Scalatura di Matrici

Luca Ferragina

Università di Pisa

21 Luglio 2017

Piano della presentazione

1. Il problema della scalatura
   - Applicazioni
   - Definizioni di base
2. Scalatura e ottimizzazione
   - Scalatura troncata
   - Scalatura di equivalenza
   - Un risultato teorico di esistenza
3. Algoritmo e sperimentazione
   - Algoritmo di discesa sul duale
   - Sperimentazione numerica

Applicazione 1: Matrici di Contabilità sociale

Consideriamo un mercato chiuso composto da n agenti $\{1, \ldots, n\}$. Una SAM è una matrice X che registra il flusso di fondi attraverso il mercato, l'elemento X_{ij} rappresenta la quantità di denaro data dall'agente i all'agente j.

Problema

Supponiamo di sapere quanti fondi spende e riceve in totale ogni agente, ma di avere a disposizione solo una stima di ogni singolo scambio di fondi. Come calcolare X?

Problema

Supponiamo di conoscere X e di poter intervenire sul mercato per modificarla. Come ottenere un mercato bilanciato?

Applicazione 1: Matrici di Contabilità sociale

Consideriamo un mercato chiuso composto da n agenti $\{1, \ldots, n\}$.

Una SAM è una matrice X che registra il flusso di fondi attraverso il mercato, l'elemento X_{ij} rappresenta la quantità di denaro data dall'agente i all'agente j.

Problema

Supponiamo di sapere quanti fondi spende e riceve in totale ogni agente, ma di avere a disposizione solo una stima di ogni singolo scambio di fondi. Come calcolare X?

Problema

Supponiamo di conoscere X e di poter intervenire sul mercato per modificarla. Come ottenere un mercato bilanciato?

Applicazione 1: Matrici di Contabilità sociale

Consideriamo un mercato chiuso composto da n agenti $\{1, \ldots, n\}$. Una SAM è una matrice X che registra il flusso di fondi attraverso il mercato, l'elemento X_{ij} rappresenta la quantità di denaro data dall'agente i all'agente j.

Problema

Supponiamo di sapere quanti fondi spende e riceve in totale ogni agente, ma di avere a disposizione solo una stima di ogni singolo scambio di fondi. Come calcolare X?

Problema

Supponiamo di conoscere X e di poter intervenire sul mercato per modificarla. Come ottenere un mercato bilanciato?

Applicazione 1: Matrici di Contabilità sociale

Consideriamo un mercato chiuso composto da n agenti $\{1, \ldots, n\}$. Una SAM è una matrice X che registra il flusso di fondi attraverso il mercato, l'elemento X_{ij} rappresenta la quantità di denaro data dall'agente i all'agente j.

Problema

Supponiamo di sapere quanti fondi spende e riceve in totale ogni agente, ma di avere a disposizione solo una stima di ogni singolo scambio di fondi. Come calcolare X?

Problema

Supponiamo di conoscere X e di poter intervenire sul mercato per modificarla. Come ottenere un mercato bilanciato?

Applicazione 1: Matrici di Contabilità sociale

Consideriamo un mercato chiuso composto da n agenti $\{1, \dots, n\}$. Una SAM è una matrice X che registra il flusso di fondi attraverso il mercato, l'elemento X_{ij} rappresenta la quantità di denaro data dall'agente i all'agente j.

Problema

Supponiamo di sapere quanti fondi spende e riceve in totale ogni agente, ma di avere a disposizione solo una stima di ogni singolo scambio di fondi. Come calcolare X?

Problema

Supponiamo di conoscere X e di poter intervenire sul mercato per modificarla. Come ottenere un mercato bilanciato?

Applicazione 2: Pianificazione dei trasporti

Consideriamo un insieme di m origini e n destinazioni. Supponiamo di avere a disposizione il numero v_i di spostamenti totali in uscita da i per $1 \leq i \leq m$ e il numero v_{m+j} di spostamenti totali in entrata in j per $1 \leq j \leq n$ in un certo intervallo di tempo.

Problema

Come calcolare il numero di spostamenti X_{ij} dall'origine i alla destinazione j, supponendo di conoscerne una stima A_{ij}?

Applicazione 2: Pianificazione dei trasporti

Consideriamo un insieme di m origini e n destinazioni. Supponiamo di avere a disposizione il numero v_i di spostamenti totali in uscita da i per $1 \leq i \leq m$ e il numero v_{m+j} di spostamenti totali in entrata in j per $1 \leq j \leq n$ in un certo intervallo di tempo.

Problema

Come calcolare il numero di spostamenti X_{ij} dall'origine i alla destinazione j, supponendo di conoscerne una stima A_{ij}?

Applicazione 2: Pianificazione dei trasporti

Consideriamo un insieme di m origini e n destinazioni. Supponiamo di avere a disposizione il numero v_i di spostamenti totali in uscita da i per $1 \leq i \leq m$ e il numero v_{m+j} di spostamenti totali in entrata in j per $1 \leq j \leq n$ in un certo intervallo di tempo.

Problema

Come calcolare il numero di spostamenti X_{ij} dall'origine i alla destinazione j, supponendo di conoscerne una stima A_{ij}?

Applicazione 2: Pianificazione dei trasporti

Consideriamo un insieme di m origini e n destinazioni. Supponiamo di avere a disposizione il numero v_i di spostamenti totali in uscita da i per $1 \leq i \leq m$ e il numero v_{m+j} di spostamenti totali in entrata in j per $1 \leq j \leq n$ in un certo intervallo di tempo.

Problema

Come calcolare il numero di spostamenti X_{ij} dall'origine i alla destinazione j, supponendo di conoscerne una stima A_{ij}?

Bilanciamento di una matrice

Ciò che si intende informalmente per *bilanciamento* di una matrice è il seguente

Problema

Data in input una matrice rettangolare A calcolare una matrice X "vicina" ad A che soddisfi certe condizioni lineari sui propri elementi.

Nel nostro contesto X sarà "vicina" ad A se esistono due matrici diagonali D_1 e D_2 di taglia opportuna, con elementi positivi lungo la diagonale e tali che $X = D_1 A D_2$. Con questa richiesta il problema prende il nome di *scalatura* di una matrice.

Bilanciamento di una matrice

Ciò che si intende informalmente per *bilanciamento* di una matrice è il seguente

Problema

Data in input una matrice rettangolare A calcolare una matrice X "vicina" ad A che soddisfi certe condizioni lineari sui propri elementi.

Nel nostro contesto X sarà "vicina" ad A se esistono due matrici diagonali D_1 e D_2 di taglia opportuna, con elementi positivi lungo la diagonale e tali che $X = D_1 A D_2$. Con questa richiesta il problema prende il nome di *scalatura* di una matrice.

Bilanciamento di una matrice

Ciò che si intende informalmente per *bilanciamento* di una matrice è il seguente

Problema

Data in input una matrice rettangolare A calcolare una matrice X "vicina" ad A che soddisfi certe condizioni lineari sui propri elementi.

Nel nostro contesto X sarà "vicina" ad A se esistono due matrici diagonali D_1 e D_2 di taglia opportuna, con elementi positivi lungo la diagonale e tali che $X = D_1 A D_2$. Con questa richiesta il problema prende il nome di *scalatura* di una matrice.

Bilanciamento di una matrice

Ciò che si intende informalmente per *bilanciamento* di una matrice è il seguente

Problema

Data in input una matrice rettangolare A calcolare una matrice X "vicina" ad A che soddisfi certe condizioni lineari sui propri elementi.

Nel nostro contesto X sarà "vicina" ad A se esistono due matrici diagonali D_1 e D_2 di taglia opportuna, con elementi positivi lungo la diagonale e tali che $X = D_1 A D_2$. Con questa richiesta il problema prende il nome di *scalatura* di una matrice.

Scalatura di una matrice

Definizione

Una matrice quadrata $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta **bilanciata** se

$$X\mathbf{1}_n = X^T\mathbf{1}_n$$

Definizione

Date due matrici quadrate a valori reali non negativi $A, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e una matrice $U \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ a valori non negativi, la tripla (A, L, U) si dice **consistente** se

- $0 \leq L \leq U$
- esiste $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilanciata e tale che $L \leq X \leq U$ e $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$.

Scalatura di una matrice

Definizione

Una matrice quadrata $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta **bilanciata** se

$$X\mathbf{1}_n = X^T\mathbf{1}_n$$

Definizione

Date due matrici quadrate a valori reali non negativi $A, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e una matrice $U \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ a valori non negativi, la tripla (A, L, U) si dice **consistente** se

- $0 \leq L \leq U$
- esiste $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilanciata e tale che $L \leq X \leq U$ e $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$.

Problema (Scalatura troncata)

Data una tripla consistente (A, L, U), trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = T_{[L,U]}(DAD^{-1})$ sia bilanciata.

Problema (Scalatura di similitudine)

Data $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = DAD^{-1}$ sia bilanciata

Problema (Scalatura di equivalenza)

Dati $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{n+m} v_i$, trovare $D_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonali con elementi diagonali positivi tali che $X = D_1 A D_2$ risolva

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = v_i \quad i = 1, \dots, m \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j} \quad j = 1, \dots, n$$

Problema (Scalatura troncata)

Data una tripla consistente (A, L, U), trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = T_{[L,U]}(DAD^{-1})$ sia bilanciata.

Problema (Scalatura di similitudine)

Data $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = DAD^{-1}$ sia bilanciata

Problema (Scalatura di equivalenza)

Dati $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{n+m} v_i$, trovare $D_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonali con elementi diagonali positivi tali che $X = D_1 A D_2$ risolva

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = v_i \quad i = 1, \dots, m \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j} \quad j = 1, \dots, n$$

Problema (Scalatura troncata)

Data una tripla consistente (A, L, U), trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = T_{[L,U]}(DAD^{-1})$ sia bilanciata.

Problema (Scalatura di similitudine)

Data $0 \le A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, trovare $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ tale che $d_i > 0$ per ogni i e che $X = DAD^{-1}$ sia bilanciata

Problema (Scalatura di equivalenza)

Dati $0 \le A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{n+m} v_i$, trovare $D_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonali con elementi diagonali positivi tali che $X = D_1 A D_2$ risolva

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = v_i \quad i = 1, \dots, m \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j} \quad j = 1, \dots, n$$

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta \|A\|$ dove η è la precisione di macchina.
Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$.
Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta\|A\|$ dove η è la precisione di macchina.
Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$.
Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta\|A\|$ dove η è la precisione di macchina. Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$. Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta\|A\|$ dove η è la precisione di macchina.
Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$.
Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta\|A\|$ dove η è la precisione di macchina. Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$.

Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Applicazione 3: Precondizionamento.

Supponiamo di voler calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 1 & 10^{-2} \\ 10^4 & 10^2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'errore all'indietro dei metodi numerici di calcolo degli autovalori sono dell'ordine di $\eta\|A\|$ dove η è la precisione di macchina. Scalando la matrice A per mezzo di $D = diag(10^2, 1, 10^{-2})$ si ha

$$X = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare facilmente che $\|A\|_F \sim 10^4$ e $\|X\|_F \sim 2.6$.
Spesso è utile quindi scalare una matrice per renderla bilanciata prima di calcolarne gli autovalori.

Notazioni di base

Un *grafo* (orientato) è una coppia (V, E) dove V è un insieme finito di *nodi* e $E \subseteq V \times V$ è un insieme di *archi*. Useremo la notazione $e = (i, j)$ per indicare l'arco uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Per ogni nodo $i \in V$ definiamo gli insiemi degli archi uscenti da i ed entranti in i:

$$\delta^+(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (i, j)\}$$

$$\delta^-(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (j, i)\}$$

La *matrice di incidenza* di (V, E) è la matrice M le cui righe sono indicizzate da V e le cui colonne sono indicizzate da E tale che

$$M_{i,e} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad e = (i, j) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ -1 & \text{se} \quad e = (j, i) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni di base

Un *grafo* (orientato) è una coppia (V, E) dove V è un insieme finito di *nodi* e $E \subseteq V \times V$ è un insieme di *archi*. Useremo la notazione $e = (i, j)$ per indicare l'arco uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Per ogni nodo $i \in V$ definiamo gli insiemi degli archi uscenti da i ed entranti in i:

$$\delta^+(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (i, j)\}$$

$$\delta^-(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (j, i)\}$$

La *matrice di incidenza* di (V, E) è la matrice M le cui righe sono indicizzate da V e le cui colonne sono indicizzate da E tale che

$$M_{i,e} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad e = (i, j) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ -1 & \text{se} \quad e = (j, i) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni di base

Un *grafo* (orientato) è una coppia (V, E) dove V è un insieme finito di *nodi* e $E \subseteq V \times V$ è un insieme di *archi*. Useremo la notazione $e = (i, j)$ per indicare l'arco uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Per ogni nodo $i \in V$ definiamo gli insiemi degli archi uscenti da i ed entranti in i:

$$\delta^+(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (i, j)\}$$

$$\delta^-(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (j, i)\}$$

La *matrice di incidenza* di (V, E) è la matrice M le cui righe sono indicizzate da V e le cui colonne sono indicizzate da E tale che

$$M_{i,e} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad e = (i, j) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ -1 & \text{se} \quad e = (j, i) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni di base

Un *grafo* (orientato) è una coppia (V, E) dove V è un insieme finito di *nodi* e $E \subseteq V \times V$ è un insieme di *archi*. Useremo la notazione $e = (i, j)$ per indicare l'arco uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Per ogni nodo $i \in V$ definiamo gli insiemi degli archi uscenti da i ed entranti in i:

$$\delta^+(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (i, j)\}$$

$$\delta^-(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (j, i)\}$$

La *matrice di incidenza* di (V, E) è la matrice M le cui righe sono indicizzate da V e le cui colonne sono indicizzate da E tale che

$$M_{i,e} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad e = (i, j) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ -1 & \text{se} \quad e = (j, i) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni di base

Un *grafo* (orientato) è una coppia (V, E) dove V è un insieme finito di *nodi* e $E \subseteq V \times V$ è un insieme di *archi*. Useremo la notazione $e = (i, j)$ per indicare l'arco uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Per ogni nodo $i \in V$ definiamo gli insiemi degli archi uscenti da i ed entranti in i:

$$\delta^+(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (i, j)\}$$

$$\delta^-(i) = \{e \in E \text{ tali che esiste } j \in V \text{ per cui } e = (j, i)\}$$

La *matrice di incidenza* di (V, E) è la matrice M le cui righe sono indicizzate da V e le cui colonne sono indicizzate da E tale che

$$M_{i,e} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad e = (i, j) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ -1 & \text{se} \quad e = (j, i) \quad \text{per} \quad j \neq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$.

Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.

Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$. Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.

Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$.
Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.
Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$.
Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.
Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$.
Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.
Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Notazioni di base

In generale per un insieme finito S, usiamo la notazione $\mathbb{R}^S$ per indicare l'insieme delle funzioni $x : S \mapsto \mathbb{R}$ riferendoci ad esse come "vettori", cioè chiamiamo x_s il valore della funzione x in $s \in S$.
Adoperando questa notazione, chiamiamo *funzione peso* per (V, E) un elemento $a \in \mathbb{R}^E$ e definiamo *grafo pesato* la tripla (V, E, a) dove a è una funzione peso.
Infine, data una matrice quadrata A con elementi non negativi definiamo il *grafo associato* ad A, e lo indichiamo con $G(A)$, il grafo pesato (V, E, a) dove

- $V = \{1, \ldots, n\}$
- $E = \{(i,j) \in V \times V : A_{ij} > 0\}$
- $a_e = A_{ij} \quad \text{per} \quad e = (i,j) \in E$

Scalatura troncata come problema di ottimizzazione

Data la tripla consistente (A, L, U), consideriamo il grafo pesato $G = G(A) = (V, E, a)$ associato ad A.

Il vettore incognito sarà $x \in \mathbb{R}^E$ tale che $x_e = X_{ij} = T_{[L_{ij}, U_{ij}]}(d_i A_{ij} d_j^{-1})$ con $e = (i, j)$.

Definiamo ora i vettori $a, l, u \in \mathbb{R}^E$ associati alle matrici A, L, U tali che $a_e = A_{ij}$, $l_e = L_{ij}$ e $u_e = U_{ij}$ per $e = (i, j) \in E$, il vincolo $L \leq X \leq U$ si traduce in

$$l \leq x \leq u$$

mentre il vincolo di bilanciamento si esprime tramite l'equazione

$$Mx = 0$$

dove M è la matrice di incidenza del grafo G.

Scalatura troncata come problema di ottimizzazione

Data la tripla consistente (A, L, U), consideriamo il grafo pesato $G = G(A) = (V, E, a)$ associato ad A.
Il vettore incognito sarà $x \in \mathbb{R}^E$ tale che $x_e = X_{ij} = T_{[L_{ij}, U_{ij}]}(d_i A_{ij} d_j^{-1})$ con $e = (i, j)$.
Definiamo ora i vettori $a, l, u \in \mathbb{R}^E$ associati alle matrici A, L, U tali che $a_e = A_{ij}$, $l_e = L_{ij}$ e $u_e = U_{ij}$ per $e = (i, j) \in E$, il vincolo $L \le X \le U$ si traduce in

$$l \le x \le u$$

mentre il vincolo di bilanciamento si esprime tramite l'equazione

$$Mx = 0$$

dove M è la matrice di incidenza del grafo G.

Scalatura troncata come problema di ottimizzazione

Data la tripla consistente (A, L, U), consideriamo il grafo pesato $G = G(A) = (V, E, a)$ associato ad A.
Il vettore incognito sarà $x \in \mathbb{R}^E$ tale che $x_e = X_{ij} = T_{[L_{ij}, U_{ij}]}(d_i A_{ij} d_j^{-1})$ con $e = (i, j)$.
Definiamo ora i vettori $a, l, u \in \mathbb{R}^E$ associati alle matrici A, L, U tali che $a_e = A_{ij}$, $l_e = L_{ij}$ e $u_e = U_{ij}$ per $e = (i, j) \in E$, il vincolo $L \leq X \leq U$ si traduce in

$$l \leq x \leq u$$

mentre il vincolo di bilanciamento si esprime tramite l'equazione

$$Mx = 0$$

dove M è la matrice di incidenza del grafo G.

Scalatura troncata come problema di ottimizzazione

Data la tripla consistente (A, L, U), consideriamo il grafo pesato $G = G(A) = (V, E, a)$ associato ad A.
Il vettore incognito sarà $x \in \mathbb{R}^E$ tale che
$x_e = X_{ij} = T_{[L_{ij}, U_{ij}]}(d_i A_{ij} d_j^{-1})$ con $e = (i, j)$.
Definiamo ora i vettori $a, l, u \in \mathbb{R}^E$ associati alle matrici A, L, U tali che $a_e = A_{ij}$, $l_e = L_{ij}$ e $u_e = U_{ij}$ per $e = (i, j) \in E$, il vincolo $L \leq X \leq U$ si traduce in

$$l \leq x \leq u$$

mentre il vincolo di bilanciamento si esprime tramite l'equazione

$$Mx = 0$$

dove M è la matrice di incidenza del grafo G.

Scalatura troncata come problema di ottimizzazione

Data la tripla consistente (A, L, U), consideriamo il grafo pesato $G = G(A) = (V, E, a)$ associato ad A.
Il vettore incognito sarà $x \in \mathbb{R}^E$ tale che $x_e = X_{ij} = T_{[L_{ij}, U_{ij}]}(d_i A_{ij} d_j^{-1})$ con $e = (i, j)$.
Definiamo ora i vettori $a, l, u \in \mathbb{R}^E$ associati alle matrici A, L, U tali che $a_e = A_{ij}$, $l_e = L_{ij}$ e $u_e = U_{ij}$ per $e = (i, j) \in E$, il vincolo $L \leq X \leq U$ si traduce in

$$l \leq x \leq u$$

mentre il vincolo di bilanciamento si esprime tramite l'equazione

$$Mx = 0$$

dove M è la matrice di incidenza del grafo G.

Funzione obiettivo

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, chiamiamo *entropia* la funzione $Ent_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che:

$$Ent_\alpha(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{\alpha}) - 1] & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dato $[a, b]$ intervallo reale, chiamiamo *indicatrice* di $[a, b]$ la funzione $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [a, b] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, chiamiamo *entropia* la funzione $Ent_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che:

$$Ent_\alpha(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{\alpha}) - 1] & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dato $[a, b]$ intervallo reale, chiamiamo *indicatrice* di $[a, b]$ la funzione $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [a, b] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, chiamiamo *entropia* la funzione $Ent_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che:

$$Ent_\alpha(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{\alpha}) - 1] & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dato $[a, b]$ intervallo reale, chiamiamo *indicatrice* di $[a, b]$ la funzione $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [a, b] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, chiamiamo *entropia* la funzione $Ent_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che:

$$Ent_\alpha(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{\alpha}) - 1] & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dato $[a, b]$ intervallo reale, chiamiamo *indicatrice* di $[a, b]$ la funzione $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [a, b] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

Relativamente al nostro problema consideriamo per ogni $e \in E$ la seguente funzione

$$f_e(x) = Ent_{a_e}(x) + \chi_{[l_e,u_e]}(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e definiamo la funzione obiettivo del problema primale come

$$f(x) = \sum_{e \in E} f_e(x_e)$$

Osservazione

Avremmo potuto scegliere in alternativa alla funzione entropia una funzione lineare del tipo $|x - a_e|$ o quadratica del tipo $(x - a_e)^2$.

Funzione obiettivo

Relativamente al nostro problema consideriamo per ogni $e \in E$ la seguente funzione

$$f_e(x) = Ent_{a_e}(x) + \chi_{[l_e,u_e]}(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e definiamo la funzione obiettivo del problema primale come

$$f(x) = \sum_{e \in E} f_e(x_e)$$

Osservazione

Avremmo potuto scegliere in alternativa alla funzione entropia una funzione lineare del tipo $|x - a_e|$ o quadratica del tipo $(x - a_e)^2$.

Funzione obiettivo

Relativamente al nostro problema consideriamo per ogni $e \in E$ la seguente funzione

$$f_e(x) = Ent_{a_e}(x) + \chi_{[l_e,u_e]}(x) = \begin{cases} x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e definiamo la funzione obiettivo del problema primale come

$$f(x) = \sum_{e \in E} f_e(x_e)$$

Osservazione

Avremmo potuto scegliere in alternativa alla funzione entropia una funzione lineare del tipo $|x - a_e|$ o quadratica del tipo $(x - a_e)^2$.

Problema primale

Per quanto visto il problema di ottimizzazione si scrive come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & l \leq x \leq u \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned}$$

Il secondo vincolo è in realtà sovrabbondante, in quanto ogni funzione $f_e(x_e)$ non può assumere valore minimo fuori dall'intervallo $[l_e, u_e]$. Per questo motivo scriviamo il problema primale nella sua forma finale come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned} \tag{1}$$

Problema primale

Per quanto visto il problema di ottimizzazione si scrive come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & l \leq x \leq u \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned}$$

Il secondo vincolo è in realtà sovrabbondante, in quanto ogni funzione $f_e(x_e)$ non può assumere valore minimo fuori dall'intervallo $[l_e, u_e]$. Per questo motivo scriviamo il problema primale nella sua forma finale come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned} \tag{1}$$

Problema primale

Per quanto visto il problema di ottimizzazione si scrive come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & l \leq x \leq u \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned}$$

Il secondo vincolo è in realtà sovrabbondante, in quanto ogni funzione $f_e(x_e)$ non può assumere valore minimo fuori dall'intervallo $[l_e, u_e]$. Per questo motivo scriviamo il problema primale nella sua forma finale come

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Mx = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^E \end{aligned} \tag{1}$$

Problema duale

Sia $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ricordiamo che la coniugata di Fenchel di g è la funzione convessa $g^* : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$g^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p^T x - g(x)\} = -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - p^T x\}$$

Poichè (1) è un problema di minimo può essere riscritto equivalentemente come

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^E} \sup_{p \in \mathbb{R}^V} \mathcal{L}(x, p)$$

dove $\mathcal{L}(x, p) = f(x) - p^T Mx$. Il problema duale si ottiene scambiando l'ordine con cui si effettuano *inf* e *sup*

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^V} \inf_{x \in \mathbb{R}^E} f(x) - p^T Mx = \sup_{p \in \mathbb{R}^V} -f^*(M^T p) = -\inf_{p \in \mathbb{R}^V} f^*(M^T p)$$

Problema duale

Sia $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ricordiamo che la coniugata di Fenchel di g è la funzione convessa $g^* : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$g^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p^T x - g(x)\} = -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - p^T x\}$$

Poichè (1) è un problema di minimo può essere riscritto equivalentemente come

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^E} \sup_{p \in \mathbb{R}^V} \mathcal{L}(x, p)$$

dove $\mathcal{L}(x, p) = f(x) - p^T Mx$. Il problema duale si ottiene scambiando l'ordine con cui si effettuano *inf* e *sup*

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^V} \inf_{x \in \mathbb{R}^E} f(x) - p^T Mx = \sup_{p \in \mathbb{R}^V} -f^*(M^T p) = -\inf_{p \in \mathbb{R}^V} f^*(M^T p)$$

Problema duale

Sia $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ricordiamo che la coniugata di Fenchel di g è la funzione convessa $g^* : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$g^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p^T x - g(x)\} = -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - p^T x\}$$

Poichè (1) è un problema di minimo può essere riscritto equivalentemente come

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^E} \sup_{p \in \mathbb{R}^V} \mathcal{L}(x, p)$$

dove $\mathcal{L}(x, p) = f(x) - p^T Mx$. Il problema duale si ottiene scambiando l'ordine con cui si effettuano *inf* e *sup*

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^V} \inf_{x \in \mathbb{R}^E} f(x) - p^T Mx = \sup_{p \in \mathbb{R}^V} -f^*(M^T p) = -\inf_{p \in \mathbb{R}^V} f^*(M^T p)$$

Problema duale

Scriviamo il problema duale come

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(p) \\ s.t. \quad & p \in \mathbb{R}^V \end{aligned} \tag{2}$$

Grazie alla proprietà di separabilità del problema primale, la funzione obiettivo di (2) ha la seguente forma

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{e \in E} f_e^*((M^T p)_e)$$

Per calcolare $f_e^*(y)$, bisogna trovare l'estremo superiore al variare di x di

$$\begin{cases} yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema duale

Scriviamo il problema duale come

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(p) \\ s.t. \quad & p \in \mathbb{R}^V \end{aligned} \tag{2}$$

Grazie alla proprietà di separabilità del problema primale, la funzione obiettivo di (2) ha la seguente forma

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{e \in E} f_e^*((M^T p)_e)$$

Per calcolare $f_e^*(y)$, bisogna trovare l'estremo superiore al variare di x di

$$\begin{cases} yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema duale

Scriviamo il problema duale come

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(p) \\ s.t. \quad & p \in \mathbb{R}^V \end{aligned} \tag{2}$$

Grazie alla proprietà di separabilità del problema primale, la funzione obiettivo di (2) ha la seguente forma

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{e \in E} f_e^*((M^T p)_e)$$

Per calcolare $f_e^*(y)$, bisogna trovare l'estremo superiore al variare di x di

$$\begin{cases} yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad x \in [l_e, u_e] \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema duale

Osserviamo che la funzione $yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1]$ è concava e differenziabile in x quindi otteniamo un unico massimo in $[l_e, u_e]$ che viene raggiunto

- nel punto in cui si annulla la derivata, se questo si trova all'interno dell'intervallo.
- nell'estremo dell'intervallo più vicino ad esso, se si trova all'esterno.

$$f_e^*(y) = \begin{cases} l_e y - l_e[\ln(\frac{l_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \le l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \le a_e e^y \le u_e \\ u_e y - u_e[\ln(\frac{u_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \ge u_e \end{cases} \qquad (3)$$

Problema duale

Osserviamo che la funzione $yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1]$ è concava e differenziabile in x quindi otteniamo un unico massimo in $[l_e, u_e]$ che viene raggiunto

- nel punto in cui si annulla la derivata, se questo si trova all'interno dell'intervallo.
- nell'estremo dell'intervallo più vicino ad esso, se si trova all'esterno.

$$f_e^*(y) = \begin{cases} l_e y - l_e[\ln(\frac{l_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \le l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \le a_e e^y \le u_e \\ u_e y - u_e[\ln(\frac{u_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \ge u_e \end{cases} \qquad (3)$$

Problema duale

Osserviamo che la funzione $yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1]$ è concava e differenziabile in x quindi otteniamo un unico massimo in $[l_e, u_e]$ che viene raggiunto

- nel punto in cui si annulla la derivata, se questo si trova all'interno dell'intervallo.
- nell'estremo dell'intervallo più vicino ad esso, se si trova all'esterno.

$$f_e^*(y) = \begin{cases} l_e y - l_e[\ln(\frac{l_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \leq l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \leq a_e e^y \leq u_e \\ u_e y - u_e[\ln(\frac{u_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \geq u_e \end{cases} \tag{3}$$

Problema duale

Osserviamo che la funzione $yx - x[\ln(\frac{x}{a_e}) - 1]$ è concava e differenziabile in x quindi otteniamo un unico massimo in $[l_e, u_e]$ che viene raggiunto

- nel punto in cui si annulla la derivata, se questo si trova all'interno dell'intervallo.
- nell'estremo dell'intervallo più vicino ad esso, se si trova all'esterno.

$$f_e^*(y) = \begin{cases} l_e y - l_e[\ln(\frac{l_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \leq l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \leq a_e e^y \leq u_e \\ u_e y - u_e[\ln(\frac{u_e}{a_e}) - 1] & \text{se} \quad a_e e^y \geq u_e \end{cases} \tag{3}$$

Problema duale

La funzione f_e^* è continua, derivabile e con derivata continua:

$$(f_e^*)'(y) = \begin{cases} l_e & \text{se} \quad a_e e^y \leq l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \leq a_e e^y \leq u_e \\ u_e & \text{se} \quad a_e e^y \geq u_e \end{cases}$$

Problema duale

La funzione f_e^* è continua, derivabile e con derivata continua:

$$(f_e^*)'(y) = \begin{cases} l_e & \text{se} \quad a_e e^y \leq l_e \\ a_e e^y & \text{se} \quad l_e \leq a_e e^y \leq u_e \\ u_e & \text{se} \quad a_e e^y \geq u_e \end{cases}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Teorema

Sia (A, L, U) una tripla consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (2) si ottiene il minimo con il vettore $p \in \mathbb{R}^V$ dove $p_i = \ln d_i$.*

Dimostrazione.

$\Phi(p)$ è C^1 e convessa, affinchè il problema duale (non vincolato) ammetta minimo in p è necessario e sufficiente che $\nabla\Phi(p) = 0$.

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(p) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) \frac{\partial}{\partial p_i}(M^T p_e) = \sum_{e \in E} (f_e^*)'(M^T p_e) M_{ie}$$

Dimostrazione.

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} (f_e^*)'(p_i - p_j) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} (f_e^*)'(p_j - p_i)$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_i - p_j}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_j - p_i})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(d_i a_e d_j^{-1}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(d_j a_e d_i^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} x_e - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} x_e = (X\mathbf{1}_n)_i - (X^T\mathbf{1}_n)_i$$

Dimostrazione.

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} (f_e^*)'(p_i - p_j) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} (f_e^*)'(p_j - p_i)$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_i - p_j}) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_j - p_i})$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(d_i a_e d_j^{-1}) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(d_j a_e d_i^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} x_e - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} x_e = (X\mathbf{1}_n)_i - (X^T\mathbf{1}_n)_i$$

Dimostrazione.

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} (f_e^*)'(p_i - p_j) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} (f_e^*)'(p_j - p_i)$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_i - p_j}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_j - p_i})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(d_i a_e d_j^{-1}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(d_j a_e d_i^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} x_e - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} x_e = (X\mathbf{1}_n)_i - (X^T\mathbf{1}_n)_i$$

Dimostrazione.

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} (f_e^*)'(p_i - p_j) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} (f_e^*)'(p_j - p_i)$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_i - p_j}) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_j - p_i})$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(d_i a_e d_j^{-1}) - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(d_j a_e d_i^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} x_e - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(j,i)}} x_e = (X\mathbf{1}_n)_i - (X^T\mathbf{1}_n)_i$$

Dimostrazione.

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} (f_e^*)'(p_i - p_j) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} (f_e^*)'(p_j - p_i)$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_i - p_j}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(a_e e^{p_j - p_i})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} T_{[l_e,u_e]}(d_i a_e d_j^{-1}) - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} T_{[l_e,u_e]}(d_j a_e d_i^{-1})$$

$$= \sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} x_e - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(j,i)}} x_e = (X\mathbf{1}_n)_i - (X^T\mathbf{1}_n)_i$$

$\square$

Scalatura non troncata

In questo caso il problema duale ha come funzione obiettivo

$$\Phi(p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j}$$

Attuando il cambio di variabili $d_i = e^{p_i}$ il problema duale diventa

$$\min \quad \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j^{-1} \qquad (4)$$

$$s.t. \quad d > 0$$

Scalatura non troncata

In questo caso il problema duale ha come funzione obiettivo

$$\Phi(p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j}$$

Attuando il cambio di variabili $d_i = e^{p_i}$ il problema duale diventa

$$\min \quad \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j^{-1} \tag{4}$$

$$s.t. \quad d > 0$$

Scalatura non troncata

In questo caso il problema duale ha come funzione obiettivo

$$\Phi(p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j}$$

Attuando il cambio di variabili $d_i = e^{p_i}$ il problema duale diventa

$$\min \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j^{-1} \qquad (4)$$

$$s.t. \quad d > 0$$

Scalatura non troncata

In questo caso il problema duale ha come funzione obiettivo

$$\Phi(p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j}$$

Attuando il cambio di variabili $d_i = e^{p_i}$ il problema duale diventa

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j^{-1} \\ s.t. \quad & d > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Scalatura non troncata

Dal teorema precedente si ottiene immediatamente il seguente

Corollario

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementi non negativi. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura non troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.*
2. *In (4) si ottiene il minimo con $(d_1, \ldots, d_n)$.*

Scalatura non troncata

Dal teorema precedente si ottiene immediatamente il seguente

Corollario

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementi non negativi. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura non troncata ammette una soluzione data dalla matrice $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.*
2. *In (4) si ottiene il minimo con $(d_1, \dots, d_n)$.*

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \dots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \dots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) coppia consistente $\Rightarrow$ vale $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza

Siano $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $0 < v \in \mathbb{R}^{m+n}$. La coppia (A, v) si dice **consistente** se esiste $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

- $X_{ij} = 0$ ogni volta che $A_{ij} = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = v_i$ per $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = v_{m+j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Chiamando $v^{(m)}$ e $v^{(n)}$ i vettori formati rispettivamente dalle prime m e dalle ultime n componenti di v, è equivalente richiedere che

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \qquad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Lemma

(A, v) *coppia consistente* $\Rightarrow$ *vale* $\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i =: w$.

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.
Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(0, i) : i = 1, \ldots, m\} \cup \{(i, 0) : i = m+1, \ldots, m+n\} \\ &= \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,m), (m+1, 0), \ldots, (m+n, 0)\} \end{aligned}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.

Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \dots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(0, i) : i = 1, \dots, m\} \cup \{(i, 0) : i = m+1, \dots, m+n\} \\ &= \{(0,1), (0,2), \dots, (0,m), (m+1, 0), \dots, (m+n, 0)\} \end{aligned}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.
Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(0, i) : i = 1, \ldots, m\} \cup \{(i, 0) : i = m+1, \ldots, m+n\} \\ &= \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,m), (m+1, 0), \ldots, (m+n, 0)\} \end{aligned}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.
Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \dots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$E_0 = \{(0, i) : i = 1, \dots, m\} \cup \{(i, 0) : i = m+1, \dots, m+n\}$$
$$= \{(0,1), (0,2), \dots, (0,m), (m+1,0), \dots, (m+n,0)\}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.
Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(0,i) : i = 1, \ldots, m\} \cup \{(i,0) : i = m+1, \ldots, m+n\} \\ &= \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,m), (m+1,0), \ldots, (m+n,0)\} \end{aligned}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

A partire da una coppia (A, v), costruiamo un grafo pesato (V, E, a) e due vettori (l, u) tali che le matrici associate (A', L, U) producano un'istanza della scalatura troncata.
Definiamo il grafo (V, E) come segue

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, m+n\} \qquad E = E_0 \cup E_1$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(0,i) : i = 1, \ldots, m\} \cup \{(i,0) : i = m+1, \ldots, m+n\} \\ &= \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,m), (m+1,0), \ldots, (m+n,0)\} \end{aligned}$$

e

$$E_1 = \{(i, j+m) : i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n \quad A_{ij} > 0\}$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{per} \quad e = (0, i)$$
$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad m+1 \leq i \leq m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0)$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad 1 \le i \le m \quad \text{per} \quad e = (0, i)$$

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad m+1 \le i \le m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0)$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad 1 \le i \le m \quad \text{per} \quad e = (0, i)$$

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad m+1 \le i \le m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0)$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{per} \quad e = (0, i)$$

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad m+1 \leq i \leq m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0)$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$\begin{aligned} a_e =& l_e = u_e = v_i \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{per} \quad e = (0, i) \\ a_e =& l_e = u_e = v_i \quad m+1 \leq i \leq m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0) \end{aligned}$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Scalatura di equivalenza come scalatura troncata

Definiamo i vettori a, l, u distinguendo due casi

- Se $(i, j+m) \in E_1$ allora poniamo

$$a_e = A_{ij} \quad l_e = 0 \quad u_e = +\infty$$

- Se $(i, j) \in E_0$ allora poniamo

$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{per} \quad e = (0, i)$$
$$a_e = l_e = u_e = v_i \quad m+1 \leq i \leq m+n \quad \text{per} \quad e = (i, 0)$$

Osservazione

La matrice $A' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ è della forma

$$A' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & A \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Lemma

Se (A, v) è una coppia consistente nel senso della scalatura di equivalenza, allora (A', L, U) è una tripla consistente nel senso della scalatura troncata.

Idea della dimostrazione.

Sia $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $X_{ij} = 0$ quando $A_{ij} = 0$ e inoltre

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \quad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Si verifica che $X' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ prova la consistenza di (A', L, U)

$$X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

□

Lemma

Se (A, v) è una coppia consistente nel senso della scalatura di equivalenza, allora (A', L, U) è una tripla consistente nel senso della scalatura troncata.

Idea della dimostrazione.

Sia $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $X_{ij} = 0$ quando $A_{ij} = 0$ e inoltre

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \quad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Si verifica che $X' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ prova la consistenza di (A', L, U)

$$X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Lemma

Se (A, v) è una coppia consistente nel senso della scalatura di equivalenza, allora (A', L, U) è una tripla consistente nel senso della scalatura troncata.

Idea della dimostrazione.

Sia $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $X_{ij} = 0$ quando $A_{ij} = 0$ e inoltre

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \quad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Si verifica che $X' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ prova la consistenza di (A', L, U)

$$X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Lemma

Se (A, v) è una coppia consistente nel senso della scalatura di equivalenza, allora (A', L, U) è una tripla consistente nel senso della scalatura troncata.

Idea della dimostrazione.

Sia $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $X_{ij} = 0$ quando $A_{ij} = 0$ e inoltre

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \quad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Si verifica che $X' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ prova la consistenza di (A', L, U)

$$X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \left(v^{(m)}\right)^T & \left(0^{(n)}\right)^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

Lemma

Se (A, v) è una coppia consistente nel senso della scalatura di equivalenza, allora (A', L, U) è una tripla consistente nel senso della scalatura troncata.

Idea della dimostrazione.

Sia $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $X_{ij} = 0$ quando $A_{ij} = 0$ e inoltre

$$X\mathbf{1}_n = v^{(m)} \quad X^T\mathbf{1}_m = v^{(n)}$$

Si verifica che $X' \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ prova la consistenza di (A', L, U)

$$X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

$\square$

Teorema

Sia (A, v) una coppia consistente e sia (A', L, U) la tripla ad essa associata. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *Il problema di scalatura troncata per la tripla (A', L, U) ammette una soluzione data dalla matrice*

$$D = diag(1, d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$$

Teorema

Sia (A, v) una coppia consistente e sia (A', L, U) la tripla ad essa associata. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *Il problema di scalatura troncata per la tripla (A', L, U) ammette una soluzione data dalla matrice*

$$D = diag(1, d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$$

Teorema

Sia (A, v) una coppia consistente e sia (A', L, U) la tripla ad essa associata. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \dots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \dots, d_{m+n})$$

2. *Il problema di scalatura troncata per la tripla (A', L, U) ammette una soluzione data dalla matrice*

$$D = diag(1, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \dots, d_{m+n}^{-1})$$

Idea della dimostrazione.

Non è difficile verificare che

$$T_{[L,U]}(DA'D^{-1}) = X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

La matrice X' è soluzione della scalatura troncata se e solo se

$$X'\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(m)})^T\mathbf{1}_m \\ X\mathbf{1}_n \\ v^{(n)} \end{bmatrix} = (X')^T\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(n)})^T\mathbf{1}_n \\ v^{(m)} \\ X^T\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$$

che sono esattamente le condizioni che deve soddisfare X per essere soluzione della scalatura di equivalenza. □

Idea della dimostrazione.

Non è difficile verificare che

$$T_{[L,U]}(DA'D^{-1}) = X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

La matrice X' è soluzione della scalatura troncata se e solo se

$$X'\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(m)})^T\mathbf{1}_m \\ X\mathbf{1}_n \\ v^{(n)} \end{bmatrix} = (X')^T\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(n)})^T\mathbf{1}_n \\ v^{(m)} \\ X^T\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$$

che sono esattamente le condizioni che deve soddisfare X per essere soluzione della scalatura di equivalenza. □

Idea della dimostrazione.

Non è difficile verificare che

$$T_{[L,U]}(DA'D^{-1}) = X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

La matrice X' è soluzione della scalatura troncata se e solo se

$$X'\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(m)})^T\mathbf{1}_m \\ X\mathbf{1}_n \\ v^{(n)} \end{bmatrix} = (X')^T\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(n)})^T\mathbf{1}_n \\ v^{(m)} \\ X^T\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$$

che sono esattamente le condizioni che deve soddisfare X per essere soluzione della scalatura di equivalenza.

Idea della dimostrazione.

Non è difficile verificare che

$$T_{[L,U]}(DA'D^{-1}) = X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

La matrice X' è soluzione della scalatura troncata se e solo se

$$X'\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(m)})^T\mathbf{1}_m \\ X\mathbf{1}_n \\ v^{(n)} \end{bmatrix} = (X')^T\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(n)})^T\mathbf{1}_n \\ v^{(m)} \\ X^T\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$$

che sono esattamente le condizioni che deve soddisfare X per essere soluzione della scalatura di equivalenza. □

Idea della dimostrazione.

Non è difficile verificare che

$$T_{[L,U]}(DA'D^{-1}) = X' = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & (v^{(m)})^T & (0^{(n)})^T \\ \hline 0^{(m)} & 0^{(m\times m)} & X \\ \hline v^{(n)} & 0^{(n\times m)} & 0^{(n\times n)} \end{array}\right]$$

La matrice X' è soluzione della scalatura troncata se e solo se

$$X'\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(m)})^T\mathbf{1}_m \\ X\mathbf{1}_n \\ v^{(n)} \end{bmatrix} = (X')^T\mathbf{1}_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (v^{(n)})^T\mathbf{1}_n \\ v^{(m)} \\ X^T\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$$

che sono esattamente le condizioni che deve soddisfare X per essere soluzione della scalatura di equivalenza. □

Scalatura di equivalenza: problema duale

Osserviamo che l'insieme dei nodi è partizionato dai due insiemi E_0 ed E_1, e vale che

- se $e \in E_1$ si ha $l_e = 0$ e $u_e = +\infty$, per cui su questi nodi la funzione obiettivo del duale è certamente data dall'espressione con l'esponenziale,
- se $e \in E_0$ i limiti superiore e inferiore coincidono $l_e = a_e = u_e = v_i$ per cui la funzione duale è data dalla prima (o equivalentemente dalla terza) equazione di (3) calcolata in v_i, è facile verificare che si ottiene

$$f_e^*(y) = v_i(y+1)$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Osserviamo che l'insieme dei nodi è partizionato dai due insiemi E_0 ed E_1, e vale che

- se $e \in E_1$ si ha $l_e = 0$ e $u_e = +\infty$, per cui su questi nodi la funzione obiettivo del duale è certamente data dall'espressione con l'esponenziale,
- se $e \in E_0$ i limiti superiore e inferiore coincidono $l_e = a_e = u_e = v_i$ per cui la funzione duale è data dalla prima (o equivalentemente dalla terza) equazione di (3) calcolata in v_i, è facile verificare che si ottiene

$$f_e^*(y) = v_i(y + 1)$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Osserviamo che l'insieme dei nodi è partizionato dai due insiemi E_0 ed E_1, e vale che

- se $e \in E_1$ si ha $l_e = 0$ e $u_e = +\infty$, per cui su questi nodi la funzione obiettivo del duale è certamente data dall'espressione con l'esponenziale,
- se $e \in E_0$ i limiti superiore e inferiore coincidono $l_e = a_e = u_e = v_i$ per cui la funzione duale è data dalla prima (o equivalentemente dalla terza) equazione di (3) calcolata in v_i, è facile verificare che si ottiene

$$f_e^*(y) = v_i(y+1)$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Osserviamo che l'insieme dei nodi è partizionato dai due insiemi E_0 ed E_1, e vale che

- se $e \in E_1$ si ha $l_e = 0$ e $u_e = +\infty$, per cui su questi nodi la funzione obiettivo del duale è certamente data dall'espressione con l'esponenziale,
- se $e \in E_0$ i limiti superiore e inferiore coincidono $l_e = a_e = u_e = v_i$ per cui la funzione duale è data dalla prima (o equivalentemente dalla terza) equazione di (3) calcolata in v_i, è facile verificare che si ottiene

$$f_e^*(y) = v_i(y+1)$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Osserviamo che l'insieme dei nodi è partizionato dai due insiemi E_0 ed E_1, e vale che

- se $e \in E_1$ si ha $l_e = 0$ e $u_e = +\infty$, per cui su questi nodi la funzione obiettivo del duale è certamente data dall'espressione con l'esponenziale,
- se $e \in E_0$ i limiti superiore e inferiore coincidono $l_e = a_e = u_e = v_i$ per cui la funzione duale è data dalla prima (o equivalentemente dalla terza) equazione di (3) calcolata in v_i, è facile verificare che si ottiene

$$f_e^*(y) = v_i(y + 1)$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e\in E\\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e\in E_1\\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i-p_j} + \sum_{\substack{e\in E_0\\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e\in E_0\\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e\in E_1\\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i-p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e\in E_1\\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i-p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scalatura di equivalenza: problema duale

Calcoliamo la funzione obiettivo del duale

$$\Phi(p) = f^*(M^T p) = \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} f_e^*(p_i - p_j)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(0,i)}} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{\substack{e \in E_0 \\ e=(i,0)}} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} + \sum_{i=1}^{m} v_i(p_0 - p_i + 1) + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i(p_i - p_0 + 1)$$

$$= \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w$$

Scriviamo il problema duale associato a (A', L, U)

$$\min_{p \in \mathbb{R}^V} \quad \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w \qquad (5)$$

Dai teoremi precedenti otteniamo banalmente il seguente

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *In (5) si ottiene il minimo con* $\ln(d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$

Scriviamo il problema duale associato a (A', L, U)

$$\min_{p \in \mathbb{R}^V} \quad \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w \qquad (5)$$

Dai teoremi precedenti otteniamo banalmente il seguente

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *In (5) si ottiene il minimo con* $\ln(d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$

Scriviamo il problema duale associato a (A', L, U)

$$\min_{p \in \mathbb{R}^V} \quad \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w \tag{5}$$

Dai teoremi precedenti otteniamo banalmente il seguente

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *In (5) si ottiene il minimo con* $\ln(d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$

Scriviamo il problema duale associato a (A', L, U)

$$\min_{p \in \mathbb{R}^V} \quad \sum_{\substack{e \in E_1 \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i + 2w \qquad (5)$$

Dai teoremi precedenti otteniamo banalmente il seguente

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *Il problema di scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *In (5) si ottiene il minimo con* $\ln(d_1, \ldots, d_m, d_{m+1}^{-1}, \ldots, d_{m+n}^{-1})$

Problema di Marshall-Olkin

Con le stesse notazioni che abbiamo usato in precedenza, consideriamo il seguente problema di ottimizzazione non convesso:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j \\
s.t. \quad & \prod_{i=1}^{m} d_i^{v_i} = 1 \\
& \prod_{i=m+1}^{m+n} d_i^{v_i} = 1 \\
& 0 < d \in \mathbb{R}^{m+n}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Problema di Marshall-Olkin

Con le stesse notazioni che abbiamo usato in precedenza, consideriamo il seguente problema di ottimizzazione non convesso:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} d_i a_e d_j \\
s.t. \quad & \prod_{i=1}^{m} d_i^{v_i} = 1 \\
& \prod_{i=m+1}^{m+n} d_i^{v_i} = 1 \\
& 0 < d \in \mathbb{R}^{m+n}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Problema di Marshall-Olkin

Trasformiamo il problema precedente attuando il cambio di variabili $p_i = \ln d_i$ e applicando il logaritmo ai vincoli, otteniamo il seguente problema di ottimizzazione convessa con vincoli lineari

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i + p_j} \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i p_i = 0 \\ & \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i = 0 \\ & p \in \mathbb{R}^{m+n} \end{aligned} \tag{7}$$

Problema di Marshall-Olkin

Trasformiamo il problema precedente attuando il cambio di variabili $p_i = \ln d_i$ e applicando il logaritmo ai vincoli, otteniamo il seguente problema di ottimizzazione convessa con vincoli lineari

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\substack{e \in E \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i + p_j} \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i p_i = 0 \\ & \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i = 0 \\ & p \in \mathbb{R}^{m+n} \end{aligned} \tag{7}$$

Teorema

Valgono i seguenti fatti:

- *Sia* $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (5), *e siano*

$$\alpha := \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{m} v_i p_i \quad e \quad \beta := \frac{1}{w}\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i$$

  $\Rightarrow q = (p_1 - \alpha, \ldots, p_m - \alpha, \beta - p_{m+1}, \ldots, \beta - p_{m+n})$ *è ottima per* (7).

- *Sia* $q \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (7), *e sia*

$$\gamma := \ln\left(\frac{1}{w}\sum_{e\in E} a_e e^{p_i+p_j}\right)$$

  $\Rightarrow p = (q_1 - \gamma, \ldots, p_m - \gamma, q_{m+1}, \ldots, q_{m+n})$ *è ottima per* (5).

Teorema

Valgono i seguenti fatti:

- *Sia* $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (5), *e siano*

$$\alpha := \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{m} v_i p_i \quad e \quad \beta := \frac{1}{w} \sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i$$

  $\Rightarrow q = (p_1 - \alpha, \ldots, p_m - \alpha, \beta - p_{m+1}, \ldots, \beta - p_{m+n})$ *è ottima per* (7).

- *Sia* $q \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (7), *e sia*

$$\gamma := \ln \left(\frac{1}{w} \sum_{e \in E} a_e e^{p_i + p_j} \right)$$

  $\Rightarrow p = (q_1 - \gamma, \ldots, p_m - \gamma, q_{m+1}, \ldots, q_{m+n})$ *è ottima per* (5).

Teorema

Valgono i seguenti fatti:

- *Sia* $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (5), *e siano*

$$\alpha := \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{m} v_i p_i \quad e \quad \beta := \frac{1}{w}\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i p_i$$

  $\Rightarrow q = (p_1 - \alpha, \ldots, p_m - \alpha, \beta - p_{m+1}, \ldots, \beta - p_{m+n})$ *è ottima per* (7).

- *Sia* $q \in \mathbb{R}^{m+n}$ *soluzione ottima per* (7), *e sia*

$$\gamma := \ln\left(\frac{1}{w}\sum_{e\in E} a_e e^{p_i+p_j}\right)$$

  $\Rightarrow p = (q_1 - \gamma, \ldots, p_m - \gamma, q_{m+1}, \ldots, q_{m+n})$ *è ottima per* (5).

Idea della dimostrazione.

Per entrambi i problemi le condizioni KKT sono necessarie e sufficienti. Il vettore q risolve (7) sse esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \lambda v_i = 0 \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \mu v_i = 0 \quad m+1 \le i \le m+n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i q_i = 0$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i q_i = 0$$

Idea della dimostrazione.

Per entrambi i problemi le condizioni KKT sono necessarie e sufficienti. Il vettore q risolve (7) sse esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \lambda v_i = 0 \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \mu v_i = 0 \quad m+1 \le i \le m+n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i q_i = 0$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i q_i = 0$$

Idea della dimostrazione.

Per entrambi i problemi le condizioni KKT sono necessarie e sufficienti. Il vettore q risolve (7) sse esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \lambda v_i = 0 \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \mu v_i = 0 \quad m+1 \le i \le m+n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i q_i = 0$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i q_i = 0$$

Idea della dimostrazione.

Per entrambi i problemi le condizioni KKT sono necessarie e sufficienti. Il vettore q risolve (7) sse esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \lambda v_i = 0 \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(i,j)}} a_e e^{q_i+q_j} - \mu v_i = 0 \quad m+1 \le i \le m+n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i q_i = 0$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} v_i q_i = 0$$

Idea della dimostrazione.

Il vettore p risolve (5) sse

$$\sum_{\substack{e\in\delta^+(i)\\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - v_i = 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

$$v_i - \sum_{\substack{e\in\delta^-(i)\\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} = 0 \quad m+1 \leq i \leq m+n$$

Per concludere basta verificare con semplici conti l'equivalenza delle due condizioni KKT. $\square$

Idea della dimostrazione.

Il vettore p risolve (5) sse

$$\sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - v_i = 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

$$v_i - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} = 0 \quad m+1 \leq i \leq m+n$$

Per concludere basta verificare con semplici conti l'equivalenza delle due condizioni KKT. $\square$

Idea della dimostrazione.

Il vettore p risolve (5) sse

$$\sum_{\substack{e \in \delta^+(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} - v_i = 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

$$v_i - \sum_{\substack{e \in \delta^-(i) \\ e=(i,j)}} a_e e^{p_i - p_j} = 0 \quad m+1 \leq i \leq m+n$$

Per concludere basta verificare con semplici conti l'equivalenza delle due condizioni KKT. $\square$

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *La scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \dots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \dots, d_{m+n})$$

2. *In (7) si ottiene il minimo con $(p_1, \dots, p_{m+n})$ dove*

$$p_i = \begin{cases} \ln d_i - \alpha & se \quad 1 \le i \le m \\ \ln d_i - \beta & se \quad m+1 \le i \le m+n \end{cases}$$

con α e β definiti nel teorema precedente.

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *La scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \ldots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$$

2. *In (7) si ottiene il minimo con $(p_1, \ldots, p_{m+n})$ dove*

$$p_i = \begin{cases} \ln d_i - \alpha & se \quad 1 \leq i \leq m \\ \ln d_i - \beta & se \quad m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

con α e β definiti nel teorema precedente.

Corollario

Sia (A, v) una coppia consistente. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *La scalatura di equivalenza ammette una soluzione data dalle matrici*

$$D_1 = diag(d_1, \dots, d_m) \quad D_2 = diag(d_{m+1}, \dots, d_{m+n})$$

2. *In (7) si ottiene il minimo con $(p_1, \dots, p_{m+n})$ dove*

$$p_i = \begin{cases} \ln d_i - \alpha & se \quad 1 \leq i \leq m \\ \ln d_i - \beta & se \quad m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

con α e β definiti nel teorema precedente.

Teoremi di Sinkhorn

Il corollario precedente può essere legato anche al problema (7), da cui otteniamo il seguente teorema classico.

Teorema (Sinkhorn)

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice con elementi strettamente positivi. Per ogni $v \in \mathbb{R}^{m+n}$ l'istanza del problema di scalatura di equivalenza data dalla coppia (A, v) ammette soluzione.

Teoremi di Sinkhorn

Il corollario precedente può essere legato anche al problema (7), da cui otteniamo il seguente teorema classico.

Teorema (Sinkhorn)

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice con elementi strettamente positivi. Per ogni $v \in \mathbb{R}^{m+n}$ l'istanza del problema di scalatura di equivalenza data dalla coppia (A, v) ammette soluzione.

Teoremi di Sinkhorn

Il corollario precedente può essere legato anche al problema (7), da cui otteniamo il seguente teorema classico.

Teorema (Sinkhorn)

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice con elementi strettamente positivi. Per ogni $v \in \mathbb{R}^{m+n}$ l'istanza del problema di scalatura di equivalenza data dalla coppia (A, v) ammette soluzione.

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. $\square$

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T A y$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T A y \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T A y$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. $\square$

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T A y$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T A y \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T A y$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. □

Idea della dimostrazione.

Come sappiamo dal corollario precedente, la scalatura di equivalenza ha soluzione se e solo se (6) ammette minimo. La funzione obiettivo di (6) può essere scritta in modo equivalente tramite la forma bilineare $x^T Ay$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano i vincoli assegnati. Definendo $a := \min_{i,j} A_{ij}$, vale che

$$x^T Ay \geq \|x\|_1 \|y\|_1 a \geq \|x\|_\infty \|y\|_\infty a \geq a$$

Da questo segue che $x^T Ay$ è una funzione limitata dal basso da una costante positiva ed è coerciva per $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \to \infty$, si può dimostrare che ammette minimo. $\square$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Definizione

Una matrice $0 \leq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dice *irriducibile* se non esiste alcuna coppia di matrici di permutazione P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

con A e C matrici quadrate. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è *irriducibile* se ogni sua sottomatrice di taglia $m \times m$ lo è.

Teorema

Sia $0 \leq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ irriducibile e siano $r, c \in \mathbb{R}$ tali che $mr = nc$. La scalatura di equivalenza per la coppia (A, v) ammette soluzione, dove

$$v = \begin{bmatrix} c\mathbf{1}_m \\ r\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right) \left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

L'algoritmo che prenderemo in considerazione

- è un metodo iterativo di discesa applicato al problema duale,
- informalmente consiste nello scegliere ad ogni iterazione una coordinata k e minimizzare la funzione obiettivo lungo la retta $p + tu_k$ dove u_k è il k-esimo vettore della base canonica,
- considera, visto nel problema primale, il k-esimo vincolo e riduce la quantità per cui questo è violato.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} d_k A_{kj} d_j^{-1} - \sum_{j=1}^{n} d_j A_{jk} d_k^{-1} = d_k \sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1} - d_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j$$

Forziamo il vincolo ad essere soddisfatto aggiornando d_k con

$$d_k^{(agg)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jk} d_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj} d_j^{-1}\right)^{-1}}$$

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei resiudi che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

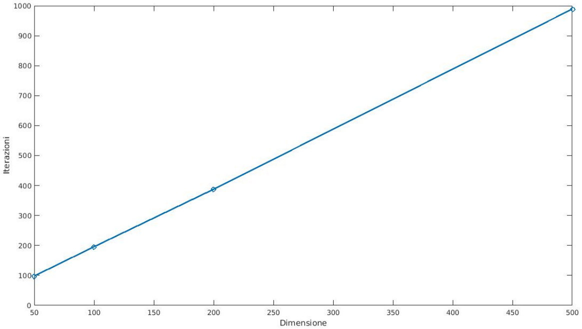
Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei resiudi che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Algoritmo di scalatura non troncata

- Inizializziamo i dati del problema ponendo $d_i = 1$ per ogni i, questo coincide a porre inizialmente $D = I_n$ e $X = A$.
- Chiamiamo $r(X) = X\mathbf{1}_n - X^T\mathbf{1}_n$ il vettore dei residui che indica quanto la matrice $X = DAD^{-1}$ sia vicina all'essere bilanciata e ϵ una certa soglia di tolleranza fissata. Se $\|r(X)\|_\infty > \epsilon$ passiamo all'operazione successiva altrimenti terminiamo.
- Selezioniamo l'indice k in cui si ottiene la norma infinito di $r(X)$.
- Sostituiamo la componente k-esima d_k della diagonale di D con il valore $d_k^{(agg)}$ e torniamo al secondo punto.

Esperimento 1: Matrici positive



Esperimento 2: Matrici di Hessenberg

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esperimento 2: Matrici di Hessenberg

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esperimento 2: Matrici di Hessenberg