dunque $\mathcal{B}' = \{w, \dots, \varphi^{n-1}(w)\}$ è una base di V.

102. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito positivo. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare autoaggiunta.
Calcolare la dimensione del seguente sottospazio vettoriale:

$$E = \{ g \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid g = g^* \wedge g \circ f = f \circ g \}$$

Sia $\mathfrak{B}$ una base ortonormale per $\langle , \rangle$. In questo caso, $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \in S(n,\mathbb{R})$ essendo f autoaggiunta.
Per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale per $\langle , \rangle$ tale che $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \in \mathcal{D}(n,\mathbb{R})$. Ora, se g è autoaggiunta per $\langle , \rangle$, allora $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) \in S(n,\mathbb{R})$.
Imponiamo allora che $f \circ g = g \circ f$:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ g \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ g \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

È evidente allora che g è formata da blocchi della stessa taglia di quelli di f. Allora, dette $h_1 \dots h_k$ le molteplicità algebriche (e geometriche) degli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_k$ di f, si ha:

$$\dim E = \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i(h_i+1)}{2}$$

103. Sia $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'applicazione lineare che sulla base canonica agisce nel seguente modo:

$$\sigma : e_i \to e_{i+1} \quad \forall\, i = 1..n-1$$
$$\sigma : e_n \to e_1$$

Si dimostri che σ è diagonalizzabile e se ne calcoli una base di autovettori.
Si ha:

$$M_e^e(\sigma - x\,\mathrm{Id}) = \begin{bmatrix} -x & & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & -x & \\ 0 & & 1 & -x \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$P_\sigma(x) = \pm(x^n - 1) \Rightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\sigma) = \{ \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}, \zeta_n^n = 1 \}$$

Essendo gli autovalori tutti distinti, A risulta diagonalizzabile.

Ora, per ogni autovalore ζ_n^i, il seguente è un autovettore:

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_n^{(n-1)i} \\ \zeta_n^{(n-2)i} \\ \vdots \\ \zeta_n^i \end{bmatrix}$$

Infatti $A(X) = (\zeta_n^i, 1, \zeta_n^{(n-1)i}, \dots)^t = \zeta_n^i X$. Dato che vettori relativi ad autovalori differenti sono linearmente indipendenti, allora quella formata in questo modo è una base di $\mathbb{C}^n$.

99. Sia $A \in S(n, \mathbb{R})$ una matrice reale simmetrica e invertibile; sia g il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ associato ad A rispetto alla base canonica. Si supponga che ogni matrice $B \in S(n, \mathbb{R})$ definisca, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, un'applicazione lineare auto-aggiunta rispetto a g. Si dimostri che A ha un solo autovalore.

Necessariamente $AB^t A^{-1} = B$, da cui ($B^t = B$):

$$AB = BA$$

A dunque deve commutare con tutte le matrici simmetriche. Ciò è equivalente a richiedere che A commuti con tutte le matrici. Allora $A = \lambda Id$, ossia A ha solo l'autovalore λ.

110. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$. Si dimostri che $A \in S(n, \mathbb{R})$ se e solo se $AA^t = A^tA$ ed ha tutti gli autovalori reali.

Se $A \in S(n, \mathbb{R})$, allora banalmente $AA^t = A^2 = A^tA$. Inoltre, per il teorema spettrale reale, essa è diagonalizzabile, dunque a maggior ragione triangolabile.

Sia ora $A \in M(n, \mathbb{R})$ triangolabile tale che $AA^t = A^tA$. Sia B una base che triangola A. Mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt possiamo generare una base ortonormale a bandiera per A:

$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \ni' P^{-1}AP = P^tAP = T \in T(n, \mathbb{R})$

$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \ni' P^{-1}A^tP = P^tA^tP = T^t \in T(n, \mathbb{R})$

Osserviamo che:

$TT^t = P^tA\cancel{PP^t}A^tP = P^tAA^tP = P^tA^tAP =$

$= P^tA^tPP^tAP = T^tT$

Dunque:

$$\begin{bmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}$$

$\forall\, i = 1 \ldots n : [TT^t] = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2 = [T^tT] = a_{ii}^2$

Allora $\forall\, j \neq i : a_{ij} = 0$, ossia $T \in \Delta(n, \mathbb{R})$. Allora A, congruente ad una matrice diagonale quindi simmetrica, è simmetrica.

111. Sia $A \in O(n, \mathbb{R})$. Dimostrare che $A - I$ è nilpotente se e solo se $A = I$.

Se $A = I$, $A - I = 0$ è ovviamente nilpotente.

Viceversa, sia $A - I$ è nilpotente. Allora:

$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{R}) \ni' M^{-1}(A - I)M = M^{-1}AM - I = J$,

ove J è in forma di Jordan. Si noti che è equivalente rendere A in forma di Jordan e poi sottrarre l'identità. Concludiamo che $Sp\, A = \{1\}$. Ma una matrice ortogonale è diagonalizzabile: l'unica matrice diagonalizzabile avente solo l'autovalore 1 è l'identità.

11.1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare ortogonale. Si dimostri che f è diagonalizzabile se e solo se esistono due sottospazi $W_1 \neq W_2$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(W_i) \subseteq W_i$ e $\dim W_i = 2$ per $i = 1, 2$.
La tesi rimane vera se si toglie l'ipotesi che f sia diagonalizzabile?

Innanzitutto notiamo che la tesi diventa falsa se f non è ortogonale. La seguente applicazione $\hat{f}$:

$$M_e^e(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile, e ciò è evidente, ma:
$\exists\ W_1 = \mathrm{Span}(e_1, e_2),\ W_2 = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$ t.c. $\dim W_i = 2$, $f(W_i) \subseteq W_i \ \forall i = 1, 2$.

Passiamo ora al caso in cui f sia ortogonale. Detta $N = M_e^e(f)$, si ha $N \in O(3, \mathbb{R})$. Ebbene, essa è diagonalizzabile con autovalori di norma unitaria.
I casi sono due:

- gli autovalori sono tutti reali. Allora f è effettivamente diagonalizzabile, e i piani f-invarianti sono addirittura infiniti;
- vi è un autovalore reale e due complessi coniugati. Allora la forma di Jordan reale è:

$$M_B^B(f) = \left[\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right]$$

Dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Span}(v_2, v_3)$ è l'unico piano f-invariante. Ma ciò è facile: basta notare che questo piano non ha autovettori. Sia dunque W° un piano f-invariante distinto da $\mathrm{Span}(v_2, v_3)$. Allora $\mathrm{Span}(v_2, v_3) \cap W^\circ = \mathrm{Span}(\tilde{x})$, con $\tilde{x}$ autovettore. E ciò è assurdo. Dunque non esistono due piani f-invarianti.

37. Sia $A \in O(n, \mathbb{R})$. Si dimostri che esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^{-1} A M = M^t A M = \begin{bmatrix} I_{k_1} & & & & \\ & -I_{k_2} & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

ove $\forall\, * : * = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$, con $\theta_i \neq h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

LEMMA

Sia $A \in U(n, \mathbb{C})$. Allora tutti gli autovettori hanno norma unitaria.

$A \in U(n, \mathbb{C}) \Rightarrow A^* = \overline{A}^t = A^{-1}$

Sia allora v autovettore relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle Av, v\rangle_H = \langle v, A^* v\rangle_H$$
$$\lambda \langle v, v\rangle_H = \langle v, A^{-1} v\rangle_H$$
$$\lambda \langle v, v\rangle_H = \langle v, \lambda^{-1} v\rangle_H = \overline{\lambda}^{-1} \langle v, v\rangle_H$$
$$\lambda\overline{\lambda} \langle v, v\rangle_H = \langle v, v\rangle_H, \quad \langle v, v\rangle_H > 0$$
$$\lambda\overline{\lambda} = \|\lambda\|^2 = 1 \Rightarrow \|\lambda\| = 1$$

Dato che una matrice ortogonale, se complessificata, diventa una matrice unitaria, il suo spettro in $\mathbb{C}$ è costituito da valori a norma unitaria.

Procediamo dunque per induzione su $n = \dim V$.

CASO INIZIALE

$n = 1$

In questo caso $A = Id$ o $A = -Id$. Sicuramente esiste, perciò, una base ortonormale per $\langle\, , \rangle$ che diagonalizza A in forma canonica.

PASSO INDUTTIVO

$n-1 \Rightarrow n$

Consideriamo $P_A(x)$.

I casi sono due:

- vi è qualche fattore di primo grado, del tipo $(x-1)^k$ o $(x+1)^h$. Allora $V_{\pm 1}(A) \neq \{0\}$. Sia $\tilde{v}$ un autovettore rispetto a ± 1, consideriamo $v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$.

Dato che $\langle v, v \rangle > 0$:

$$V = Span(v) \oplus (Span(v))^{\perp}$$

Sia z appartenente a $Z_v = Span(v)^{\perp}$. Allora:

$\langle v, z \rangle = \langle Av, Az \rangle = \langle \pm v, Az \rangle = 0 \Rightarrow (Span(v))^{\perp}$ è A invariante.

In più $f_A|_{Z_v}$ è a maggior ragione un'isometria, dunque induce una matrice ortogonale. Infine, $\dim Z_v = n-1$.

Per ipotesi induttiva, allora, esiste $\bar{B}_0$ base ortonormale che rende $A|_{Z_v}$ in forma canonica. Allora $B = \{v \cup \bar{B}\}$ è una base ortonormale che rende A in forma canonica.

- vi sono solo fattori irriducibili di secondo grado.

Sia $X \in V_{\mathbb{C}}$ un autovettore per $A_{\mathbb{C}} \in U(n, \mathbb{C})$ relativo a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora

$$A_{\mathbb{C}} X = \lambda X \Rightarrow A_{\mathbb{C}} \bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X} \Rightarrow \bar{X} \in V_{\bar{\lambda}}(A_{\mathbb{C}})$$

Dunque $G = \left\{ \frac{X + \bar{X}}{2}, \frac{X - \bar{X}}{2i} \right\}$ è una base di un piano f-invariante su cui ovviamente il prodotto scalare è definito positivo. Sia esso P. Allora sia $\tilde{G}$ una base ortonormale di P rispetto a $\phi|_P$. Allora:

$$V = P \oplus P^{\perp},$$

con $P^{\perp}$ A-invariante, di dimensione $(n-2)$ e tale che $A|_{P^{\perp}}$ è ancora ortogonale. Per ipotesi induttiva, esiste una base $\bar{B}$ valida. Allora $B = \{\tilde{G} \cup \bar{B}\}$ è una base valida.

Dato che a priori ortonormalizzando G la matrice di $A|_{Span\, G}$ può non essere della forma desiderata, mostriamo che ciò in realtà non avviene. Tenuto conto che la matrice è della forma desiderata per G, mostriamo che $x = \frac{X + \bar{X}}{2} \perp y = \frac{X - \bar{X}}{2i}$. Dato che essi sono ortogonali rispetto a $\langle , \rangle_H$:

$\langle v, \bar{v} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \Rightarrow \langle x + iy, x + iy \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} - \langle y, y \rangle_{\mathbb{R}} + 2i \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

40) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione ≥ 1 e sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = -Id$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right],$$

con m univocamente determinato.

Se $f^2 = -Id$, allora $q_f(x) \mid (x^2+1)$. Essendo questo polinomio irriducibile, $q_f(x) = (x^2+1)$. Allora, in $\mathbb{C}$, si ha $Sp\, f_\mathbb{C} = \{\pm i\}$. In più, essendo $q_f(x)$ libero da quadrati, $f_\mathbb{C}$ è diagonalizzabile. Esiste cioè una base in cui:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\mathbb{C}) = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array} & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$

È chiaro allora che $m = \dim V / 2$ sia univocamente determinato, visto che la parità di $\dim V$ è una condizione a questo punto necessaria.

Dato che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, si ha che, in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan reale di f, essendo $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, è, per un'opportuna base $\mathcal{B} = \{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} & \\ & \ddots \end{bmatrix}.$$

Allora, se $\mathcal{B}' = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m\}$, si ha quanto voluto:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right]$$

3.7. Siano A, B matrici quadrate reali di ordine n aventi tutti gli autovalori reali. Dimostrare che, se $AB = BA$, allora esiste una matrice ortogonale N tale che $N^{-1}AN$ e $N^{-1}BN$ sono triangolari.

Sia $V_{\lambda_i}(A) \ni v$. Allora:

$$ABv = BAv = \lambda_i Bv \Rightarrow B(V_{\lambda_i}(A)) \subseteq V_{\lambda_i}(A)$$

Essendo questo uno spazio invariante ed essendo B triangolabile, esiste una base a bandiera per B di $V_{\lambda_i}(A)$.
In particolare esiste $w \in V_{\lambda_i}(A)$ autovettore per B. Allora:

$$Aw = \lambda_i w \, , \; Bw = \mu_j w$$

Dunque, sia $\mathcal{B} = \{w, v_2, \dots, v_n\}$ con $\{v_2, \dots, v_n\}$ completamento a piacere. Si ha:

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_i & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \qquad B_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \mu_j & * \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right]$$

Ora:

$$AB = BA \Rightarrow A_1 B_1 = B_1 A_1$$

In più $B|_{\{v_2 \dots v_n\}}$ e $A|_{\{v_2 \dots v_n\}}$ sono triangolabili.

Notando che se $\dim V = 1$ la proposizione è banalmente vera, allora per ipotesi induttiva esiste $\mathcal{B}$ base che triangola simultaneamente A_1 e B_1. Dunque $\overline{\mathcal{B}} = \{w\} \cup \mathcal{B}$ è una base adatta.
Per concludere, basta procedere con l'algoritmo di Gram-Schmidt per assicurarsi che la base sia anche ortonormale.

6.1. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f^3$. Si dimostri che esiste una base di V in cui la matrice associata a f è del tipo:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right],$$

con $A^2 = 0$.

Se $f^2 = f^3$, allora $q_f(x) \mid x^2(x-1)$. I casi sono molteplici:

- $q_f(x) = x$. In questo caso $M = 0$ è un caso limite che comunque rientra in quelli contemplati;
- $q_f(x) = (x-1)$. In questo caso $M = I$, altro caso limite che comunque è valido.

(Si noti che finora $M_B^B(f)$ è del tipo cercato).

- $q_f(x) = x(x-1)$. In questo caso f è un proiettore. Sappiamo già che:
$\exists\ B$ di V t.c. $M_B^B(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$,
e questo rientra nelle forme riconosciute valide;
- $q_f(x) = x^2(x-1)$. In questo caso:
$\exists\ B$ di V t.c.:
$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right],$$
con A matrice in forma di Jordan relativa all'autovalore 0. In particolare, essendo l'esponente di x nel polinomio minimo 2, risulta che $A \neq 0$, $A^2 = 0$: equivalentemente, il blocco di Jordan di taglia massima è 2×2, ed è assicurata la presenza di almeno uno di questi blocchi 2×2.

126. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice avente tutti gli autovalori reali e due a due distinti e sia $B \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice tale che $AB = BA$.
- Dimostrare che B è diagonalizzabile.
- Dimostrare che esiste un unico polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leq n-1$, tale che $B = P(A)$.

Dato che ha tutti gli autovalori distinti:
$\exists\ N \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $N^{-1} A N = D_A \in D(n, \mathbb{R})$
Sia $C = N^{-1} B N$.
Allora:

$$D_1 C = C D_1$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 C^1 & \Big| & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 C_1 \\ \hline \vdots \end{bmatrix}$$

Allora C dev'essere diagonale:

$\forall\, i,j = 1 \dots n,\ i \neq j :\ C_{ij} = 0$

Allora B, simile a C, è diagonalizzabile.

Le matrici $Id, \dots, {}^{n-1}$ sono linearmente indipendenti.

Infatti, istituiamo il seguente isomorfismo:

$$L : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$i \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1^i \\ \vdots \\ \lambda_n^i \end{bmatrix}$$

La seguente matrice è invertibile, perché è di Vandermonde con autovalori diversi:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B} = \{ Id, D_1, \dots D_1^{n-1} \}$ è una base di $D(n, \mathbb{R})$.

Dunque esiste un'unica scrittura di C come combinazione lineare di $Id, D_1, \dots D^{n-1}$:

$\exists!\ a_0 \dots a_{n-1} \in \mathbb{R} \ni' C = a_0 Id + \dots + a_{n-1} D_1^{n-1} = P(D_1)$

Allora:

$$\begin{aligned} B = N^{-1} C N &= N^{-1} P(D_1) N = \\ &= P(N^{-1} D_1 N) = \\ &= P(A), \end{aligned}$$

con $\deg P(A) \leq n - 1$.

132. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, B simmetrica. Si dimostri allora che il polinomio $P(x) = \det(A + xB)$ ha grado minore o uguale a $\operatorname{rk} B$.

Dato che B è simmetrica:

$$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } P^t B P = P^{-1} B P = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{bmatrix} = C$$

In particolare, siano $c_1 \dots c_k \neq 0$, $c_{k+1}, \dots, c_n = 0$, ossia $\operatorname{rk} B = k$. Sia $E = P^t A P = P^{-1} A P$.

Allora:

$$\det(A + xB) = \det(P^{-1}(A + xB)P) =$$
$$= \det(P^{-1}AP + P^{-1} x B P) = \det(E + xC)$$

Riconduciamo a determinare il seguente polinomio:

$$M(E + xC) = \begin{bmatrix} a_{11} + c_1 x & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & \ddots & & \\ & * & & a_{kk} + c_k x & \\ & & & & a_{k+1\,k+1} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

che non può avere grado maggiore di $k = \operatorname{rk} B$, visto che i termini del tipo $(a + bx)$ sono esattamente k.

95. Per ogni $\sigma \in S_n$ sia R_σ la matrice associata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^n$) all'applicazione lineare che agisce permutando secondo σ i vettori della base canonica, ossia $R_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$. Si dimostri che ogni matrice R_σ è diagonalizzabile.

Sia $\sigma \in S_n$. Allora $B = S \sqcup J$, ove $\forall\, e_i \in J$: $\sigma(e_i) = e_i$. È chiaro che $\forall\, e_i \in J$: $e_i \in V_1(R_\sigma)$.

Restringiamoci a S. Dato che ogni permutazione è composizione di cicli disgiunti (e la decomposizione è unica), ci possiamo ridurre mediante un riordinamento della base, a una serie di blocchi del tipo:

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dato che N_i è una matrice compagna, si ha $p_{N_i}(x) = q_{N_i}(x) = t^{m_i} - 1$.

Questo polinomio ha m_i radici distinte, ovvero:

$$1, \zeta_{m_i}, \zeta_{m_i}^2, \ldots, \zeta_{m_i}^{m_i-1}$$

Dunque ogni blocco, avendo m_i radici distinte, è diagonalizzabile. Allora R_σ è diagonalizzabile.

8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f: V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\dim \operatorname{Imm} f = k < n$. Si dimostri che esistono due applicazioni lineari f_1, f_2 in $\operatorname{End}(V)$ tali che $f = f_1 + f_2$ e $\operatorname{Imm} f_i \neq \operatorname{Imm} f$ per $i = 1, 2$.

Sia $\{u_1, \ldots, u_{n-k}\}$ una base di $\operatorname{Ker} f$. Completiamola a base di V:

$$\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_{n-k}, v_{n-k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Sia ora $\{f(v_{n-k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ una base di $\operatorname{Imm} f$, completiamola a base di V:

$$\mathcal{D} = \{f(v_{n-k+1}), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_{n-k}\}$$

Ora, si ha:

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Imponiamo allora:

$\forall\, v_i,\ i = n-k+1, \ldots, n$: $f_1(v_i) = f_2(v_i) = \frac{1}{2} f(v_i)$

$\forall\, u_i,\ i = 1, \ldots, n-k$: $f_1(u_i) = -f_2(u_i) = w_i$

Allora $f_1 + f_2 = f$, per costruzione, e inoltre f_1 e f_2 sono invertibili, da cui $\operatorname{Imm} f_i \neq \operatorname{Imm} f$ $\forall\, i = 1, 2$.

39. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $P: V \to V$ una proiezione, ossia una applicazione lineare tale che $P^2 = P$. Si dimostri che P^* è una proiezione, e che i seguenti fatti sono equivalenti:

- P è una proiezione ortogonale su W sottospazio di V;
- $P = P^*$;
- $PP^* = P^*P$;

Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale per $\langle , \rangle$. Allora:

$$P^* = P^t$$

$$P^{*2} = (P^t)^2 = P^t P^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P^{*t})^2 = P P = P = P^{*t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P^*)^2 = P^*$$

Ora:

- sia P una proiezione ortogonale su $W = \operatorname{Imm} P$. Allora $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Imm} P^\perp$. Dunque, se per ogni $v \in V$ si ha $v = w + z$, $w \in \operatorname{Ker} P$, $z \in \operatorname{Im} P$, si ha che
  $\langle P(v_1), v_2 \rangle = \langle z_1, v_2 \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$;
  $\langle v_1, P(v_2) \rangle = \langle v_1, z_2 \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$,
  da cui $P^* = P$.
  Viceversa, se $P = P^*$, allora $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^* = \operatorname{Im} P^\perp$, da cui P è una proiezione ortogonale.
- Se $P = P^*$ banalmente $PP^* = P^*P$. Viceversa, siano P e P^* proiezioni tali che commutano. Allora:
  $\forall v \in V$: $\langle Pv, Pv \rangle = \langle v, P^*Pv \rangle = \langle v, PP^*v \rangle = \langle P^*v, P^*v \rangle$,
  ossia $Pv = 0 \Leftrightarrow P^*v = 0$, dunque $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$.
  Ma allora:
  $$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} P^{*\perp} = \operatorname{Ker} P^\perp = \operatorname{Im} P^*$$

1140. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ non nulla. Si consideri:

$$L : M(n, \mathbb{K}) \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$$
$$L : X \longrightarrow (\det A)\, X - \operatorname{tr} X\, A$$

Si discuta la diagonalizzabilità di L al variare di A.

Innanzitutto notiamo che esiste un autospazio di dimensione (n^2+1) o maggiore relativo all'autovalore $\det A$. Infatti lo spazio delle matrici aventi traccia nulla, di dimensione (n^2-1), è incluso in $V_{\det A}(X)$.

Ora se $\operatorname{tr} A \neq 0$, allora A è autovettore relativo all'autovalore $(\det A - \operatorname{tr} A)$, e L è sicuramente diagonalizzabile.

Sia ora $\operatorname{tr} A = 0$. Supponiamo che esista X_0 autovettore per L, $X_0 \notin W = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Allora:

$$L(X_0) = (\det A)\, X_0 - \operatorname{tr} X_0\, A = \lambda X_0$$
$$(\det A - \lambda)\, X_0 = \operatorname{tr} X_0\, A$$

Allora $\det A - \lambda \neq 0$ visto che $\operatorname{tr} X_0\, A \neq 0$. Passando alla traccia:

$$(\det A - \lambda) \operatorname{tr} X_0 = \operatorname{tr} X_0 \operatorname{tr} A = 0,$$

e ciò è assurdo.
In questo caso, dunque, L non è diagonalizzabile.

145. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare definito positivo, e sia $f: V \to V$ una applicazione lineare. Si calcolino $i_+(b)$, $i_-(b)$, $i_0(b)$, ove $b: V \times V \to \mathbb{R}$ è definito da:

$$b(x,y) = \langle f(x), f(y) \rangle \quad \forall\, x, y \in V$$

Partiamo dal presupposto che $i_-(b)$, visto che il prodotto scalare associato è definito positivo, perciò non assume valori negativi per nessuna coppia di vettori di V, quindi a maggior ragione di $\mathrm{Imm}\, f$.

Studiamo $\mathrm{Rad}\, b$. Denotiamo con F il seguente insieme:

$$F = \{ x \in V \mid f(x) \in \mathrm{Imm}\, f^{\perp} \}$$

Il nostro intento è di dimostrare che $F = \mathrm{Ker}\, f$.

Dunque:

$\forall\, x \in \mathrm{Ker}\, f: f(x) = 0 \in \mathrm{Imm}\, f^{\perp} \Rightarrow x \in F$;

$\forall\, x \in F: f(x) \in \mathrm{Imm}\, f \cap \mathrm{Imm}\, f^{\perp} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$
$x \in \mathrm{Ker}\, f$

A questo punto:

$x \in \mathrm{Rad}\, b \Leftrightarrow b(x,y) = 0 \ \forall\, y \in V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0 \ \forall\, y \in V \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Imm}\, f^{\perp} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in F = \mathrm{Ker}\, f$

Allora $\sigma(b) = (\dim \mathrm{Imm}\, f, 0, \dim \mathrm{Ker}\, f)$.

146. Sia V uno spazio vettoriale e $f: V \to V$ una applicazione lineare non nulla. Si dimostri che

- se f è nilpotente, allora non esistono sottospazi $W \subseteq V$ invarianti per f e tali che $V = W \oplus \mathrm{Ker}\, f$
- se per ogni sottospazio $W \subseteq V$ f-invariante e non costituito dal solo 0 si ha che $W \cap \mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, allora f è nilpotente.

- Sia $W \subseteq V$ tale che $W \oplus \mathrm{Ker}\, f = V$. Allora $f|_W$ è invertibile. Ma dato che $\exists\, m$ t.c. $f^m \equiv 0$, allora anche $f^m|_W \equiv 0$, e ciò è assurdo. Dunque non esistono sottospazi così fatti.

- Partiamo dal presupposto che:
  $\exists\, k \in \mathbb{N} \ni' \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \ni' \operatorname{Imm} f^k = \operatorname{Imm} f^{k+1}$

Dimostriamo ora che $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Imm} f^k$. Così facendo, dimostriamo che $\operatorname{Imm} f^k$ è f-invariante, e dato che per ipotesi $\forall\, W \subseteq V$, $W \neq \{0\}$, W f-invariante, $W \cap \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, allora $\operatorname{Imm} f^k = \{0\}$, da cui $f^k = 0$, ossia f è nilpotente.
Dunque:

$x \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Imm} f^k \Rightarrow \exists\, z \in V \ni' f^k(z) = x,\ f^k(x) = 0 \Rightarrow$
$f^{2k}(z) = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k \Rightarrow f^k(z) = 0 \Rightarrow$
$x = 0$

98. Si dimostri che, se $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ ha tutti gli autovalori reali e $A^p = I$ per un $p \in \mathbb{N}$, allora A è diagonalizzabile.

Se $A^p = I$, allora $q_A(x) \mid x^p - 1$. Le radici di $p(x) = x^p - 1$ sono tutte e sole le radici p-esime dell'unità, in particolare 1 e (se p è pari) -1.
Allora:

- p è pari: $q_f(x) \mid (x-1)(x+1)$, da cui A è simile a una matrice:

$$A \sim B = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & I_h \end{array}\right],\ h, k \geq 0,$$

dunque è diagonalizzabile;

- p è dispari: $q_f(x) \mid (x-1) \Rightarrow q_f(x) = (x-1)$. Allora $A = I$.

104. Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Si dimostri che A e B si diagonalizzano simultaneamente per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se $A, B \in S(n, \mathbb{R})$ e $AB = BA$.

Supponiamo che:

$$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } P^{-1}AP = P^t AP = D_1 \in D(n, \mathbb{R})$$
$$P^{-1}BP = P^t BP = D_2 \in D(n, \mathbb{R})$$

Allora $A, B \in S(n, \mathbb{R})$, perché ognuna è congruente ad una matrice simmetrica. Inoltre:

$$AB = PD_1 \cancel{P^{-1}P} D_2 P^{-1} = PD_1 D_2 P^{-1} = PD_2 D_1 P^{-1} = PD_2 P^{-1} P D_1 P^{-1} = BA$$

Viceversa, siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$ tali che $AB = BA$.
Per il teorema spettrale reale applicato ad A:

$$V = V_{\lambda_1}(A) \hat{\oplus} V_{\lambda_2}(A) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} V_{\lambda_k}(A)$$

Ora, per ogni $V_{\lambda_i}(A)$:

$$v \in V_{\lambda_i}(A) \Rightarrow ABv = BAv = \lambda_i Bv \Rightarrow B|_{V_{\lambda_i}(A)} \subseteq V_{\lambda_i}(A)$$

Essendo $V_{\lambda_i}(A)$ B-invariante, $B|_{V_{\lambda_i}(A)}$ è diagonalizzabile. Esiste dunque una base comune di autovettori, che mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt può essere ortonormale per il prodotto scalare standard. Dunque, ripetendo tutto ciò per ogni autospazio, si ha quanto voluto:

$$\exists\, P \in O(n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } P^{-1}AP = D_1 \in D(n, \mathbb{R})$$
$$P^{-1}BP = D_2 \in D(n, \mathbb{R})$$

105. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$. È vero che se esiste una base di Jordan simultanea per A e B, allora $AB = BA$? È vero il contrario?

La prima implicazione è falsa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Anche la seconda implicazione è falsa, e per trovare un controesempio basta ricercare due matrici che abbiano la stessa forma di Jordan, come ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrambe hanno la forma di Jordan $J = A$.
Allora, detta M la matrice di cambio di base simultanea, si ha:

$$M^{-1} A M = M^{-1} B M = J \Rightarrow A = B = M J M^{-1},$$

ma evidentemente $A \neq B$.

80. Sia A una matrice di $M(n, \mathbb{K})$. Si dimostri che, se $A \neq \lambda I$ allora A è simile ad una matrice della forma:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & \operatorname{tr} A \end{bmatrix}$$

Procediamo per induzione su $n = \dim V$.
CASO INIZIALE
$n = 1$
L'asserto è banalmente vero.

$n = 2$
Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A \neq \lambda I$. Supponiamo $a, d \neq 0$.
Dato che $A \neq \lambda I$, esiste $v \in V$ t.c. $\{v, Av\}$ è una base di V. Allora $M_{\{v, Av\}}^{\{v, Av\}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 1 & \operatorname{tr} A \end{bmatrix}$

PASSO INDUTTIVO
Sfruttando la stessa idea, si ha che $\exists\, v \in V$ tale che $\{v, Av\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti. Completiamo dunque a base di V, ottenendo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix},$$

e per ipotesi induttiva la tesi.

In teoria occorre che $B = \lambda I$: sia $B = \lambda I$. Allora si completa una base in questo modo:

$$\mathcal{B} \{ v, Av, v+v_3, \dots, v_n \}$$

Vediamo $\bar{B} \neq \lambda I$, visto che:

$$A(v_1 + v_3) = Av + a_3 v + \lambda v_3 = (a_3 - \lambda) v_1 + Av + \lambda (v_1 + v_3),$$

visto che se $B = \lambda I$ allora $A(v_3) = a_3 v + \lambda v_3$.

52. Trovare tutte le possibili forme di Jordan (o di Jordan reale) di un'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $A^6 = \mathrm{Id}$.

Si ha che $q_A(x) \mid x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) =$
$= (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Dunque:

- $q_A(x) = (x+1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
- $q_A(x) = (x-1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- $q_A(x) = (x-1)(x+1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
- $q_A(x) = (x^2 + x + 1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;
- $q_A(x) = (x^2 - x + 1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

21. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che $\langle , \rangle|_W$ sia non degenere. Si dimostri che:

$$V = W \oplus W^\perp$$

L'ortogonalità è ovvia. Per una nota formula, essendo $\Phi|_W$ non degenere, $\mathrm{Rad}\,\Phi \cap W = \{0\}$, dunque $\dim W^\perp =$
$= \dim V - \dim W$. Per concludere, essendo $\mathrm{Rad}\,\Phi|_W = \{0\}$,

$x \in W \cap W^\perp \Rightarrow \langle x, w \rangle = 0 \ \forall\, w \in W \Rightarrow x \in \mathrm{Rad}\,\Phi|_W \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$.

41. Sia J un blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda \neq 0$ di ordine n. Trovare la forma di Jordan di J^k, $k \in \mathbb{N}$.

Notiamo che:

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \bullet & & * \\ & \lambda^k & \bullet & \\ & & \ddots & \bullet \\ 0 & & & \lambda^k \end{bmatrix} \Rightarrow Sp(J^k) = \{\lambda^k\}, \quad \bullet = k\lambda^{k-1} \neq 0$$

Allora $\dim V_{\lambda^k}(J^k) = 1$, da cui:

$$J(J^k) = \begin{bmatrix} \lambda^k & 1 & & 0 \\ & \lambda^k & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$

42. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $f: V \to V$ una applicazione lineare diagonalizzabile. Siano $\lambda_1 \dots \lambda_k$ gli autovalori di f. Si dimostri che, per ogni $W \leq V$ sottospazio invariante per f, si ha $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, con $W_i = W \cap V_{\lambda_i}$

Sia $\mathcal{B}$ una base di W. Sia $\mathcal{A}$ una base di autovettori di V. Possiamo allora estendere $\mathcal{B}$ a base di V usando gli autovettori di $\mathcal{A}$ per estendere. Sia $\mathcal{G}$ la nuova base. Si ha:

$$N = M_{\mathcal{G}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right],$$

con $B \in \Delta(m, \mathbb{R})$

Da qui risulta che, perché N sia diagonalizzabile, è necessario e sufficiente che lo sia A. Allora esiste una base di W costituita da autovettori, ossia:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k.$$

10) Si dimostri che ogni matrice ortogonale 2×2 è del tipo:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad o \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$.

Si dimostri inoltre che R_θ è diagonalizzabile se e solo se θ è un multiplo intero di π e che S_θ è sempre diagonalizzabile.

Si descrivano geometricamente le applicazioni date dalle matrici R_θ e S_θ.

Sappiamo che le isometrie che lasciano fisso l'origine sono solo le simmetrie e le rotazioni.
In più, la composizione di simmetrie è una rotazione, la composizione di rotazioni è una rotazione, la composizione di una simmetria con una rotazione è una simmetria.
Dunque, supponiamo di trattare una rotazione di un angolo $\theta \in \mathbb{R}$. Allora:

$$R_\theta e_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \quad R_\theta e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$M_E^E(R_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Supponiamo invece di parlare di una simmetria attorno a una retta che forma un angolo $\theta/2$ con l'asse delle ascisse. Allora:

$$S_\theta e_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \quad S_\theta e_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)$$

$$M_E^E(S_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Per concludere, notiamo che

$$p_{S_\theta}(x) = x^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$p_{R_\theta}(x) = x^2 + 2x\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + 2x\cos\theta + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Dunque S_θ è diagonalizzabile, e R_θ è diagonalizzabile se e solo se $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. Sia $A \in O_2$. Si dimostri che:

- se A è la matrice di una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora gli autospazi complessi di A non dipendono da θ;
- se $(i, 1)^t$ è autovettore per A, allora A è la matrice di una rotazione.

Sia $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\theta \neq k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Il polinomio caratteristico è $P_A(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$, le cui radici complesse coniugate sono:

$$\lambda = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \quad \bar{\lambda} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Dunque, si tratta di effettuare alcuni calcoli:

$$\begin{cases} \cos\theta\, x + \sin\theta\, y = (\cos\theta + i\sin\theta)\, x \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = (\cos\theta + i\sin\theta)\, y \end{cases} \qquad \begin{cases} (y + ix)\sin\theta = 0 \\ (x - iy)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dato che $\sin\theta \neq 0$, allora $(y + ix) = 0$, ossia:

$$V_\lambda = \mathrm{Span}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Analogamente, si ha che, se $(x, y) \in V_{\bar{\lambda}}$, allora $(y - ix) = 0$, ossia:

$$V_{\bar{\lambda}} = \mathrm{Span}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

dunque gli autospazi complessi non dipendono da θ.

Se $v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore e S_θ è una simmetria, allora $\mathrm{Span}\, v$ è un autospazio, che non contiene vettori reali, ma che dovrebbe contenerne perché S_θ è diagonalizzabile. Allora se v è un autovettore, A è una matrice di rotazione.

75. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata; sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da:

$$b(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i ,$$

ove $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i$.

Si consideri:

$$\delta_b : V \longrightarrow V^*$$

$$\delta_b : P \longrightarrow b_P ,$$

ove $b_P(Q) = b(P, Q)$. Si dimostri che:

$f \in \operatorname{Imm} \delta_b \Leftrightarrow f(x^i) \neq 0$ per un numero finito di indici

Sia $f \in \operatorname{Imm} \delta_b$. Allora $f = b_p$ per qualche p polinomio in $\mathbb{R}[x]$. Sia $m = \deg p$. Allora notiamo che:

$\forall i > m : f(x^i) = b_p(x^i) = 0$,

dunque $f(x^i) \neq 0$ per un numero finito di indici.

Viceversa, sia $f(x^i) \neq 0$ per un numero finito di indici. Allora si può risalire al polinomio tale che $\delta_b(p) = f$ valutando le immagini di $f(x^i)$ al variare di $i \in \mathbb{N}$. Dunque $f \in \operatorname{Imm} \delta_b$.

113. Sia $W = \{ X \in M(n, \mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0 \}$ e sia A una matrice di $M(n, \mathbb{K})$ tale che $\operatorname{tr}(AX) = 0 \ \forall X \in W$. Si dimostri allora che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $A = \lambda I$.

Consideriamo:

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(A, B) \longrightarrow \operatorname{tr}(AB)$$

Questo prodotto scalare è non degenere. Dunque [illegible]:

$$\dim W^\perp = \dim [illegible] + \dim [illegible]$$

$$\dim W^\perp = 1$$

A questo punto basta notare che è necessario che $A \in W^\perp$, e che I è una matrice scalare, per affermare che:

$$W^{\perp} = \mathrm{Span}(I)$$
$$A = \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

148. Sia W un sottospazio vettoriale non nullo di $M(n, \mathbb{K})$ tale che $\forall A \in W,\ \forall B \in M(n, \mathbb{K}) : AB, BA \in W$. Si dimostri che allora $W = M(n, \mathbb{K})$. Si dimostri poi che se $f : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$ è un'applicazione lineare tale che $\forall A, B \in M(n, \mathbb{K}) : f(AB) = f(A) f(B)$, allora f o è un isomorfismo oppure è identicamente nulla.

Notiamo che, se $A \neq 0$, $A \in W$, allora $[A]_{ij}$ per qualche i, j. Allora:

$\forall h, k : \alpha E_{h,k} = E_{hi} A E_{jk} \Rightarrow E_{h,k} \in W$

Allora $W = M(n, \mathbb{K})$.

Ora, sia f una funzione con quelle proprietà. Allora, se $A \neq 0 \in \mathrm{Ker}\, f$,

$$\left.\begin{aligned} f(AB) &= f(A) f(B) \\ f(BA) &= f(B) f(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB, BA \in \mathrm{Ker}\, f,$$

dunque f o è un isomorfismo, oppure $f = 0$.

97. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\, ,\, \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ tale che $f^* f = f f^*$. Si dimostri che $V = \mathrm{Ker}\, f \hat{\oplus} \mathrm{Imm}\, f$

Dato che $f f^* = f^* f$:

$\forall v \in V : \langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, f^* f(v) \rangle = \langle v, f f^*(v) \rangle =$
$= \langle f^*(v), f^*(v) \rangle \Rightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f^*(v) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^*$

A questo punto:

$$V = \mathrm{Imm}\, f \hat{\oplus} \mathrm{Imm}\, f^{\perp} = \mathrm{Imm}\, f \hat{\oplus} \mathrm{Ker}\, f^*$$
$$V = \mathrm{Imm}\, f \hat{\oplus} \mathrm{Ker}\, f.$$

90. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ e si supponga che esista p, $1 \leq p \leq n$, tale che:

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \ldots = \operatorname{tr} A^{p-1} = 0$$

Si dimostri che A è nilpotente, oppure ha almeno p autovalori distinti.

Non è restrittivo passare a $J(A)$. A questo punto, detti $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ gli autovalori distinti di $J(A)$, di molteplicità $\mu_1 \ldots \mu_k$, si ha:

$$\begin{cases} \mu_1 \lambda_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k = 0 \\ \mu_1 \lambda_1^2 + \ldots + \mu_k \lambda_k^2 = 0 \\ \quad \vdots \\ \mu_1 \lambda_1^{p-1} \ldots \mu_k \lambda_k^{p-1} = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $k \leq p-1$. Consideriamo allora le prime k equazioni. Si ha, in termini matriciali:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_k \lambda_k \end{bmatrix} = 0$$

Allora, essendo la matrice indotta una matrice di Vandermonde invertibile, necessariamente l'unico autovalore è 0.

Dunque A, se non ha più di $p-1$ autovalori, ossia almeno p autovalori distinti, è nilpotente.

91. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$, e si supponga che:

$$\operatorname{tr} A = \ldots = \operatorname{tr} A^n = 0$$

Si dimostri che allora A è nilpotente.

Ragionando come nell'esercizio, si giunge alla conclusione che A è nilpotente o ha almeno $(n+1)$ autovalori. Il secondo caso è però assurdo, essendo $\dim \mathbb{C}^n = n$. Dunque A è nilpotente.

92. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$, e si supponga che:

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \dots = \operatorname{tr} A^{n-1} = 0, \quad \operatorname{tr} A^n \neq 0$$

Si dimostri che A è diagonalizzabile.

Ragionando come negli esercizi precedenti, si ha che A è nilpotente, oppure ha n autovalori distinti. Ma $\operatorname{tr} A^n \neq 0$, dunque A non è nilpotente. Allora A, avendo n autovalori distinti, dunque ognuno di molteplicità algebrica e geometrica 1, è diagonalizzabile.

UNICITÀ DELLA FORMA CANONICA DI JORDAN

L'esistenza della forma canonica di Jordan è stata dimostrata in precedenza: vogliamo qui effettuare qualche considerazione sull'unicità.
Restringendoci al caso in cui $g \in End(V)$ sia un endomorfismo nilpotente, diamo enunciamo il Teorema di esistenza e unicità della forma normale di Jordan.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e sia $g \in End(V)$ una applicazione lineare nilpotente, dunque avente polinomio caratteristico $P_g(x) = \pm x^m$, ove $m = \dim V$. Allora:

- (ESISTENZA) Esiste una decomposizione:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{n} Z_j ,$$

e per ogni $j = 1 \dots n$ una base $\mathcal{B}_j$ di Z_j tale che Z_j è g-invariante e:

$$M^{\mathcal{B}_j}_{\mathcal{B}_j}(g|_{Z_j}) = J_0(t_j),$$

ove $t_j = \dim Z_j$.
La base $\mathcal{B}$ ottenuta unendo tutte le basi $\mathcal{B}_j$, $j = 1 \dots n$ è detta una "base di Jordan per g"; si ha che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ è una matrice triangolare superiore, diagonale a blocchi, ove ogni blocco è del tipo $J_0(t_j)$. Questa matrice è detta FORMA NORMALE DI JORDAN per g;

- (UNICITÀ) La forma normale di Jordan è unica a meno di permutazioni dei blocchi. Possiamo dunque standardizzare "la" forma normale di Jordan, imponendo ad esempio che i blocchi siano disposti in ordine decrescente di taglia;

- (INVARIANZA COMPLETA) Se $g \sim h$ con $g, h \in End(V)$, allora essi hanno la stessa forma di Jordan; se invece $g \not\sim h$, allora le forme di Jordan di g e h non si possono ottenere una dall'altra permutando i blocchi.

Una volta ottenuta la forma di Jordan di $g \in End(V)$, possiamo definire in modo naturale "a posteriori" questa funzione:

$$b_g : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N},$$

ove $b_g(k)$ è, per ogni $k = 1 \dots n$, il numero dei blocchi di taglia k presenti nella forma normale di Jordan per g.
Vorremmo però ricavare "a priori" questo invariante completo. Un'altra funzione che possiamo definire a partire dalla stringa di invarianti $[0, t, (d_1 < \dots < d_t = n)]$ è la seguente:

$$d_g : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N}$$

ove per ogni $k = 1 \dots n$, si ha $d_g(k) = \dim Ker(g^k)$.

In linea di principio, le due funzioni, che sono di fatto invarianti completi, le due funzioni dovrebbero essere "ricavabili" l'una dall'altra.

Andremo poi a caratterizzare, una volta risolto il primo quesito, tutte le coppie di funzioni:

$$d : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N} \quad , \quad b : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N}$$

tali che esiste $g \in End(V)$ nilpotente ($\dim V = n$), tale che $d = d_g$ e $b = b_g$. Tali funzioni saranno dette "realizzabili".

Riguardo al secondo quesito, abbiamo già una risposta per le funzioni b realizzabili. Infatti b è realizzabile, ed è anche abbastanza intuitivo, se e solo se:

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) \cdot k = n$$

Nella prossima proposizione, riassumiamo alcune condizioni necessarie su $d : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N}$ già di nostra conoscenza.

PROPOSIZIONE

Se $d : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N}$ è realizzabile, allora:

- $d(1) > 0$;
- esiste $1 \leq r \leq n$ tale che:
  - $\forall\, k < r : d(k) < d(k+1)$;
  - $\forall\, k \geq r : d(k) = d(r) = n$.

Dim.

Se d è realizzabile, allora:

- $d(1) = d_g(1) = \dim \operatorname{Ker} g = \dim V_0(g) > 0$, visto che 0 è (l'unico) autovalore per g;
- se $d = d_g$, ricordando le considerazioni sulle inclusioni tra nuclei, si ha la tesi ponendo $r = r(g)$, ove $r(g)$ è l'esponente del termine (x) in $q_g(x)$, c.v.d.

Iniziamo allora a istituire alcune relazioni tra b_g e d_g.

LEMMA

Se definiamo $\beta(g) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} b_g(k)$ il numero totale di blocchi di $J(g)$, allora, essendo $\dim \operatorname{Ker}(g|_{R_i}) = 1 \ \forall\, i$, ove R_i è l'i-esimo blocco di Jordan di $J(g)$, allora:

$$\beta(g) = d_g(1)$$

Inoltre, se $r = r(g)$ è l'esponente di (x) in $q_g(x)$, allora $b_g(r) > 0$, mentre $b_g(k) = 0 \ \forall\, k > r$

Notiamo subito che queste condizioni non sono sufficienti. Ad esempio, se $n = 4$, la funzione $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 4$ e $d(4) = 4$ rispetta le condizioni ma non è realizzabile, in quanto se $d(1) = 1$, allora necessariamente $J(g)$ è un blocco di Jordan di taglia n, dunque si ha $d(k) = k \ \forall\, k = 1 \dots n$.

Indichiamo ora con $\mathbb{N}^n$ l'insieme di tutte le funzioni $\eta : \{1 \dots n\} \to \mathbb{N}$. Poniamo

$$\operatorname{Rel}_b(n) = \left\{ b \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} b(k) \cdot k = n \right\},$$

ossia il sottoinsieme di $\mathbb{N}^n$ formato dalle funzioni b realizzabili.

Vogliamo dunque determinare una funzione così definita:

$$\hat{\delta} : Rel_b(n) \to \mathbb{N}$$

$$Rel_d(n) \overset{def}{=} Imm(\hat{\delta})$$

In altre parole, vogliamo determinare una funzione:

$$\delta : Rel_b(n) \to Rel_d(n)$$

che sia bigettiva, e vogliamo poi descrivere $Rel_d(n)$ come sottogruppo di $\mathbb{N}^n$ nel modo più esplicito possibile, e determinare anche $\delta^{-1} : Rel_d(n) \to Rel_b(n)$.

Sia b una funzione realizzabile. Sia t il massimo indice di $\{1 \dots n\}$ tale che $b(t) > 0$. Sia inoltre β il numero dei blocchi.

Sappiamo già che:

- $d(1) = \beta$;
- $d(k) < d(k+1) \ \forall \ k < t$;
- $d(k) = d(t) = n \ \forall \ k \geq t$.

Definiamo ora con la notazione $D(A_1 \dots A_s)$ una matrice diagonale a blocchi aventi lungo la diagonale i blocchi $A_1 \dots A_s$, quadrati e non necessariamente di Jordan. Allora:

$$J = J(b) = D(J_1, \dots, J_\beta)$$

$$J^k = D(J_1^k, \dots, J_\beta^k) \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

Allora, notando che:

$$rk(J_0(h)^k) = \max\{h-k, 0\},$$

si ha che queste osservazioni determinano univocamente la funzione δ. Infatti:

$$\forall \ k = 1 \dots n : d(k) = \dim Ker J^k = n - rk J^k =$$

$$= n - \sum_{i=1}^{\beta} rk((J_i)^k)$$

Sappiamo quindi calcolare esplicitamente:

$$\delta : Rel_b(n) \to Rel_d(n)$$

Ex. Consideriamo $m = 5$, $b = (0, 1, 1, 0, 0)$.

Allora $d = (2, d(2), 5, 5, 5)$. Determiniamo $d(2)$.

Si ha:

$$d(2) = \operatorname{Ker}(J^2) = m - \operatorname{rk} J_0(2)^2 - \operatorname{rk} J_0(3)^2 = 4,$$

dunque $d = (2, 4, 5, 5, 5)$.

Analizziamo ora la funzione inversa:

$$S^{-1} : Rel_d(m) \longrightarrow Rel_b(m)$$

Iniziamo con alcune definizioni. Per ogni $1 \leq r \leq m$:

$$\mathcal{E}_d(r, m) = \{ d \in \mathbb{N}^m \mid d(1) < \dots < d(r) = m = \dots = d(m) \}$$
$$\mathcal{E}_b(r, m) = \{ b \in \mathbb{N}^m \mid b(r) > 0,\ b(r+1) = \dots = b(m) = 0 \}$$

Si ha, per ogni $1 \leq r \leq m$:

$$Rel_d(r, m) = Rel_d(m) \cap \mathcal{E}_d(r, m)$$
$$Rel_b(r, m) = Rel_b(m) \cap \mathcal{E}_b(r, m)$$

Gli insiemi $Rel_d(r, m)$ e $Rel_b(r, m)$, con $1 \leq r \leq m$ partizionano rispettivamente $Rel_d(m)$ e $Rel_b(m)$:

$$Rel_d(m) = \coprod_{i=1}^{m} Rel_d(r, m)$$
$$Rel_b(m) = \coprod_{i=1}^{m} Rel_b(r, m)$$

Inoltre è evidente che:

$\forall\ 1 \leq r \leq m :\ S(Rel_b(r, m)) = Rel_d(r, m)$

Dunque ci possiamo limitare a studiare la seguente restrizione:

$$S^{-1} : Rel_d(r, m) \longrightarrow Rel_b(r, m)$$

Ma per il Teorema di esistenza e unicità della forma normale di Jordan, si ha in modo univoco:

- $b(k) = 0 \quad \forall\ k > r$;
- $b(r) = d(r) - d(r-1) = m - d(r-1)$;
- $b(r-1) = d(r-1) - d(r-2) - b(r) = 2d(r-1) - (d(r) + d(r-2))$;
- $\forall\ 1 < k < r :\ b(k) = d(k) - d(k-1) - b(k+1)$;
- $b(1) = d(1) - \sum_{k=2}^{r} b(k)$.

Possiamo ora estendere δ^1 a una funzione che ammetta anche valori negativi e definire $Rel_d(r, n)$ come il sottoinsieme di $E_d(r, n)$ la cui immagine è a valori non negativi, ossia appartiene a $Rel_1(r, n)$:

$$\rho_r : E_d(r, n) \longrightarrow \mathbb{Z}^m$$
$$\rho_r(d) = (\rho_r(d)_1, \dots, \rho_r(d)_m)$$

Ci resta dunque da imporre un sistema di disequazioni intere unite ad un'equazione, sempre a valori interi:

$$\forall\ 1 \leq k \leq r-1 : \rho_r(d)_k \geq 0$$
$$\sum_{k=1}^{r} \rho_r(k) \cdot k = n,$$

in modo che le condizioni di positività siano soddisfatte, e la rimetta realizzabile.