Quarto Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

13 Luglio 2015

Soluzioni

Esercizio 1 Sia z il numero complesso con argomento uguale a $\frac{\pi}{3}$ e modulo uguale a 3. Determinare parte reale e parte immaginaria di z.

Soluzione. Del numero z conosciamo le coordinate polari $(\rho, \theta) = (3, \frac{\pi}{3})$. Ricordando che tra le coordinate polari e le coordinate cartesiane (x, y) - altresì dette parte reale e immaginaria - di un numero complesso sussiste la relazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

concludiamo subito che $z = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$. □

Esercizio 2 Data la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & x \geq 0 \\ \dfrac{\log(1 + x^2) - x^2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare se f è continua.
2. Determinare se f è derivabile.

Soluzione. Poiché f è definita a tratti, per indagarne la continuità e la derivabilità dobbiamo analizzare il comportamento in ciascun intervallo in cui è definita e poi nei punti di frontiera di tali intervalli. In $(-\infty, 0)$ la funzione è ben definita e rapporto di funzioni continue, quindi è ivi continua. In $(0, +\infty)$ la funzione è polinomiale, quindi banalmente continua. Resta da controllare il punto $x = 0$. Affinché sia continua in $x = 0$, deve valere

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Calcoliamo i limiti. È immediato vedere che il limite da destra vale 0; per quanto riguarda il limite da sinistra,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\log(1 + x^2) - x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\log(1 + x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\log(1 + x^2)}{x^2} \cdot x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = 0,$$

perché il limite di $\log(1 + x^2)/x^2$ vale 1 (limite notevole). Poiché i limiti destro e sinistro in 0 sono uguali e sono uguali al valore della funzione in 0, allora concludiamo che la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Studiamo la derivabilità di f. La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 9x^2 & x > 0 \\ -\dfrac{2x^{\frac{8}{3}}}{1 + x^2} - \dfrac{\log(1 + x^2) - x^2}{3x^{\frac{4}{3}}} & x < 0. \end{cases}$$

È facile vedere che f è derivabile in entrambi gli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ separatamente (somma, e rapporto di funzioni derivabili). Resta da studiare la derivabilità in $x = 0$. Come prima, dobbiamo verificare che il limite destro e il limite sinistro della derivata siano uguali. Il limite destro è banale e vale 0. Il limite sinistro è

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{1+x^2} - \frac{\log(1+x^2) - x^2}{3x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{1+x^2} - \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{3x^{\frac{4}{3}}} =$$
$$= 0 - \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} = 0.$$

Poiché i due limiti sono uguali, ne segue che la funzione è derivabile anche in 0. Concludiamo che è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. □

Esercizio 3 Si determini una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}.$$

Soluzione. Si tratta di calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx.$$

Si tratta di una funzione razionale fratta, dunque possiamo applicare il metodo di decomposizione in fratti semplici. Il denominatore si fattorizza come $x(x-1)(x+1)$, perciò la decomposizione in fratti semplici è del tipo

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Per trovare A, B e C, facciamo il minimo comune multiplo e uguagliamo i numeratori:

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)} \implies \begin{cases} A+B+C = 3 \\ B - C = 0 \\ -A = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1. \end{cases}$$

Ne segue che l'integrale si riduce a

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + c,$$

da cui una primitiva si ottiene ponendo ad esempio $c = 0$. □

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Cosa vuol dire che $f'(0) = 1$? dare la definizione precisa.
2. Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto, crescente e tale che $f'(1) = 0$;
3. Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0 ma che non sia derivabile in 0.

Soluzione. 1. La scrittura $f'(0) = 1$ indica che la derivata della funzione f nel punto $x = 0$ vale 1, cioè che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1.$$

2. Basta prendere la funzione $f(x) = (x-1)^3$.

3. Basta prendere la funzione $f(x) = |x|$.

$\square$

Esercizio 5 Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \log(x) - \arctan(x)$. Si determini il numero di zeri di f.

Soluzione. Studiamo le principali proprietà di f: il limite per $x \to 0^+$ è

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) - \arctan(x) = -\infty - 0 = -\infty,$$

mentre il limite a $+\infty$ è

$$\lim_{x\to +\infty} \log(x) - \arctan(x) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Poiché la funzione è continua in $(0, +\infty)$ e il valore dei limiti agli estremi è di segno opposto, per un'estensione del teorema degli zeri possiamo concludere che essa ammette almeno uno zero in questo intervallo. Adesso studiamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}.$$

Studiandone il segno, si vede che il numeratore è sempre positivo (il discriminante è $\Delta = -3 < 0$ e il termine noto è positivo) e così il denominatore. Ne segue che la derivata è sempre positiva, dunque la funzione è sempre crescente. Ciò significa che f non può ammettere altri zeri oltre quello la cui esistenza è assicurata dal teorema degli zeri, quindi concludiamo che f ammette un unico zero. $\square$