Serie di Fourier

Daniele Serra

1 Definizione

Sia $u_n = e^{int}$, e sia

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g(t)}dt$$

un prodotto interno in $L^2(T)$, dove T è la circonferenza unitaria. Allora $\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è una *base ortonormale* rispetto al prodotto così definito, infatti:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m}.$$

Un tale sistema ortonormale in $L^2(T)$ è detto *sistema ortonormale trigonometrico*, ed è un sistema completo.
Si definisce **serie di Fourier** di una funzione $f \in L^2(T)$ a quadrato sommabile la rappresentazione della funzione per mezzo di una combinazione lineare dei vettori di base u_n del sistema ortonormale trigonometrico:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n u_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{int}$$

I coefficienti della combinazione sono quindi la proiezione della funzione sui vettori di base stessi:

$$f_n = \frac{\langle f, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} = \langle f, u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt$$

e sono detti *coefficienti di Fourier*.
Le somme parziali della serie di Fourier sono inoltre:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{int} \qquad N = 0, 1, 2 \ldots$$

2 Convergenze della serie di Fourier

In generale, la serie di Fourier di una funzione continua definita sulla circonferenza unitaria non converge alla funzione stessa, e di conseguenza la scrittura:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_N(f, x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} dt \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

non vale per ogni funzione. Questo può essere provato, ad esempio, attraverso il *teorema di Banach-Steinhaus*. Si dimostra tuttavia che per $f \in C(T)$ esiste un polinomio trigonometrico P tale che:

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.