Dalla mela di Newton all'era spaziale: esplorare lo spazio con la matematica

Settimana Matematica 2020 - Laboratorio di Meccanica Celeste

5-6-7 febbraio 2020

Sommario

Il 12 Novembre 2014 il lander Philae della missione Rosetta è atterrato sulla cometa 67P/Churymov-Gerasimenko. Il 14 Luglio 2015 la sonda New Horizons ha raggiunto Plutone inviandoci fantastiche immagini di questo mondo lontanissimo. Il 15 Settembre 2017 la sonda Cassini è stata fatta disintegrare nell'atmosfera di Saturno dopo che per tredici anni ha fornito un'enorme quantità di dati e immagini. Il 20 Ottobre 2018 la sonda BepiColombo è partita alla volta di Mercurio per studiare il pianeta più vicino al Sole. Questi eventi costituiscono dei grandissimi traguardi nella storia dell'esplorazione spaziale, raggiunti in poco più di sessanta anni dal primo lancio di un satellite nello spazio (lo Sputnik 1, il 4 Ottobre 1957). In realtà tutto è cominciato molto prima, nel Seicento, quando Newton si pose la semplice domanda "se una mela cade al suolo a causa dall'attrazione gravitazionale terrestre, perché la Luna, più o meno sferica come una mela, e sicuramente più pesante, non cade anch'essa sulla Terra?", gettando le fondamenta della Meccanica Celeste, lo studio matematico dei corpi che si muovono nello spazio. In questo laboratorio introdurremo le principali tematiche della Meccanica Celeste e dell'Astrodinamica, e impareremo a progettare missioni spaziali, a guidare sonde spaziali nello spazio e a riconoscere i principali effetti dinamici che regolano il moto dei corpi celesti, sempre focalizzando l'attenzione sul passaggio dalla realtà fisica al modello matematico.

1 Le leggi di Keplero

All'inizio del XVII secolo l'astronomo e matematico tedesco Johannes Kepler (Keplero) formulò le famose tre leggi che descrivono il moto dei pianeti attorno al Sole. Per scrivere le sue leggi, Keplero si basò sull'analisi di grandi quantità di dati e misurazioni astronomiche raccolte dal suo maestro Tycho Brahe. Le prime due leggi sono contenute nel trattato *Astronomia nova* del 1609, mentre la terza è del 1619, pubblicata in *Harmonices mundi libri quinque.*

I) I pianeti si muovono descrivendo un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

II) Il raggio vettore che congiunge un pianeta col Sole descrive aree uguali in tempi uguali.

III) I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.

Osserviamo un fatto fondamentale: le leggi di Keplero sono puramente *cinematiche*, cioè danno informazioni sulle caratteristiche del moto dei corpi celesti, ma nulla dicono riguardo alla causa del moto, cioè alla *dinamica.* Per risalire al tipo di forza che regola il moto dei corpi celesti bisognerà aspettare il lavoro del matematico inglese Isaac Newton, e la sua scoperta della legge di gravitazione universale.

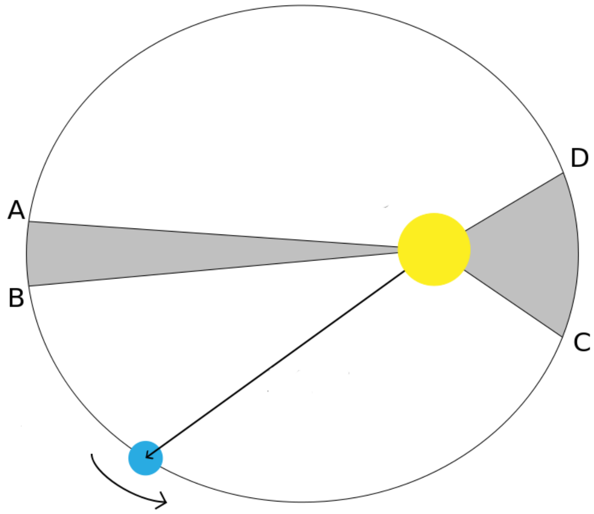


Figura 1: Illustrazione della seconda legge di Keplero: l'area A-Sole-B è uguale all'area D-Sole-C e vengono percorse nello stesso tempo. Di conseguenza AB è percorso nello stesso tempo di CD.

2 La geometria del problema dei due corpi

Il moto di corpi nello spazio è storicamente il problema intorno al quale si è sviluppata la meccanica moderna e gran parte della matematica moderna, come il calcolo differenziale.
Per **problema dei due corpi** intendiamo la descrizione del moto di due corpi puntiformi sotto l'azione delle sole forze di interazione gravitazionale dei due corpi stessi: se m_1, m_2 sono le masse dei corpi, la forza è

$$\vec{F} = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^3}\, \vec{r},$$

dove G è una costante detta costante di attrazione gravitazionale, e $\vec{r}$ è il vettore che va dal secondo corpo al primo.
Una proprietà importante del problema dei due corpi è che è **integrabile**, cioè è possibile trovare esplicitamente una formula che ci permette di predire lo stato di moto del sistema ad ogni istante futuro.
Siano $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ le accelerazioni dei corpi. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \dfrac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r} \\ m_2\vec{a}_2 = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}. \end{cases}$$

Sia $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Moltiplicando la prima per m_2, la seconda per m_1 e sottraendo la prima alla seconda, otteniamo:

$$m_1m_2\vec{a} = -\frac{Gm_1m_2(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r},$$

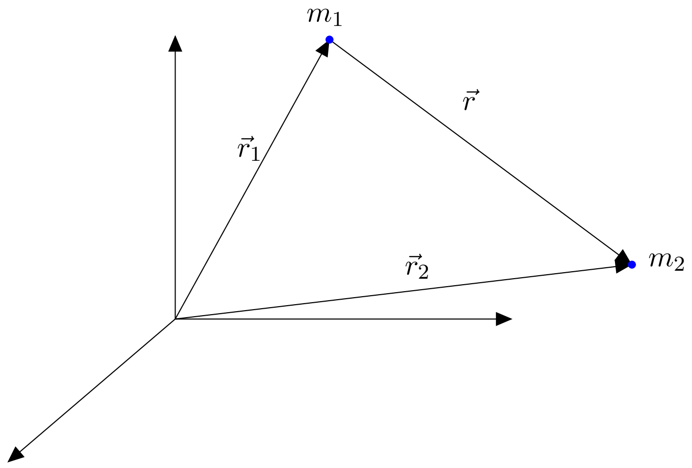


Figura 2: La geometria del problema dei due corpi.

dove $\vec{a}$ è l'accelerazione del vettore $\vec{r}$. Definiamo la *massa ridotta* del sistema $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ e $M := m_1 + m_2$; otteniamo l'equazione del problema ridotto

$$\mu\vec{a} = -\frac{G\mu M}{r^3}\vec{r},$$

che regola il moto di un pianeta di massa μ attorno a una stella ferma di massa M. Sapendo che l'accelerazione di $\vec{r}$ si lega a $\vec{r}$ tramite la *derivata seconda*, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, allora arriviamo a scrivere un'equazione differenziale di secondo ordine nell'incognita $\vec{r}$:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu M}{r^3}\vec{r}. \tag{1}$$

Una quantità importante del problema dei due corpi è il momento angolare (per unità di massa):

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{v}.$$

Visto che $\vec{J}$ è il prodotto vettoriale di $\vec{r}$ e $\vec{v}$, allora è perpendicolare al piano contenente $\vec{r}$ e $\vec{v}$ e, in particolare, le due masse.

Facciamo adesso una considerazione importante. Come tutte le considerazioni importanti, merita il nome di teorema.

Teorema 2.1. *Il vettore $\vec{J}$ è costante durante il moto.*

Dimostrazione. Calcoliamo la variazione di $\vec{J}$ dal tempo iniziale t_0 al tempo generico t:

$$\frac{\vec{J}(t) - \vec{J}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0},$$

perché $\vec{r}$ e $\vec{a}$ sono vettori paralleli. Ciò significa che $\vec{J}(t) = \vec{J}(t_0)$ per ogni t, cioè il vettore momento angolare non cambia durante il moto dei due corpi. □

Si dice che $\vec{J}$ è un **integrale primo** del problema dei due corpi. Se $\vec{J}$ è costante, allora neanche il piano ad esso perpendicolare cambia. Ma poiché i corpi si trovano in quel piano,

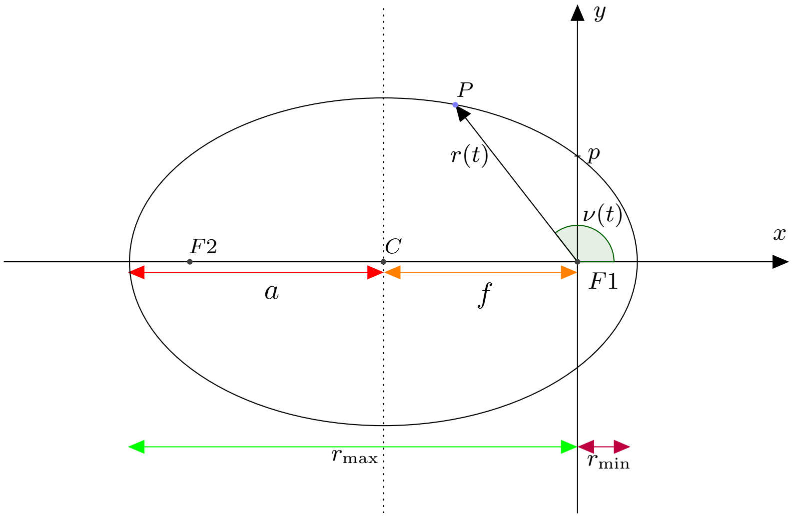


Figura 3: Esempio di orbita ellittica.

questo vuol dire che il moto avviene sempre nello stesso piano. La considerazione precedente ci permette di scrivere la soluzione dell'equazione ridotta (1) in coordinate polari:

$$r(t) = \frac{p}{1 + e\cos\nu(t)} \tag{2}$$

dove

$$p = \frac{J^2}{GM}$$

è una costante detta *semilato retto* ed e è un numero positivo, chiamato *eccentricità*. Per capire di che curva si tratta torniamo a coordinate cartesiane:

$$x = r\,\cos\nu \qquad y = r\,\sin\nu.$$

Si ha

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = p - e\,x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = (p - e\,x)^2$$

e quindi la curva cambia al variare di e, si tratta comunque di una conica:

- se $e = 0$ è una circonferenza;
- se $0 < e < 1$ è un'ellisse;
- se $e = 1$ è una parabola;
- se $e > 1$ è un'iperbole.

Abbiamo fatto vedere che le orbite dei pianeti sono quindi ellissi, o più in generale coniche. Abbiamo cioè ottenuto la **prima legge di Keplero**.

2.1 Orbite ellittiche

Se $e \in [0, 1)$, la conica definita dalla (2) è un'ellisse (figura 3) di cui l'origine occupa uno dei due fuochi. In questo caso, possiamo definire l'*estensione dell'orbita* come

$$2a := r(\nu = 0) + r(\nu = \pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2},$$

da cui $p = a(1 - e^2)$.

La lunghezza a rappresenta il **semiasse maggiore** dell'orbita. Possiamo distinguere altre grandezze geometriche legate all'ellisse:

- La *distanza focale* f, cioè la distanza del centro da uno dei due fuochi. Vale $f = ae$.
- Il *semiasse minore* b, di valore $a\sqrt{1-e^2}$.

Definiamo velocità areolare v_A la velocità con cui viene spazzata l'area di una porzione generica di ellisse. Vale il seguente teorema, che non dimostriamo:

Teorema 2.2. *La velocità areolare è costante, e vale* $v_A = J/2$.

Per effetto del precedente teorema, abbiamo che porzioni di orbita che sottendono aree uguali vengono percorse nello stesso tempo. È la **seconda legge di Keplero**.

Per esercizio, si può dimostrare la **terza legge di Keplero**:

Esercizio 2.1. Dimostrare che per un'orbita ellittica attorno a un corpo di massa M sussiste la seguente relazione tra periodo T e semiasse maggiore a:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Chiudiamo la sezione con una tabella che riporta le eccentricità delle orbite dei principali corpi celesti del sistema solare:

Pianeta	☿	♀	⊕	☾	♂	♃	♄	⛢	♆	♇
e	0.2	0.006	0.017	0.055	0.093	0.049	0.054	0.047	0.008	0.249

Esercizio 2.2.
1. Calcola la minima e la massima distanza del pianeta rispetto al corpo centrale, rispettivamente chiamate pericentro e apocentro, e indicate con $r_{\min}$ e $r_{\max}$, in funzione di a ed e.
2. Sapendo che la sonda *Juno*, attualmente in orbita ellittica attorno a Giove, ha $r_{\min} = 1.04R_{♃}$ e $r_{\max} = 40.56R_{♃}$, calcolare semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita ($R_{♃}$ è il raggio di Giove).

Esercizio 2.3. Un satellite si dice in orbita geostazionaria se il periodo dell'orbita è uguale al periodo di rotazione della Terra attorno al proprio asse. I satelliti geostazionari sono usati in innumerevoli applicazioni, come la meteorologia e le telecomunicazioni.

Calcola il raggio di un'orbita circolare geostazionaria.

Esercizio 2.4.
1. Un satellite è in orbita circolare di altezza 350 km sulla superficie della Terra. Calcolane il periodo.

2. Un satellite è in orbita circolare di altezza 80 km sulla superficie della Luna. Calcolane il periodo.

3. Cosa puoi osservare confrontando i risultati ottenuti?

Esercizio 2.5. Si vuole inserire una sonda in un'orbita circolare *polare* della Terra, in modo che due successivi punti sottorbita all'equatore siano distanti 3000 km. Quale deve essere l'altezza della sonda?

Esercizio 2.6. La Divisione di Cassini è pressoché vuota ed è il "buco" più prominente nel sistema degli anelli di Saturno, facilmente osservabile anche da Terra. Si estende da 117580 km fino a 122170 km dal centro di Saturno. Quali sono i periodi orbitali delle particelle che si trovano ai bordi della Divisione di Cassini?

Sapendo che il satellite di Saturno Mimas orbita il pianeta ogni 22.5 h, che relazione c'è tra Mimas e le particelle nel bordo interno della Divisione di Cassini?

Vedi l'esercizio 4.1 per scoprire in quanto tempo si è svuotata la Divisione di Cassini.

2.2 Orbite paraboliche

Se $e = 1$, l'orbita è una parabola (figura 4), il cui fuoco è l'origine degli assi. Questo si vede facilmente dall'equazione in forma cartesiana, che diventa

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}.$$

Il pericentro dell'orbita dista dal fuoco $r_{\text{min}} = p/2$.

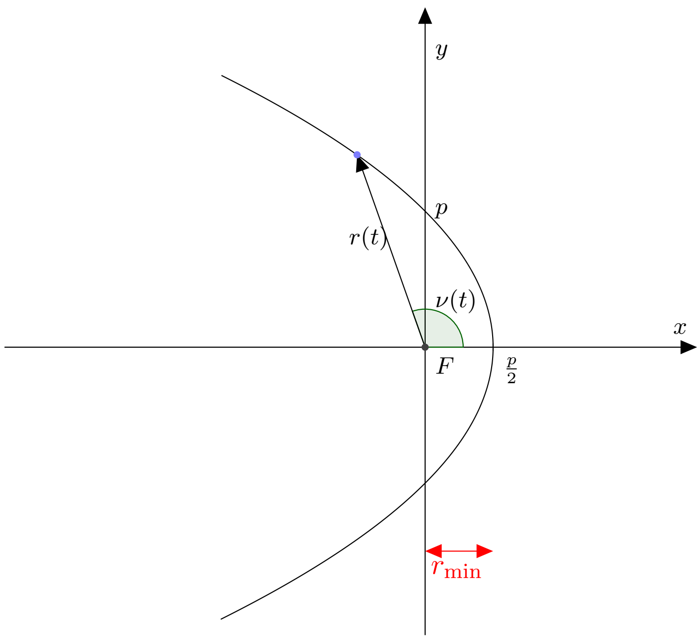


Figura 4: Esempio di orbita parabolica.

2.3 Orbite iperboliche

Se $e > 1$, l'orbita è un'iperbole (figura 5), di cui l'origine occupa uno dei due fuochi. La distanza del pericentro vale

$$r_{\min} = p/(1+e) < p/2,$$

e l'angolo d'inclinazione degli asintoti, β, deve soddisfare la relazione

$$1 - e\cos\beta = 0,$$

ottenuta mandando r all'infinito nell'equazione della conica. Nel caso di orbita iperbolica, risulta ancora ben definito il numero $a := p/(1-e^2)$, che però è negativo. Il suo modulo, $|a|$, rappresenta il semiasse maggiore dell'iperbole, cioè la distanza tra il centro dell'iperbole e il pericentro. La distanza focale f risulta, quindi, essere:

$$f = r_{\min} + |a| = |a|\,(e-1) + |a| = |a|\,e.$$

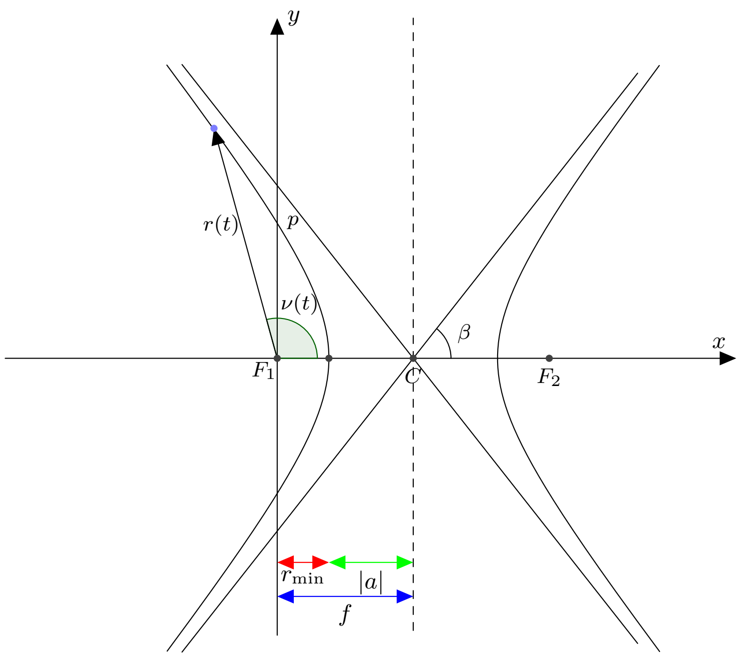


Figura 5: Un esempio di orbita iperbolica.

2.4 Leggi di conservazione

Abbiamo già visto che il vettore momento angolare $\vec{J}$ non cambia durante il moto. Si dice che è un *integrale primo* del moto. Esiste però un altro integrale primo, quello dell'energia totale (per unità di massa):

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

In matematica il calcolo degli integrali primi di un determinato sistema dinamico è un problema importante e molto studiato.

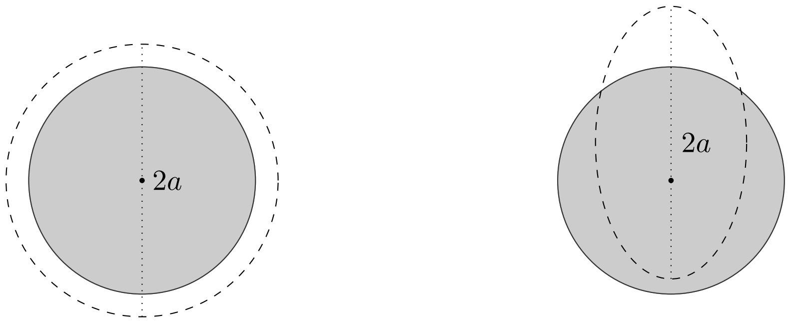


Figura 6: Satellite o missile balistico? Tanto l'energia è la stessa.

Esercizio 2.7. Nel caso di un corpo di massa m che orbita attorno a un corpo centrale di massa M, l'energia e il modulo del momento angolare per unità di massa si scrivono:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}, \quad J = rv\sin\theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$.

1. Supponiamo che l'orbita sia un'ellisse di semiasse maggiore a. Usa la conservazione dell'energia e del momento angolare per dimostrare che l'energia è data dalla

$$E = -\frac{GM}{2a}.$$

2. Scrivendo a in funzione del semilato retto p e dell'eccentricità e si ottiene la formula

$$E = -\frac{GM(1-e^2)}{p}$$

valida anche per orbite paraboliche ed iperboliche. Classifica le orbite in base al segno dell'energia.

La formula calcolata nell'esercizio precedente si rivelerà utilissima in moltissime applicazioni. Una prima considerazione che facciamo è che l'energia dipende esclusivamente dal semiasse maggiore a, pertanto un'orbita circolare di raggio a e un'ellisse di semiasse maggiore a hanno la stessa energia. Come nel caso della figura 6, questo vuol dire che con lo stesso lanciatore si può mettere in orbita un satellite oppure lanciare un missile balistico intercontinentale.

2.5 Velocità cosmiche

Possiamo sfruttare la formula precedente per calcolare quale velocità dobbiamo dare a un satellite per metterlo in orbita circolare "bassa", cioè con un raggio molto vicino al raggio terrestre $R_\oplus = 6378$ km. Basta uguagliare le due espressioni dell'energia:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus}{2R_\oplus}$$

e ricavare v:

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} \simeq 7.8 \text{ km/s}.$$

Tale valore prende il nome di *prima velocità cosmica* e si indica con v_I. Poiché in questa definizione si trascura sia la topografia del pianeta che l'eventuale atmosfera, la prima velocità cosmica non ha alcun significato realistico nel progetto del lancio di un satellite artificiale.

Esercizio 2.8. Vuoi progettare una missione spaziale: devi, perciò, far uscire una sonda dal campo gravitazionale terrestre e metterla in un'orbita illimitata. Quale velocità v_{II} devi dare alla sonda affinché ciò sia possibile?
(*Suggerimento: che segno deve avere l'energia della sonda? Risposta: poiché dobbiamo avere un'orbita illimitata, allora $E \geq 0$, cioè*

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} \geq 0;$$

otteniamo

$$v \geq \sqrt{2}v_\mathrm{I} \simeq 11.2 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Tale velocità viene anche detta seconda velocità cosmica *o* velocità di fuga. *Essa non dipende dalla direzione di lancio, che può avvenire in qualsiasi direzione sopra al piano tangente, ed è maggiore di un fattore $\sqrt{2}$ della prima velocità cosmica. Perciò i satelliti artificiali richiedono velocità di lancio che stanno in un intervallo relativamente ristretto.*)

2.6 Eccesso iperbolico

Usando la conservazione dell'energia meccanica possiamo calcolare la teorica velocità che una sonda su un'orbita iperbolica avrebbe all'infinito (cioè per r molto grande):

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a},$$

mandando $r \to \infty$, si ottiene

$$v_\infty = \sqrt{-\frac{GM}{a}}. \tag{3}$$

Si osservi che, essendo l'orbita iperbolica, $a < 0$. La v_∞ si chiama velocità di eccesso iperbolico.

3 Traiettorie interplanetarie

In questo capitolo vogliamo studiare possibili modi per mandare un satellite artificiale dalla Terra verso un altro pianeta. Ovviamente si tratta di un problema molto complesso, ma noi lo approssimeremo in maniera tale da renderlo trattabile con le nozioni viste precedentemente. I concetti fondamentali sono le coniche e la conservazione dell'energia.

3.1 Equazione dei razzi

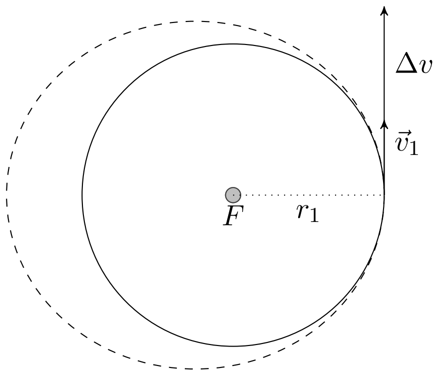
Nel seguito studieremo le manovre possibili per un viaggio interplanetario. Ogni manvora consiste nell'accensione "istantanea" di un razzo, che fa cambiare velocità (e orbita) alla sonda. Tuttavia una trattazione matematica astratta di un problema concreto non può prescindere dal considerare i vincoli imposti dalla realtà. Nei viaggi interplanetari un vincolo importante è dato dal propellente necessario per "guidare" la sonda a destinazione: questo carburante ha un costo che si vuole mantenere il più basso possibile. È possibile legare la massa del carburante usato durante una manovra con la variazione di velocità della sonda grazie all'*equazione dei razzi*:

$$\Delta m = m_0(1 - e^{-\frac{\Delta v}{K}}),$$

dove Δm è la massa di propellente usato, Δv è la variazione di velocità della sonda, m_0 la massa di carburante prima della manovra, K è una costante che dipende dal tipo di propellente utilizzato.

3.2 Premessa: manovra di cambiamento di apogeo

Nel seguito analizzeremo soltanto l'effetto di manovre che cambiano il modulo della velocità del satellite, ma non ne cambiano né direzione né verso:



Supponiamo che il nostro satellite si trovi su un'orbita circolare attorno alla Terra di raggio r_1. Sappiamo che la sua velocità è

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}},$$

mentre sappiamo che la velocità che deve avere per mettersi su un'orbita aperta è

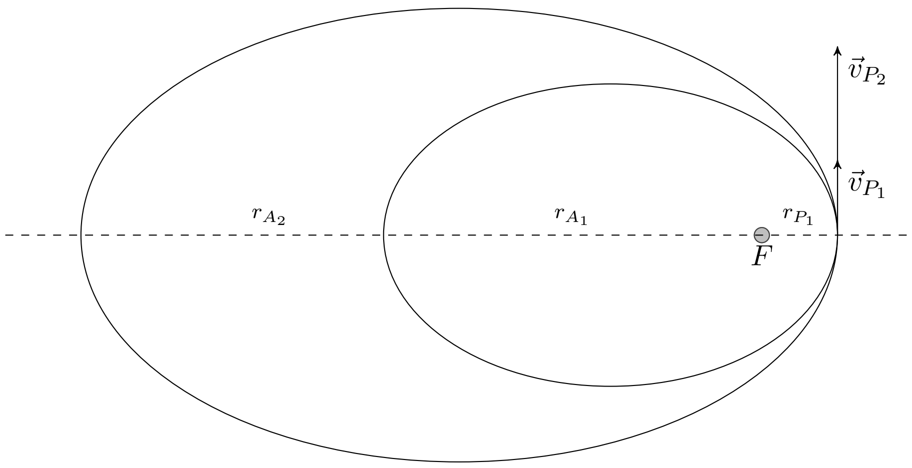
$$v_2 = \sqrt{2}v_1.$$

Ne segue che se la variazione di velocità dovuta alla manovra è tale che $v_1 + \Delta v < v_2$, cioè se

$$\frac{\Delta v}{v_1} < \sqrt{2} - 1$$

allora la sonda resta su un'orbita attorno alla Terra, altrimenti scapperà dal pianeta.

Esercizio 3.1. Supponiamo che il satellite sia in orbita ellittica con raggio di pericentro r_{P_1} e raggio di apocentro r_{A_1}. Calcolare il Δv necessario per mettere il satellite su di un orbita ellittica con $r_{P_2} = r_{P_1}$ e $r_{A_2} > r_{A_1}$ tramite una manovra effettuata al pericentro.



Soluzione. Il Δv che bisogna imprimere alla sonda è dato dalla differenza della velocità della sonda al pericentro dell'orbita finale e della velocità della sonda al pericentro dell'orbita iniziale.

La velocità della sonda appena prima di fare la manovra, che chiamiamo v_{P_1}, è data dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{v_{P_1}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_{P_1}} = -\frac{GM_\oplus}{r_{P_1} + r_{A_1}},$$

da cui si ottiene

$$v_{P_1} = \sqrt{2GM_\oplus \left(\frac{1}{r_{P_1}} - \frac{1}{r_{P_1} + r_{A_1}} \right)}.$$

La velocità della sonda appena dopo la manovra, chiamata v_{P_2}, è, invece, data da:

$$\frac{v_{P_2}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_{P_1}} = -\frac{GM_\oplus}{r_{P_1} + r_{A_2}},$$

da cui si ottiene

$$v_{P_2} = \sqrt{2GM_\oplus \left(\frac{1}{r_{P_1}} - \frac{1}{r_{P_1} + r_{A_2}} \right)}.$$

Concludiamo che

$$\Delta v = \sqrt{2GM_\oplus \left(\frac{1}{r_{P_1}} - \frac{1}{r_{P_1} + r_{A_2}} \right)} - \sqrt{2GM_\oplus \left(\frac{1}{r_{P_1}} - \frac{1}{r_{P_1} + r_{A_1}} \right)}.$$

□

3.3 Manovre a due impulsi: orbita di trasferimento di Hohmann

Supponiamo di avere una sonda in orbita circolare di raggio r_1 attorno alla Terra. Vogliamo studiare il problema di trasferire la sonda su di un'orbita "alta", cioè di raggio $r_2 > r_1$. Un esempio di applicazione di questo problema è il trasferimento di un satellite sull'*orbita geostazionaria* dopo averlo immesso in un'orbita circolare "bassa". Un esempio di soluzione è dato dal cosiddetto trasferimento alla Hohmann (figura 7): si accendono i razzi in modo da mettere la sonda in un'orbita ellittica che ha raggio al pericentro uguale a r_1 e raggio all'apocentro uguale a r_2. Quando la sonda arriva all'apocentro dell'orbita, si riaccendono i razzi per circolarizzare l'orbita. Oltre alle due manovre, la navigazione è garantita dalla fisica, senza necessità di accendere ulteriormente i razzi.

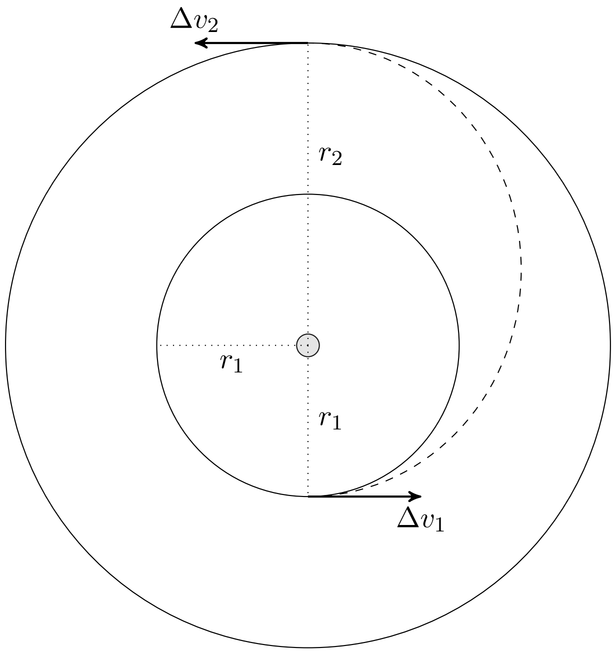


Figura 7: Trasferimento alla Hohmann.

Esercizio 3.2.
1. Calcola un'espressione del Δv totale per effettuare un trasferimento alla Hohmann.
2. Qual è il tempo necessario per il trasferimento?

Soluzione. Sia $\rho = r_2/r_1$. Si ha che

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} + \sqrt{\frac{1}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho(1+\rho)}} - 1 \right).$$

□

Una proprietà importante del trasferimento alla Hohmann è data dal seguente teorema:

Teorema 3.1. *Il trasferimento alla Hohmann è quello che richiede il minimo Δv tra tutti i trasferimenti a due impulsi tra orbite circolari e complanari.*

I trasferimenti alla Hohmann possono essere usati per il trasferimento interplanetario. Basta considerare che il corpo centrale sia il Sole e le due orbite circolari siano quelle della Terra e di un altro pianeta.

Esercizio 3.3. Studiare un trasferimento alla Hohmann di una sonda interplanetaria tra la Terra e Marte, assumendo che i due pianeti si trovino su orbite complanari e circolari, di raggio $r_\oplus = 1$ AU e $r_♂ = 1.524$ AU. Determinare:

1. la variazione di velocità Δv richiesta;
2. la durata del trasferimento;
3. la variazione percentuale di massa $\Delta m/m_0$ supponendo di usare un propulsore avente una costante $K = 300$ s.

3.4 Manovre a tre impulsi: trasferimento biellittico

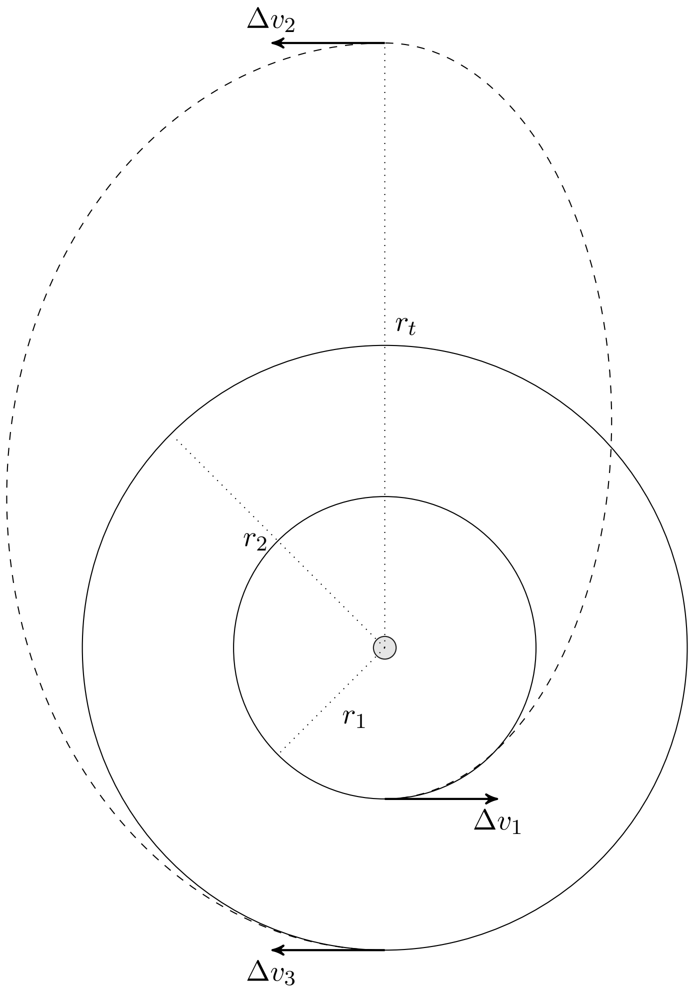
La manovra di Hohmann è ottimale tra tutte quelle a due impulsi. Viene naturale chiedersi se aumentando il numero di impulsi si può ottenere lo stesso trasferimento con un Δv più basso di quello di Hohmann.

Consideriamo la seguente traiettoria di trasferimento, detta *trasferimento biellittico* perché fa uso di due diverse orbite ellittiche:

Con la prima manovra si immette la sonda su un'orbita ellittica che ha raggio al pericentro uguale a r_1 e raggio all'apocentro uguale a $r_t > r_2$. Una volta all'apocentro, si riaccendono i razzi per cambiare il pericentro dell'orbita da r_1 a r_2. Infine, una volta arrivata al pericentro della nuova orbita, si riaccendono i razzi (stavolta nel senso opposto) per circolarizzare l'orbita.

Omettiamo l'espressione del Δv totale (somma di tre Δv) solo perché è lunga, ma calcolarla è un esercizio analogo a quello del trasferimento alla Hohmann. Ci limitiamo solo ad osservare che tale Δv dipende sia dal rapporto r_2/r_1 (come per l'orbita di Hohmann) sia dal rapporto r_t/r_1 (cioè, ai fini del calcolo del Δv totale è importante quanto in là si manda la sonda sull'orbita ellittica). Si può dimostrare che se $r_2/r_1 < 11.94$ allora il trasferimento alla Hohmann è sempre più conveniente del biellittico, qualunque r_t si scelga. Invece, se $r_2/r_1 > 11.94$, il trasferimento biellittico è preferibile purché il rapporto r_t/r_1 sia sufficientemente elevato (si veda la figura 8). Inoltre, si può calcolare che il risparmio massimo che si può ottenere da un trasferimento biellittico è dell'8%, dunque, considerando che il tempo impiegato a effettuare il trasferimento è più lungo, in generale non è molto più conveniente.

Se il trasferimento coinvolge anche un cambiamento di piano orbitale, allora il trasferimento biellittico si rivela molto utile.



3.5 Gravity assist

Il gravity assist è una tecnica usatissima in navigazione spaziale per accelerare (o decelerare) una sonda spaziale senza accendere i razzi. Esso consiste nel passare sufficientemente vicino a un pianeta in modo da utilizzare la sua spinta gravitazionale per cambiare la velocità della sonda. È stata teorizzata dal matematico italiano Giuseppe “Bepi” Colombo e usata per la prima volta nel 1974 per la sonda Mariner 10, destinata a Mercurio.

Quanto vicino al pianeta deve passare la sonda per usufruire del gravity assist? Occorre che la sonda entri nella cosiddetta sfera di influenza del pianeta, cioè una zona attorno al pianeta in cui quest'ultimo ha un effetto primario rispetto al Sole. Il raggio della sfera di influenza di un pianeta di massa M_P e distanza r_P dal Sole è stato calcolato da Laplace ed è uguale a:

$$r_{\mathrm{sf}} \simeq r_P \left(\frac{M_P}{M_\odot} \right)^{\frac{2}{5}}, \tag{4}$$

dove $M_\odot$ è la massa del Sole.

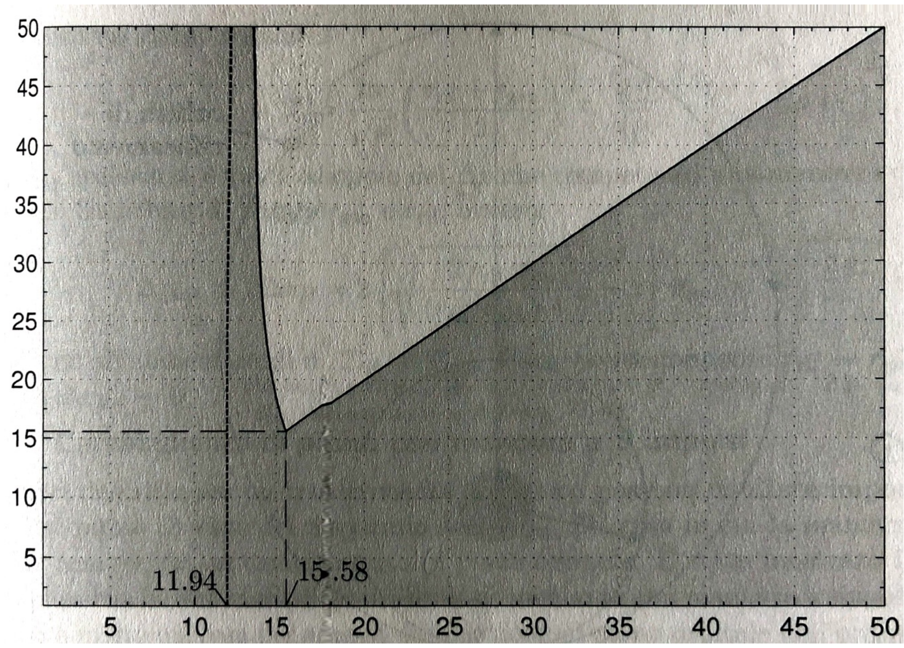


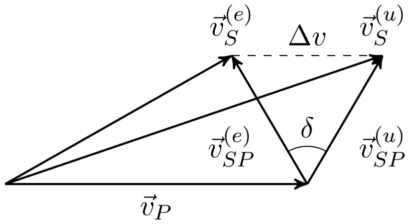
Figura 8: Confronto tra manovra biellittica e manovra di Hohmann. Sull'asse orizzontale è riportato il parametro r_2/r_1, mentre sull'asse verticale r_t/r_1. Nella zona grigia risulta più conveniente la manovra di Hohmann.

Per calcolare il raggio della sfera di influenza della Luna rispetto alla Terra, basta sostituire la massa del Sole con quella della Terra e la distanza Luna-Sole con la distanza Luna-Terra:

$$r_{\mathrm{sf}☾} \simeq 384000 \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{5}} = 66280 \text{ km}.$$

Esercizio 3.4. Quale pianeta ha la sfera di influenza più grande tra Giove e Nettuno? Discuti la congettura con i tuoi compagni e le tue compagne e verificatelo con un calcolo esplicito, usando la formula (4).

Come funziona il gravity assist? Supponiamo che il satellite passi "dietro" al pianeta (figura 9): quando si trova all'interno della sfera di influenza il moto può essere approssimato con un moto iperbolico attorno al pianeta. Allora il vettore velocità relativa della sonda rispetto al pianeta ha lo stesso modulo in entrata e in uscita dalla sfera di influenza (approssimabile con v_∞ (3)), ma la direzione cambia. Andando a calcolare la velocità della sonda rispetto al Sole con la regola del parallelogramma, si vede che dopo l'incontro ha un modulo maggiore che in entrata:



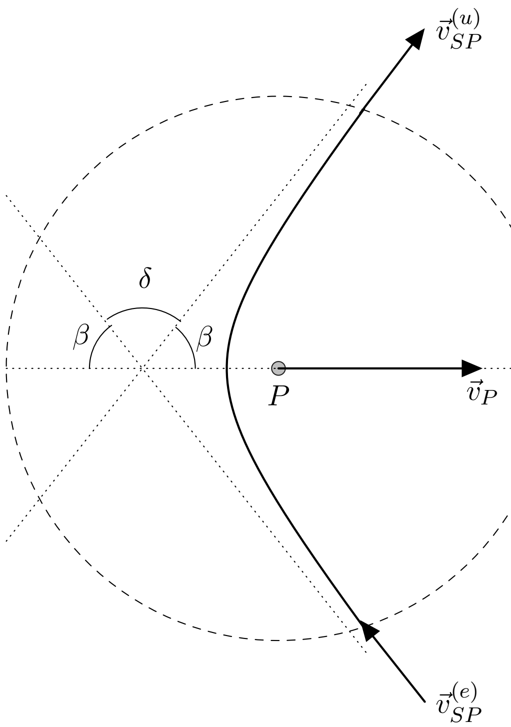


Figura 9: Un esempio di gravity assist.

L'angolo di rotazione del vettore velocità è

$$\delta = \pi - 2\beta,$$

quindi l'incremento Δv ricevuto è

$$\Delta v = 2v_\infty \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2v_\infty \cos\beta = 2\frac{v_\infty}{e}.$$

Esercizio 3.5. Una sonda interplanetaria è appena entrata nella sfera di influenza di Marte e la sua traiettoria ha le seguenti caratteristiche:

$$a = -20334 \text{ km}, \quad e = 1.5.$$

Calcolare il modulo della variazione eliocentrica di velocità della sonda dovuta all'incontro iperbolico con Marte.

Esercizio 3.6. Il 28 febbraio 2007 la sonda New Horizons della NASA ha effettuato un gravity assist con il pianeta Giove per poter guadagnare velocità ed arrivare in minor tempo al sistema di Plutone.

Sapendo che la velocità rispetto a Giove al pericentro era di 21.2 km/s, e che il pericentro dell'orbita iperbolica giovicentrica era a $32.25 R_{♃}$, calcolare il Δv guadagnato durante il gravity assist.

Esercizio 3.7. Dalla formula

$$\Delta v = 2\frac{v_\infty}{e}$$

si vede che il valore massimo per Δv si ottiene in corrispondenza di $e = 1$. Tale valore è però irraggiungibile perché al diminuire di e il pericentro dell'orbita si avvicina al centro del pianeta. Qual è il valore minimo di e per evitare lo schianto della sonda con il pianeta?

4 Esercizi di matematica spaziale

Esercizio 4.1 (Come Mimas ha creato la Divisione di Cassini).

1. La massa di Mimas è 4×10^{19} kg, e la sua distanza dal centro della Divisione di Cassini è 67000 km. Calcola l'accelerazione gravitazionale di una ipotetica particella della Divisione di Cassini dovuta a Mimas.
2. Il tempo di incontro delle particelle nella Divisione di Cassini con Mimas è di circa 2h ogni orbita. Qual è l'incremento di velocità delle particelle dopo ogni orbita di 12 ore?
3. Sapendo che una particella viene espulsa dalla Divisione di Cassini appena la sua velocità raggiunge 1 km/s, quanti anni ci vorranno affinché questo accada?

Esercizio 4.2 (Il periodo di rotazione di Giove).

1. Giove ruota attorno al proprio asse ogni 9.92 h e la sua luna Io ruota attorno a Giove ogni 42.5 h. Qual è l'arco di tempo tra due passaggi consecutivi di Io su un particolare punto di Giove?
2. Adesso supponiamo di non conoscere il periodo di rotazione di Giove, possiamo determinarlo utilizzando le osservazioni della sonda Voyager, la quale osserva la Grande Macchia Rossa di Giove. Calcolare il periodo di rotazione di Giove sapendo che la Grande Macchia rossa è osservata da Voyager al tempo $t_1 = 2$h 25min quando la sua distanza da Giove è $D_1 = 770000$ km e di nuovo al tempo $t_2 = 16$h 24 min quando la distanza della sonda da Giove è 472000 km e Voyager si è mossa di un angolo di 147.2°.

Esercizio 4.3 (Problema dei 3 corpi). Dalla terza legge di Keplero possiamo dedurre che aumentando la distanza di un pianeta dal sole aumenterà anche il suo periodo. Supponendo che la terra orbiti attorno al sole con un orbita circolare di raggio $R = 1.5 \times 10^8$ km e di periodo $T = 1$ anno, e che uno spacecraft orbiti attorno al sole nello stesso piano, ma ad una distanza maggiore $R + a$, lo spacecraft avrà un periodo maggiore di quello della Terra, e se inizia a muoversi a partire da un punto sulla congiungente Terra-Sole resterà piano piano sempre più indietro rispetto alla Terra.

Ma la situazione cambia se a è sufficientemente piccolo perché in questo caso la forza gravitazionale dovuta alla Terra si somma a quella dovuta al Sole. Per bilanciare la spinta del Sole e della Terra lo spacecraft si dovrà muovere più veloce. C'è un valore di a tale che l'accelerazione dello spacecraft è sufficiente a mantenerlo in orbita con la Terra. Se questo succede lo spacecraft ha un'orbita circolare di raggio a attorno al sole, ma periodo T pari a quello della Terra. Qual è il valore di a che permette quest'orbita?

Esercizio 4.4 (L'ultima eclisse di Sole). Si verificano eclissi solari totali perché la dimensione angolare della Luna è quasi uguale a quella del Sole. La Luna si sta costantemente allontanando dalla Terra a causa delle maree indotte dalla Terra. Ci sarà un momento in cui queste due dimensioni angolari non corrisponderanno più e la Luna sarà troppo piccola per causare un'eclissi solare totale.

Quando succederà?

1. La distanza minima dalla Luna dalla Terra, chiamata perigeo, è di 356.400 chilometri. A quella distanza, la dimensione angolare della Luna dalla superficie della Terra è di 0,559 gradi. Supponendo di raddoppiare la distanza dalla Luna, quale sarebbe la sua nuova dimensione angolare, vista dalla superficie della Terra?
2. Supponi di aver aumentato la distanza della Luna di 50.000 chilometri. Quale sarebbe ora la dimensione angolare?
3. Il Sole ha dimensione angolare minore vicino al solstizio d'estate ad una distanza di 152 milioni di chilometri, in questo punto ha un diametro angolare di 0,525 gradi. Quanto lontana deve essere la Luna per corrispondere al diametro apparente del Sole? Quanto più lontano dalla Terra sarà la Luna in quel momento?
4. La Luna si sta allontanando dalla Terra ad una velocità di 3,8 centimetri all'anno. Quanti anni ci vorranno per spostarsi della distanza trovata nel problema precedente?

5 Costanti utili

Sole

Massa: $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg
Parametro gravitazionale: $GM_\odot = 1.327 \times 10^{11}$ km^3 s^{-2}

Terra

Massa: $M_\oplus = 5.9736 \times 10^{24}$ kg
Raggio: $R_\oplus = 6378$ km
Semiasse maggiore: $a_\oplus = 1$ AU$= 1.496 \times 10^8$ km
Parametro gravitazionale: $GM_\oplus = 3.986 \times 10^5$ km^3 s^{-2}

Luna

Massa: $M_☾ = 7.3476 \times 10^{22}$ kg $= \frac{1}{81} M_\oplus$
Raggio: $R_☾ = 1737.5$ km
Distanza dalla Terra (media): $r_{☾\oplus} = 384000$ km
Parametro gravitazionale: $GM_☾ = 4.903 \times 10^3$ km^3 s^{-2}

Marte

Massa: $M_♂ = 6.4185 \times 10^{23}$ kg
Raggio: $R_♂ = 3389$ km
Semiasse maggiore: $a_♂ = 1.523$ AU
Parametro gravitazionale: $GM_♂ = 4.2828 \times 10^4$ km^3 s^{-2}

Giove

Massa: $M_♃ = 1.8986 \times 10^{27}$ kg
Raggio: $R_♃ \simeq 70000$ km
Semiasse maggiore: $a_♃ = 5.2$ AU
Parametro gravitazionale: $GM_♃ = 1.267 \times 10^8$ km^3 s^{-2}

Saturno

Massa: $M_{♄} = 5.684 \times 10^{26}$ kg
Raggio: $R_{♄} \simeq 58232$ km
Semiasse maggiore: $a_{♄} = 9.53$ AU
Parametro gravitazionale: $GM_{♄} = 3.7939 \times 10^{7}$ km^3 s^{-2}

Nettuno

Massa: $M_{♆} = 1.0243 \times 10^{26}$ kg
Raggio: $R_{♆} = 24624$ km
Semiasse maggiore: $a_{♆} = 30.06$ AU
Parametro gravitazionale: $GM_{♆} = 6.871 \times 10^{6}$ km^3 s^{-2}

Altro

Costante di gravitazione universale: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ km^3 kg^{-1} s^{-2}
Unità astronomica: AU$= 1.496 \times 10^{8}$ km

Bibliografia

1 D. Serra, Elementi di meccanica celeste - appunti del corso della professoressa A.M. Nobili (scaricabile da http://poisson.phc.dm.unipi.it/∼dserra)

2 G. Mengali, A. Quarta, Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale, Pisa University Press

3 H. Curtis, Orbital Mechanics for Engineering Students, Elsevier

4 B. Kastner, Space Mathematics - Math Problems Based on Space Science, Dover

5 NASA, Real-World Math - Year of the Solar System