Lezione 13

Teoria

Riprendiamo quanto detto nella Proposizione **??**:

Proposizione 1. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo,* V, W *dei* $\mathbb{K}$*-spazi vettoriali,* $v_1, \dots, v_n$ *vettori di* V*,* $U = Span(\{v_1, \dots, v_n\})$ *sottospazio vettoriale di* V *e* $V \xrightarrow{f} W$ *un'applicazione lineare. Allora:*

1) $f(v_1), \dots, f(v_n)$ *sono linearmente indipendenti* $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ *sono linearmente indipendenti* $\wedge\ U \cap Ker(f) = \{0_V\}$.

2) $f(U) = Span(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\})$.

3) f *iniettiva* $\Rightarrow dim\ f(U) = dim\ U$.

Quindi, in particolare, se f *è un'applicazione lineare iniettiva, manda vettori indipendenti in vettori indipendenti, se inoltre* $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ *è una base di* V*, abbiamo che* $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ *è una base di* $Imm(f)$.

Corollario 1. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo,* V, W *dei* $\mathbb{K}$*-spazi vettoriali e* $V \xrightarrow{f} W$ *un isomorfismo.*
Allora f *trasforma una base di* V *in una base di* W.

Teorema 1 (Formula delle dimensioni)**.** *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo,* V *un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale finitamente generato,* W *un altro* K*-spazio vettoriale e* $V \xrightarrow{f} W$ *un'applicazione lineare. Allora abbiamo che:*

$$dim\ V = dim\ Ker(f) + dim\ Im(f)$$

Dimostrazione. Sia $dim\ V = n$ e $dim\ Ker(f) = k$. Sia $K = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $Ker(f)$, completiamola a $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$, base di V.
Sappiamo che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ generano $Imm(f)$, estraiamo da questo insieme una base. $f(v_1) = \dots = f(v_k) = 0_W$ sono tutti linearmente dipendenti (in quanto nulli); al contrario $I = \{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti per la Proposizione **??** (infatti $U = Span(\{v_{k+1}, \dots, v_n\})$ è uno spazio vettoriale di dimensione $dim\ V - dim\ Ker(f)$ la cui intersezione con $Ker(f)$ è $\{0_V\}$), quindi sono generatori indipendenti: una base.
Possiamo quindi dire che $dim\ Imm(f) = dim\ V - dim\ Ker(f)$.

Corollario 2. *Nelle condizioni del teorema precedente possiamo quindi dire:*

a) $dim\ V > dim\ W \Rightarrow f$ *non è iniettiva.*

b) dim $V <$ dim $W \Rightarrow f$ non è suriettiva.

c) Se dim $V =$ dim W allora f iniettiva $\Leftrightarrow f$ suriettiva.

Dimostrazione. a-b) Per assurdo sulla formula delle dimensioni.

c) f iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \}0_V\{ \Leftrightarrow dim\ V = dim\ Imm(f) \Leftrightarrow dim\ Imm(f) = dim\ W \Leftrightarrow f$ suriettiva.

Corollario 3. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.*

$$V \simeq W \Leftrightarrow \ dim\ V = dim\ W$$

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' Sia $n = dim\ V = dim\ W$, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di W; allora, tramite il passaggio a coordinate abbiamo $V \simeq \mathbb{K}^n \simeq W$; e la composizione di isomorfismi è un isomorfismo.

'$\Rightarrow$' $V \simeq W \Rightarrow \exists V \xrightarrow{f} V$ ismorfismo. Allora $dim\ V = dim\ Imm(f) + dim\ Ker(f) = dim\ W + 0 = dim\ W$.

Riflessione 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, pensiamo alla relazione di equivalenza $\simeq$, tale che $(V, W) \in \simeq \Leftrightarrow V, W$ sono isomorfi; il corollari appena visto ci dice che le classi di equivalenza di $\simeq$ sono numerabili e sono:

$$\{\mathbb{K}\text{-spazi vettoriali}\}/_{\simeq} = \{[\mathbb{K}^1], [\mathbb{K}^2], \dots\}$$

L'invariante di queste classi di equivalenza è la dimensione, poiché abbiamo detto che due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Quindi la dimensione è necessaria e sufficiente affinché due spazi vettoriali siano isomorfi, rappresenta quindi un sistema completo di invarianti; si dice anche che la dimensione è caratteristica, per dire che è l'elemento di scelta per l'appartenenza a una precisa classe di equivalenza: è l'elemento di discrimine, la caratteristica comune a tutti che è sufficiente per appartenere all'insieme.

Osservazione 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e U, W dei suoi sottospazi vettoriali. Consideriamo $U \times W \xrightarrow{f} V$ con la legge: $f(u, w) = u + w$. f è lineare e $Imm(f) = U + W$ (una è banale, l'altra per definizione). Consideriamo ora $Ker(f) = \{(u, w) \mid u + w = 0\} = \{(u, -u) \mid u \in U \cap W\}$, da questo si vede che $Ker(f) \simeq U \cap W$ tramite l'isomorfismo $(u, -u) \xrightarrow{\phi} u$. Abbiamo allora, per la formula delle dimensioni:

$$dim\ U \times W = dim\ Ker(f) + dim\ Imm(f)$$

$$dim\ U + dim\ W = dim\ (U \cap W) + dim\ (U + W)$$

Abbiamo quindi ridimostrato, passando per un altra strada, la formula di Grassmann.

Prendiamo ora il caso in cui $V = U \oplus W$ e consideriamo che esista anche W', sottospazio vettoriale di V tale che $V = U \oplus W'$. Possiamo allora dire, per Grassmann, che $dim\ W = dim\ W'$ e quindi $W \simeq W'$. Cerchiamo adesso di trovare un isomorfismo tra W e W' che sia indipendente dalle basi di W e W' che possiamo scegliere: potremmo facilmente (o meno) trovare una base di W, una base di W' e poi trovare l'unica applicazione lineare che mandi ordinatamente i vettori della base trovata di W nei vettori della base scelta di W'; potremmo farlo, ma vedremo che è possibile trovare un isomorfismo tra questi due sottospazi vettoriali senza dover ricorrere alle basi.

Sia $w \in W$ un generico elemento di W, allora w può essere scritto in modo unico come combinazione lineare di elementi di U e di W' (poiché questi sottospazi vettoriali sono in somma diretta tra di loro). Quindi $w = u + w'$; ma allora è ben definita l'applicazione $W \xrightarrow{\psi} W'$ con la legge $f(w) = w'$.
Per poter dire che questa applicazione è un isomorfismo ci basta mostrare che è iniettiva (visto che si verifica molto facilmente la linearità).
Sia $w \in Ker(\psi) \Rightarrow w = u + 0_{W'} \Rightarrow w \in U \Rightarrow w \in U \cap W \Rightarrow w = \{0_V\}$.

Proposizione 2. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W, Z dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$, $W \xrightarrow{g} Z$ applicazioni lineari. Allora:*

a) $dim\ Imm(g \circ f) \leq min(dim\ Imm(f), dim\ Imm(g))$.

b) Se f è isomorfismo allora $dim\ Imm(g \circ f) = dim\ Imm(g)$.

c) Se g è isomorfismo allora $dim\ Imm(g \circ f) = dim\ Imm(f)$.

Dimostrazione. a) $Imm(g \circ f) = Imm(g\ |_{Imm(f)})$. Per la formula delle dimensioni abbiamo: $dim\ Imm(g \circ f) = dim\ Imm(f) - dim\ Ker(g\ |_{Imm(f)}) \Rightarrow dim\ Imm(g \circ f) \leq dim\ Imm(f)$. Vale inoltre $Imm(g \circ f) \subseteq Imm(g)$, quindi $dim\ Imm(g \circ f) \leq dim\ Imm(g)$.

b) Se f è isomorfismo allora $Imm(f) = W \Rightarrow Imm(g \circ f) = Imm(g\ |_{Imm(f)}) = Imm(g\ |_W) = Imm(g)$.

c) Se g è isomorfismo allora $Ker(g) = \{0_W\}$. Quindi $dim\ Imm(g \circ f) = dim\ Imm(f) - dim\ Ker(g\ |_{Imm(f)}) = dim\ Imm(f) - 0 = dim\ Imm(f)$.

Definizione 1 (Rango)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Si definisce rango di f, $(rk(f))$ la dimensione dello spazio delle immagini: $rk(f) = dim\ Imm(f)$.

Osservazione 2. Consideriamo $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$, sappiamo che induce naturalmente una applicazione $\mathbb{K}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^p$, si dice anche in questo caso $rk(A) = dim\ Imm(L_A) = dim\ \mathcal{C}_A$.

Proposizione 3. *Rivediamo l'ultima proposizione alla luce di questa nuova definizione: date $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}), B \in \mathcal{M}(n, q, \mathbb{K})$*

- *$rk(AB) \leq min(rk(A), rk(B))$.*
- *Se $n = p$ e A è invertibile, allora $rk(AB) = rk(B)$.*
- *Se $n = q$ e B è invertibile, allora $rk(AB) = rk(A)$*

Riflessione 2. Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Abbiamo già detto che la matrice A può essere intesa come un sistema, le soluzioni di $AX = 0$ sono quello che viene detto il $Ker(A)$, cioè lo spazio vettoriale dei vettori di $\mathbb{K}^n$ che vengono mandati a zero da L_A.

Proviamo a calcolare la dimensione di $Ker(A)$; sappiamo che A è equivalente a una matrice scalinata S; chiamiamo $r \leq p$ il numero di pivot di S. Visto che le ultime $p - r$ righe di S sono nulle, possiamo, senza perdita di generalità, dire che $S \in \mathcal{M}(r, n, \mathbb{K})$. Possiamo ancora supporre che i pivot siano nelle prime r colonne a partire da sinistra. Come abbiamo visto nella Riflessione **??**, possiamo risolvere il sistema a partire dall'ultima riga ricavando l'incognita della colonna del pivot di ogni riga in funzione delle variabili già trovate, ci saranno alcune variabili dipendenti, altre indipendenti, abbiamo fatto in modo da avere le colonne delle variabili dipendenti a sinistra. Alla fine avremo ricavato r variabili in funzione di altre $n - r$. Per trovare una base di $Ker(S) = Ker(A)$ posso fissare una a una tutte le variabili indipendenti, e porre tutte le altre a zero. Ciascuna di queste variabili, da sola, contribuisce alla propria riga nella combinazione lineare: se nella combinazione lineare abbiamo α_1 alla $r+1$-esima riga sappiamo che il primo vettore è moltiplicato per α_1; in caso di combinazione nulla sappiamo che le ultime $n-r$ cifre di ciascun vettore devono essere nulle, ma visto che le prime r cifre sono calcolare a partire unicamente da queste ultime, avremo allora che anche le prime r sono nulle. Abbiamo quindi:

$$Ker(S) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, v = \begin{pmatrix} p_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ p_r(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_{r+1} \begin{pmatrix} ? \\ \hline 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} ? \\ \hline 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Questi vettori sono tutti indipendenti; convinciamoci anche del fatto che generano le soluzioni; prendiamo un generico elemento z di $Ker(S)$, sappiamo che possiamo scrivere una combinazione lineare dei vettori dati in modo che le ultime righe della combinazione lineare corrispondano alle ultime righe di z. Vediamo allora che:

$$\forall z \in Ker(S) = Ker(A), \exists z_1, \ldots, z_{n-r} \;\mid\; z = z_1 \begin{pmatrix} ? \\ \hline 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + z_{n-r} \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta_z$$

Dobbiamo dimostrare che $\Delta_z = 0$ sapendo che le ultime sue $n - r$ righe sono nulle; possiamo infatti dare a z_i il valore della $r + 1$-esima riga di z e in questo modo abbiamo che le ultime righe di Δ_z sono nulle. Consideriamo

$$z - z_1 \begin{pmatrix} ? \\ \hline 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} - \ldots z_{n-r} \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta_z$$

Ma $Ker(A) = Ker(S)$ è uno spazio vettoriale, quindi chiuso per somma, inoltre ogni vettore è univocamente determinato dalle sue ultime $n-r$ righe: le prime si ricavano interamente a partire da queste; esiste quindi un unico vettore che ha le ultime $n-r$ righe nulle: il vettore 0, poiché esiste un unico vettore date le ultime $n-r$ righe, e $0 \in Ker(A)$, se ci fosse un altro vettore avremmo una differenza nelle prime r righe ma non nelle ultime, e questo è assurdo. Quindi per ogni vettore $z \in Ker(A) = Ker(S)$ questo z può essere scritto come combinazione lineare dei vettori indipendenti che abbiamo trovato; quindi questi sono una base.

Vediamo ora di calcolare $rk(A) = dim\, \mathcal{C}_A = dim\, Imm(L_A) = n - dim\, Ker(L_A) = n - dim\, Ker(A) = n - (n-r) = r = rk(A)$.

Proposizione 4. *Continuando la notazione della riflessione precedente.*

a) $\{S_1, \ldots, S_r\}$ *sono una base di* $\mathcal{R}_S$*, spazio delle righe di* S.

b) $\{S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}\}$ *(le colonne contenenti pivot) sono base di* $\mathcal{C}_S$.

Dimostrazione. a) Chiaramente generano (le altre righe sono tutte nulle), inoltre sono indipendenti poiché se la loro combinazione lineare fosse nulla, la prima riga contribuisce da sola al risultato della prima colonna, quindi deve essere moltiplicata per zero (e diventa nulla), così via si scende una riga alla volta, dovendo moltiplicare per zero sempre la riga più in alto.

b) Sono chiaramente indipendenti, per lo stesso motivo del punto a): se la loro combinazione lineare fosse zero, la prima colonna partendo da destra contribuirebbe da sola alla riga r, deve quindi essere moltiplicata per zero, si passa poi alla seconda colonna e si tratta come la prima, visto che oramai il coefficiente della prima si è visto che deve essere zero.
Si deve dimostrare però che generano. Ma $dim\, \mathcal{C}_S = rk(S) = r$ e io ho r vettori linearmente indipendenti, quindi sono una base (Proposizione **??**).

Proposizione 5. *Continuando la notazione precedente:*

a) $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_S$

b) $rk(S) \overset{def.}{=} dim\, \mathcal{C}_S = dim\, \mathcal{C}_A \overset{def.}{=} rk(A)$

Dimostrazione. a) Questo è vero perché le operazioni elementari per riga non cambiano il sottospazio vettoriale: moltiplicare un vettore per uno scalare, cambiarlo di posto nella base o aggiungergli una combinazione lineare di altri vettori non cambia lo spazio vettoriale.

b) Precisiamo subito che $\mathcal{C}_A \neq \mathcal{C}_S$, sono spazi vettoriali isomorfi tra di loro ma diversi. Sono uguali perché i due sistemi che rappresentano sono equivalenti, quindi è equivalente lo spazio delle soluzioni ($Ker(A) = Ker(S)$) e con questo e n si può ricavare sia $dim\, \mathcal{C}_A$ che $dim\, \mathcal{C}_S$, grazie alla formula delle dimensioni: sono applicazioni lineari che partono dallo stesso spazio vettoriale e hanno lo stesso Ker, quindi la dimensione delle immagini è la stessa.

Esercitazione

Esercizio 1. Riprendiamo adesso l'esercizio **??**, avevamo due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2: W e U, la cui intersezione era uno spazio vettoriale di dimensione 1. La dimensione di $U+W$, per la formula di Grassmann è quindi 3; quindi $U+W=\mathbb{R}^3$. Cercavamo un'applicazione lineare con delle determinate caratteristiche:

- $f(U) \subseteq W$
- $f(W) \subseteq U$
- $f(v) = v$
- $dim\ Ker(f) = 1$

Il metodo risolutivo, finora è stato:

- Trovo $v_1 \mid Span(\{v_1\}) = U \cap W$.
- Trovo $v_2 \mid Span(\{v_1, v_2\}) = W$.
- Trovo $v_3 \mid Span(\{v_1, v_3\}) = U$.

Sappiamo quindi che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. A questo punto possiamo imporre le prime due condizioni dell'applicazione, pensando che $f(U \cap W) \subseteq U \cap W$. Quindi:

- $v_1 \longmapsto \lambda v_1$.
- $v_2 \longmapsto \alpha v_1 + \beta v_3$.
- $v_3 \longmapsto \gamma v_1 + \delta v_2$.

Inoltre sappiamo che in questo modo $f(U) = Span(\{f(v_1), f(v_3)\}) = Span(\{\lambda v_1, \gamma v_1 + \delta v_2\}) \subseteq W$, e possiamo dire la stessa cosa di $f(W)$, quindi le prime due condizioni abbiamo verificato che sono rispettate.
Dobbiamo ora imporre la dimensione del Ker e che $f(v) = v$; chiamiamo $Z = Ker\ f \oplus Span(\{v\})$. Chiaramente $dim\ Z = 2$ infatti $dim\ Ker = 1$ per ipotesi e $v \notin Ker$. Allora vale che:

- $dim\ Z \cap U = 1$, infatti $dim\ U = 2$, la dimensione dell'intersezione può quindi essere 1 o 2, non può essere 0 perché ci troviamo in uno spazio vettoriale di dimensione 3 e quindi avremmo due spazi vettoriali di dimensione 2 che si incontrano solo nello 0. Inoltre $Z \neq U \Rightarrow dim\ Z \cap U = 1$.
- Stesso ragionamento per $dim\ Z \cap W$.

Consideriamo ora che:

- $f(Z) = Span(\{v\})$.
- $f(Z \cap U) \subseteq W \cap Span(\{v\}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow Z \cap U \subseteq Ker\ f$, ma entrambe hanno dimensione $1 \Rightarrow Z \cap U = Ker\ f$.
- $f(Z \cap W) \subseteq U \cap Span(\{v\}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow Z \cap W \subseteq Ker\ f$, ma entrambe hanno dimensione $1 \Rightarrow Z \cap W = Ker\ f$.

Quindi $Ker\ f \subseteq U \cap W \wedge dim\ Ker\ f = dim\ U \cap W \Rightarrow Ker\ f = U \cap W$. Quindi $\lambda = 0$, cioè $v_1 \longmapsto 0_{\mathbb{R}^3}$.
Ricordiamoci che:

- $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vogliamo scrivere ora v come combinazione lineare degli altri 3 (cosa possibile, visto che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$). Vediamo che $v = -v_1 + v_2 + v_3 \Rightarrow f(v) = -f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = f(v_2) + f(v_3)$. Quindi avremo:

$$f(v) = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma \\ \alpha + \gamma + \delta \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \delta = 1 \\ \alpha + \gamma = -1 \end{cases}$$

Quindi imponiamo $\alpha = 1$ e vediamo se viene fuori qualcosa di giusto:

- $v_1 \longmapsto \lambda 0_{\mathbb{R}^3}$.
- $v_2 \longmapsto v_1 + v_3$.
- $v_3 \longmapsto -2v_1 + v_2$.

L'unica vera incognita a questo punto è la dimensione del nucleo.

Esercizio 2. Dimostriamo ora un piccolo teorema.
Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$, T il triangolo che ha come vertici questi tre punti, B il baricentro del triangolo $= \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$. La nostra tesi è che $B \in$ tutte le mendiane di T.

Dimostrazione. Chiamiamo M_1 il punto medio del segmento P_2, P_3. Cerchiamo adesso di individuare la retta r che passa per M_1, P_1; la giacitura di M_1P_1 è generata dal vettore $M - P_1$ e quindi $r = P_1 + Span(\{M - P_1\})$. La domanda che ci facciamo è: $B \in P_1 + Span(\{M - P_1\})$? Che equivale a chiedersi se $\exists t \in \mathbb{R} \mid B = P_1 + t(M_1 - P_1)$; con $t = 0$ abbiamo P_1, con $t = 1$ abbiamo M_1.
Se $t = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 + \frac{2}{3}(\frac{P_2+P_3}{2} - P_1) = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3) = B$.
Stesso ragionamento per tutti gli altri vertici.

Esercizio 3. Siano r, s due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che $\exists! H$ piano tale che $s \subset H \wedge H$ parallelo a r (cioè, detta H' la giacitura di H, $r \subset H'$).

Dimostrazione. Abbiamo che $s \subset H \Rightarrow s \subset H'$, inoltre $r \subset H'$ sempre per ipotesi; visto che le due rette sono sghembe le loro giaciture si intersecano solo nello $0_{\mathbb{R}^3}$, abbiamo quindi che $r \oplus s \subseteq H'$, ma i due sottospazi vettoriali hanno la stessa dimensione quindi vale l'uguaglianza. Abbiamo quindi che la giacitura di H è completamente determinata dalle rette scelte. Inoltre sappiamo che $\forall h \in H, H = \mathfrak{T}_h(H') = H$; quindi H è unico; possiamo prendere infatti un qualsiasi punto di s e utilizzarlo per la traslazione.

Lezione 14

Teoria

Corollario 4. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^p$; il sistema lineare $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow rk(A) = rk\,(\, A \vdots B\,)$.*

Dimostrazione. Sia $(\, S \vdots T\,)$ una ridotta a scalini di $(\, A \vdots B\,)$; Sappiamo che $AX = B$ risolubile $\Leftrightarrow SX = T$ risolubile $\Leftrightarrow rk(S) = rk\,(\, S \vdots T\,)$; ma $rk(A) = rk(S)$ e $rk\,(\, A \vdots B\,) = rk\,(\, S \vdots T\,)$.

Corollario 5. *Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$. Allora:*

- *$dim\ \mathcal{R}_A = dim\ \mathcal{C}_A$*
- *$rk({}^{\tau}A) = rk(A)$*
- *Sia S una ridotta a scalini di A con r pivot. Allora: $dim\ \mathcal{R}_A = dim\ \mathcal{R}_S = r = dim\ \mathcal{C}_S = dim\ \mathcal{C}_A$*
- *$rk({}^{\tau}A) = dim\ \mathcal{C}_{{}^{\tau}A} = dim\ \mathcal{R}_A = dim\ \mathcal{C}_A = rk(A)$.*

Algoritmo 1. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$ e S una ridotta a scalini di A. Sappiamo che, in generale, $\mathcal{C}_A \neq \mathcal{C}_S$; allora come facciamo a trovare una base di $\mathcal{C}_A$?*
Sia r il numero di pivot di S, chiamiamo $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$ le colonne di S contenenti pivot; allora $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ è una base di $\mathcal{C}_A$. Quindi per trovare una base di $\mathcal{C}_A$ si può scalinare la matrice, vedere le colonne contenenti i pivot e cercare le colonne di A che hanno la stessa posizione delle colonne di S contenenti pivot.

Dimostrazione. Dimostriamo la correttezza dell'algoritmo in due modi differenti:

1) Le stesse operazioni per riga fatte per trasformare A in S trasformano $\widetilde{A} = \left(A^{j_1} \middle| \dots \middle| A^{j_r} \right)$ in $\widetilde{S} = \left(S^{j_1} \middle| \dots \middle| S^{j_r} \right)$; ma $rk(\widetilde{S}) = r$ e quindi anche $rk(\widetilde{A}) = r$, ma questo vuol dire che le r colonne di $\widetilde{A}$ generano uno spazio vettoriale di dimensione r; questo vuol dire che sono linearmente indipendenti (e sono quindi una base).

2) Se S è la matrice a scalini ottenuta da A attraverso operazioni elementari per riga abbiamo detto (Osservazione **??**) che il processo che ha portato A ad S è stato: $A \to M_1 \cdot A \to M_2 \cdot M_1 \cdot A \to M_s \cdot \ldots \cdot M_1 A = S$; ma $\forall i_1^s$, M_i è invertibile, quindi, moltiplicando tra di loro le varie M_i, abbiamo $\widetilde{M}A = S$, con $\widetilde{M}$ invertibile. Ma le matrici invertibili sono quelle che inducono un isomorfismo, e gli isomorfismi mandano vettori indipendenti in vettori indipendenti, sappiamo inoltre che $\forall i_1^n$, $S^i = \widetilde{M} \cdot A^i$, quindi $\widetilde{M}$ trasforma $A^1, \ldots, A^n$ in $S^1, \ldots, S^n$; consideriamo adesso $\widetilde{M}^{-1}$ (anch'esso isomorfismo), esso manderà vettori linearmente indipendenti $(S^{j_1}, \ldots, S^{j_r})$ in vettori linearmente indipendenti: $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$.

Riflessione 3. Questo algoritmo ci fornisce alcuni strumenti utili. Sia $\mathbb{K}$ campo, allora:

- Siano $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$. Vogliamo trovare una base di $Span(\{v_1, \ldots, v_k\})$.
  Abbiamo appena trovato un algoritmo possibile: considero $A = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \ldots & v_k \end{array}\right)$;
  $Span(\{v_1, \ldots, v_k\}) \overset{def.}{=} \mathcal{C}_A$; quindi trovo S una ridotta a scalini di A con r pivot nelle colonne $S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}$; so a questo punto che $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\}$ è una base di $Span(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

- Siano $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ vettori linearmente indipendenti; per il completamento a base di questi vettori prendo $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} v_1 & \ldots & v_k & e_1 & \ldots & e_n \end{array}\right)$;
  visto il funzionamento dell'algoritmo di Gauss di sicuro i primi k pivot saranno nelle prime k colonne, poi prendo i vettori degli altri pivot per il completamento a base.

- Per applicare i risultati precedenti non è necessari essere in $\mathbb{K}^n$: in qualsiasi $\mathbb{K}$ spazio vettoriale V di dimensione n ci troviamo, se abbiamo una base B, abbiamo anche automaticamente un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$; visto che gli isomorfismi mandano vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti posso vedere quali vettori sono indipendenti in $\mathbb{K}^n$ e poi prendere i corrispettvi vettori di V. Quindi tramite gli strumenti appena visti e l'isomorfismo di passaggio a coordinate possiamo facilmente trovare una base di un sottospazio vettoriale, dati dei generatori, e completare a base un qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti. Tutto questo in teoria non è complesso, poi chiaramente possono esserci conti molto difficili e lunghi.

  Se quindi abbiamo $v_1, \ldots, v_k \in V$ e vogliamo trovare una base di $Span(\{v_1, \ldots, v_k\})$, possiamo costruirci la matrice $A = \left(\begin{array}{c:c:c} [v_1]_B & \ldots & [v_k]_B \end{array}\right)$, e scalinarla; se $\{A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}\}$ sono una base di $\mathcal{C}_A$ allora $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}$ sono una base di $Span(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

  Stessa cosa per completare a base un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Osservazione 3. Sia $\mathbb{K}$ campo; $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Come si capisce se una matrice è invertibile?
Sappiamo che A invertibile $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^n$ è isomorfismo $\Leftrightarrow L_A$ è iniettiva o surgettiva; ma $rk(A) = dim\ \mathcal{C}_A = dim\ Imm\ L_A \Rightarrow L_A$ è surgettiva $\Leftrightarrow rk(A) = n$. A quindi è invertibile $\Leftrightarrow$ ha n pivot.

Osservazione 4. Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Facciamo ora una considerazione generale: se S è una ridotta a scalini di A, so che $\exists M \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ tale che $MA = S$; ma come troviamo questa M?
Riduco $\left(A \vdots I_p \right)$ a scalini, otterrò $(S \vdots B)$, convinciamoci del fatto che $M = B$.
Infatti se faccio la moltiplicazione a blocchi ottengo: $(S \vdots B) = M (A \vdots I) = \left(MA \vdots MI_p \right) = (S \vdots M)$. Quindi $M = B$.

Algoritmo 2. *L'ultima osservazione ci permette di trovare un algoritmo per calcolare l'inversa di una matrice invertibile.*
Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Riduco $\left(A \vdots I_n \right)$ a scalini fino ad ottenere $(S \vdots *)$ con S a scalini con r pivot.

- *Se $r < n$ la matrice A non è invertibile.*
- *Se $r = n$ proseguo con la riduzione a scalini al contrario: rendo S una matrice diagonale (e poi l'identità) con altre operasioni elementari per riga, fino ad ottenere $\left(I_n \vdots B \right)$.*

Per quanto detto sopra $BA = I_n \Rightarrow B$ è l'inversa sinistra di A (per la Proposizione **??** *è quindi anche l'inversa destra, quindi l'inversa).*

Esercitazione

Esercizio 4. Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = p(-x)\}$; consideriamo inoltre l'applicazione $V \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^n$ con la legge: $f_n(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ \vdots \\ p(n-1) \end{pmatrix}$
dimostrare che:

a) V è sottospazio vettoriale.

b) f_n è lineare.

c) $p(x) \in V \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid\ p(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$.

d) Per quali n, f_n è iniettiva, surgettiva, isomorfismo?

Dimostrazione. a) - $0_{\mathbb{R}_4[x]} \in V$.
- $\forall p(x), q(x) \in V, p+q(x) = p(x)+q(x) = p(-x)+q(-x) = p+q(-x)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in \mathbb{R}_4[x],\ \alpha p(x) = \alpha p(-x)$

b) - $\forall p(x), q(x) \in V, f_n(p(x) + q(x)) = \begin{pmatrix} p(0)+q(0) \\ \vdots \\ p(n-1)+q(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ \vdots \\ p(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(0) \\ \vdots \\ q(n-1) \end{pmatrix} = f_n p(x) + f_n q(x)$.

- $\forall p(x) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha f_n(p(x)) = \alpha \begin{pmatrix} p(0) \\ \vdots \\ p(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p(0) \\ \vdots \\ \alpha p(n-1) \end{pmatrix} =$
  $p_n(\alpha p(x))$

c) Pensiamo che $x, x^3 \in \mathbb{R}_4[x]$ non appartengono a V e sono vettori linearmente indipendenti. Questo vuol dire che $dim\ V \leq 3$, se infatti la dimensione di V fosse 4 avremmo 6 vettori linearmente indipendenti (una base di V, x, x^3) in uno spazio vettoriale di dimensione 5. Notiamo inoltre che $1, x^2, x^4$ sono linearmente indipendenti e appartengono a V, sono quindi 3 vettori indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione ≤ 3, quindi sono una base.
Questo dimostra '$\Rightarrow$'; '$\Leftarrow$' è ovvio.

d) Esaminiamo quando l'applicazione è surgettiva e quando iniettiva:

- Sappiamo che vale: $dim\ Imm\ f_n = dim\ V - dim\ Ker\ f_n$. Quindi $\forall n \in \mathbb{N}, dim\ Imm\ f_n \leq 3$; abbiamo raggiunto quindi un primo punto: $n \geq 3 \Rightarrow f_n$ non è surgettiva.
- Cerchiamo adesso $Ker\ f_n = \{p(x) \in V \mid p(0) = \cdots = p(n-1) = 0\}$ ma $p(x) \in V \Rightarrow Ker\ f_n = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(1) = p(-1) = \cdots = p(n-1) = p(1-n) = 0\}$. Il polinomio deve quindi avere $2n-1$ radici, ma i polinomi in V hanno al massimo grado 4; quindi $2n - 1 > 4 \Leftrightarrow n \geq 3 \Rightarrow Ker\ f_n = \{0_{\mathbb{K}_4[x]}\}$.
  Ma potrebbe anche darsi che l'applicazione sia iniettiva per $n = 1$ o $n = 2$, verifichiamo che non è così:

'$n = 1$' $Ker\ f_1 = \{p(x) \in V \mid p(0) = 0\}$; $x^2 \in V \wedge x^2 \in Ker\ f_1 \Rightarrow f_1$ non è iniettiva: manda a 0 un vettore non nullo.

'$n = 2$' $Ker\ f_2 = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(1) = p(-1) = 0\}$. $x^2(x^2 - 1) \in Ker\ f_2 \Rightarrow f_2$ non è iniettiva.

Quindi f_n iniettiva $\Leftrightarrow n \geq 3$

Uniamo ora le due cose: per $n = 3$ abbiamo che $dim\ Ker\ f_3 = 0 \Rightarrow dim\ Imm\ f_3 = dimV - dimKer\ f_3 = 3 - 0 = 3$. Quindi f_3 è isomorfismo.
Si può anche verificare che f_n è surgettiva $\Leftrightarrow n \leq 3$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^5 \supseteq V = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$
e, fissata $B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, sia $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{f_B} \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ con la legge $f_B(A) = A \cdot B$.

a) Dimostrare che f_B è lineare.

b) Trovare una base di V.

c) Determinare se $\exists B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \mid Imm\ f_B \simeq V$.

Dimostrazione. a) Questo punto è stato dimostrato nella Proposizione **??**.

b) Scaliniamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A \xrightarrow[A_5=A_5+2A_1]{\substack{A_2=A_2-A_1\\ A_3=A_3-2A_1\\ A_4=A_4+A_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{A_3=A_3-A_2\\ A_4=A_4+A_2\\ A_5=A_5+2A_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ ok & ok & no & ok & no \end{pmatrix}$$

Quindi tra i vettori generatori di V ce ne sono 3 indipendenti: il primo, il secondo e il quarto; una base di V è quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\-1\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\3\\-1\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\2\\5\\-3\\-3 \end{pmatrix} \right\}$

- Per il colorllario 3 ci basta vedere quando $dim\ Imm\ f_B = 3$. Per farlo prendo una base di $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$: $T = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$; sappiamo che $Imm\ f_B = Span\,(\{f_B(v_1), f_B(v_2), f_B(v_3), f_B(v_4)\})$. Prendiamo per B una generica matrice: $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ e vediamo cosa succede.

  - $f_B(v_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
  - $f_B(v_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} \gamma & \delta\\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
  - $f_B(v_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)$
  - $f_B(v_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$

  Vediamo ora quando desti 4 vettori sono linearmente indipendenti; consideriamo l'isomorfismo $\mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^4$ con la legge: $\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} x & y\\ z & t \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}$; la dimensione di $Imm\ f_B$ è quindi uguale a:

$$rk\left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0\\ \beta & \delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \gamma\\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}\right) = rk\left(\left(\begin{array}{c|c} {}^\tau B & 0\\ \hline 0 & {}^\tau B \end{array}\right)\right) = 2rk(B)$$

  Quindi la dimensione di $Imm\ f_B$ può essere $0, 2, 4$, quindi $\forall B \in \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, $dim\ Imm\ f_B \neq dim\ V$

Esercizio 6. Sia $\mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \ni A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dire se A è invertibile, se si trovare l'inversa.

Dimostrazione.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_2=A_2-2A_1\\ A_3=A_3-A_1\\ A_3=A_3-A_2\\ A_2=A_2+A_3\\ A_2=\frac{1}{2}A_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_1=A_1-A_3\\ A_1=A_1+A_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

Osservazione 5. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $P, Q \in V$ con $P \neq Q$. Allora:

- La retta affine passante per P e Q è $P + Span(\{Q - P\})$, è cioè il sottospazio affine $r = \{R \in V \mid \exists t \in \mathbb{K} : R = P + t(Q - P)\}$;

- Il segmento congiungente P e Q è: $PQ = \{R \in V \mid \exists t \in \mathbb{K} : R = P + t(Q - P)\}$ con $0 \leq t \leq 1$.

- La semiretta uscente da P: $\{R \in V \mid \exists t \in \mathbb{K} : R = P + t(Q - P)\}$ con $t \leq 0$.

- La semiretta uscente da Q: $\{R \in V \mid \exists t \in \mathbb{K} : R = P + t(Q - P)\}$ con $t \geq 1$.

Se invece consideriamo anche un altro punto T non allineato con P e Q abbiamo un unico piano π passante per questi tre punti; $\pi = P + Span(\{T - P, Q - P\})$

Riflessione 4. Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ descritte rispettivamente come soluzioni del sistema $AX = a, BX = b$ con $A, B \in \mathcal{M}(2, 3, \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}^2$, chiamiamo inoltre S la giacitura di s e R la giacitura di r. Sappiamo che $LX = t$ risolubile $\Leftrightarrow$ $rk(L) = rk\left(S \middle| t \right)$; sappiamo inoltre che $dim\ Ker(L) = dim\ \mathbb{R}^3 - rk(L)$; voglio che le soluzioni abbiamo dimensione 1, quindi voglio che il rango di A, B sia 2 (quindi che le matrici abbiano 2 pivot). Sappiamo che R ha equazioni cartesiane $AX = 0$, S ha equazioni $BX = 0$; quindi $R \cap S$ avrà equazioni $\left(\frac{A}{B}\right) X = 0$. Visto che abbiamo imposto che A e B abbiano entrambe 2 pivot abbiamo che: $2 \leq rk\left(\left(\frac{A}{B}\right)\right) \leq 3$.

- $rk\left(\left(\frac{A}{B}\right)\right) = 2 \Rightarrow dim\ Ker = dim\ \mathbb{R}^3 - rk = 3 - 2 = 1$.

- $rk\left(\left(\frac{A}{B}\right)\right) = 3 \Rightarrow dim\ Ker = dim\ \mathbb{R}^3 - rk = 3 - 3 = 0$.

Notiamo, prima di fare uno schema generale, che $r \cap s$ ha equazioni cartesiane $\left(\frac{A}{B}\right) X = \left(\frac{a}{b}\right)$.

- $rk\left(\left(\frac{A}{B}\right)\right) = 2 \Rightarrow dim\ S \cap R = 1$.

  1) $rk\left(\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline B & b \end{array}\right)\right) = 3 \Rightarrow s \cap r = \varnothing$. L'equazione dell'intersezione delle rette non ha soluzione, quindi le due rette sono parallele.

2) $rk\left(\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline B & b \end{array}\right)\right) = 2 \Rightarrow r \cap s = r = s$. Le soluzioni hanno dimensione 1, quindi le rette sono coincidenti.

- $rk\left(\left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right)\right) = 2 \Rightarrow dim\ S \cap R = 0$.

3) $rk\left(\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline B & b \end{array}\right)\right) = 3 \Rightarrow s \cap r = P$, ci sono soluzioni dell'equazione dell'intersezione, le due rette sono quindi incidenti.

4) $rk\left(\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline B & b \end{array}\right)\right) = 4 \Rightarrow s \cap r = \varnothing$. L'equazione delle intersezioni non ha soluzioni; le due rette sono sghembe.

Lezione 15

Teoria

Riflessione 5. Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n e m. A questo punto abbiamo diversi strumenti per lavorare sulle applicazioni tra $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$: sappiamo interpretare le matrici come applicazioni lineari, conosciamo il significato di rango e l'importanza dei pivot, sappiamo trovare lo spazio delle immagini e il Ker e altre cose. Vorremmo quindi saper fare queste cose anche su generici spazi vettoriali V e W.

Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, $T = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Vediamo il rapporto di questa applicazione con la matrice:

$$\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \ni A = \mathfrak{M}_{S,T}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} [f(v_1)]_T & \dots & [f(v_n)]_T \end{array} \right)$$

Vediamo intanto come costruirla: prendiamo il primo vettore della base di V : v_1, calcoliamo la sua immagine ($f(v_1) \in W$) e poi calcoliamo le coordinate del vettore $f(v_1)$ rispetto alla base T. Questa matrice viene chiamata matrice associata a f rispetto alle basi S e T.
Quindi $A^i = [f(v_i)]_T$, e possiamo scrivere $f(v_i) = A^i_1 w_1 + \dots + A^i_m w_m$.
Consideriamo ora $V \ni v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ un generico vettore di V, poiché f è lineare avremo: $f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = x_1(A^1_1 w_1 + \dots + A^1_m w_m) + \dots + x_n(A^n_1 w_1 + \dots + A^n_m w_m) = (x_1 A^1_1 + \dots + x_n A^n_1) w_1 + \dots + (x_1 A^1_m + \dots + x_n A^n_m) w_m$.
Quindi

$$[f(v)]_T = \begin{pmatrix} x_1 A^1_1 + \dots + x_n A^n_1 \\ \vdots \\ x_1 A^1_m + \dots + x_n A^n_m \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{S,T}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dove $x_1, \dots, x_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base S.

Le matrici associate sono molto utili: se dovessimo maneggiare delle applicazioni lineari particolarmente complesse e non utilizzassimo una matrice associata saremmo costretti a fare lunghi calcoli per ogni vettore; con la matrice associata invece per trovare l'immagine di un vettore ci è sufficiente moltiplicare le sue coordinate per una matrice, cosa relativamente semplice (sicuramente più veloce del ricavarsi volta per volta il vettore immagine).

Teorema 2. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $T = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Allora l'applicazione $Hom(V, W) \xrightarrow{\mathfrak{M}_{S,T}} \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, che associa $f \in Hom(V, W)$ a $\mathfrak{M}_{S,T}(f)$, è un isomorfismo.*

Dimostrazione. - Dimostriamo innanzitutto che l'applicazione è lineare.

- Dobbiamo verificare che $\forall f, g \in Hom(V, W)$, $\mathfrak{M}_{S,T}(f+g) = \mathfrak{M}_{S,T}(f) + \mathfrak{M}_{S,T}(g)$. Ma $\forall i_1^n$, $\mathfrak{M}_{S,T}(f+g)^i = [f + g(v_i)]_T = [f(v_i) + g(v_i)]_T = [f(v_i)]_T + [g(v_i)]_T = \mathfrak{M}_{S,T}(f)^i + \mathfrak{M}_{S,T}(g)^i$
- Dobbiamo verificare che, $\forall f, \in Hom(V, W), \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathfrak{M}_{S,T}(\lambda f) = \lambda \mathfrak{M}_{S,T}(f)$. Ma sappiamo che: $\forall i_1^n$, $\mathfrak{M}_{S,T}(\lambda f)^i = [\lambda f(v_i)]_T = \lambda [f(v_i)]_T = \lambda \mathfrak{M}_{S,T}(f)^i$

- Iniettività: sia $f \in Ker\ \mathfrak{M}_{S,T} \Rightarrow [f(v_1)]_T = \dots = [f(v_n)]_T = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow f(v_1) = \dots = f(v_n) = 0_W$; ma $\exists ! V \xrightarrow{0_{Hom(V,W)}} W$ che manda i vettori di una base tutti a zero (Teorema **??**): l'applicazione nulla; quindi $f = 0_{Hom(V,W)}$.

- Surgettività: $\forall A \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \exists f \in Hom(V, W) \mid \mathfrak{M}_{S,T}(f) = A$.
Vogliamo creare una applicazione lineare f che abbia come matrice associata A; allora deve essere: $f(v_i) = A_1^i w_1 + \dots + A_m^i w_m$; sappiamo (per il teorema già citato) che, comunque scegliamo n vettori in W, esiste un'unica applicazione lineare che manda i vettori di S nei vettori scelti; in particolare noi scegliamo di mandare v_i nel vettore di W che ha coordinate $A_1^i, \dots, A_m^i$ rispetto alla base T. Per come costruiremo poi $\mathfrak{M}_{S,T}(f)$ sappiamo che questa sarà uguale ad A.

Corollario 6. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n e m. Allora $\dim Hom(V, W) = n \cdot m$.*

Proposizione 6. *Sia $\mathbb{K}$ campo, U, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di base rispettivamente S, T, R e $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ applicazioni lineari indotte dalle matrici associate: $\mathfrak{M}_{S,T}(f) = A, \mathfrak{M}_{T,R}(g) = B$. Allora $\mathfrak{M}_{S,R}(g \circ f) = B \cdot A$.*

Dimostrazione. Devo dimostrare che $\forall u \in U, [g \circ f(u)]_R = B \cdot A \cdot [u]_S$.
$[g \circ f(u)]_R = [g(f(u))]_R = B \cdot [f(u)]_T = B \cdot A \cdot [u]_S$

Riflessione 6. Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n, m e base S, T e sia $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare indotta dalla matrice associata: $\mathfrak{M}_{S,T}(f) = A$. Possiamo quindi dire che è commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle [\ ]_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\ ]_T} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Infatti per calcolare $[f(v)]_T$ di un generico vettore possiamo sia calcolare $[v]_S$ e poi far agire L_A, sia calcolare $f(v)$ e poi calcolarne le coordinate rispetto alla base T.

Possiamo anche espandere il diagramma (per rappresentare la situazione dell'ultima proposizione, con $dim\ U = p,\ dim\ V = n,\ dim\ W = m$) che comunque rimane commutativo.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_S}"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "{[\ ]_T}"] & W \arrow[d, "{[\ ]_R}"] \\
\mathbb{K}^p \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_B"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Proposizione 7. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con basi rispettivamente S, T e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Allora, detta $A = \mathfrak{M}_{S,T}(f)$, abbiamo che $rk(f) = rk(A)$.*

Dimostrazione. Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, allora $Imm\ f = Span\left(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}\right)$. Questi vettori, tramite l'isomorfismo $[\ ]_T$ vanno a finire nelle colonne della matrice A, cioè $[f(v_i)]_T = A^i$. Ma gli isomorfismi mandano vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti, quindi $[Imm\ f]_T = \mathcal{C}_A = Imm\ A$; quindi vale in particolare: $rk(A) = dim\ Imm\ A = dim\ Imm\ f = rk(f)$.

Corollario 7. *Nella situazione della proposizione precedente sia $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ una base di $Imm\ A$, allora $\{f(v_{j_1}), \dots, f(v_{j_r})\}$ è una base di $Imm\ f$.*

Corollario 8. *Siano V, W degli spazi vettoriali di dimensione uguale, S, T delle loro basi e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. f è isomorfismo $\Leftrightarrow A = \mathfrak{M}_{S,T}(f)$ è invertibile.*

Dimostrazione. f è isomorfismo $\Leftrightarrow rk(f) = n \Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow A$ è invertibile.
Il primo se e solo se è dovuto al fatto che, per la formula delle dimensioni, ci basta sapere che l'applicazione è surgettiva: visto che siamo tra spazi vettoriali della stessa dimensione.
La seconda implicazione è quello che abbiamo dimostrato nell'ultima proposizione mentre l'ultima implicazione significa solamente che un'applicazione ha un'inversa solo quando è un isomorfismo.

Riflessione 7. Sia V spazio vettoriale, sappiamo che, fissata una base S, ogni vettore v è in relazione biunivoca con le suo coordinate; se io considero le coordinate dello stesso vettore v, ma rispetto a una base diversa queste saranno di certo cambiate. Ci potremmo quindi chiedere: come sono legate $[v]_S$ e $[v]_S$?
Proviamo a prendere $N = \mathfrak{M}_{S,T}(id_V)$, questa matrice dovrebbe, date le coordinate rispetto a S di un vettore v, restituire (attraverso il prodotto) le coordinate di $id_V(v)$ (quindi le coordinate di v) rispetto alla base T.
Avremo quindi che $N\,[v]_S = [v]_T$.
Chiamiamo N la matrice del cambiamento di base.

Se inoltre prendiamo $M = \mathfrak{M}_{T,S}(id_V)$, ci accorgiamo subito che $M \cdot N = N \cdot M = I$, quindi N e M sono invertibili (inducono infatti un isomorfismo) e sono l'una l'inversa dell'altra: $\mathfrak{M}_{S,T}(id_V)^{-1} = \mathfrak{M}_{T,S}(id_V)$

Osservazione 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ invertibile; possiamo dire che A induce un cambiamento di base? Questo domanda ci viene perché sappiamo associare a un cambiamento di base una matrice

invertibile, quindi vogliamo vedere se la cosa può essere vista da entrambe le direzioni.
Notiamo intanto delle piccole osservazioni preliminari:

- Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V avremo che, $\forall i_1^n$, $[v_i]_B = e_i$; quindi $[\ ]_B$ trasforma B nella base canonica.

- Se $V \xrightarrow{g} \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo, esiste una base B tale che $g = [\ ]_B$? La risposta è si. Sappiamo infatti che, se la base fosse $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ dovremmo avere, $\forall i_1^n$, $[v_i]_B = e_i$, quindi dobbiamo scegliere come base l'insieme dei vettori che sono mandati nei vari e_i.
  Quindi $B = \left\{g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n)\right\}$ è una base che soddisfa le richieste, ma vediamo anche che è l'unica, visto che abbiamo determinato univocamente tutti i suoi vettori.

Possiamo passare ora alle proposizioni che rispondono alla nostra domanda.

Proposizione 8. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, B una base di V e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ invertibile. Allora:*

a) $\exists! S$ *base di* $V \mid A = \mathfrak{M}_{S,B}(id_V)$.

b) $\exists! T$ *base di* $V \mid A = \mathfrak{M}_{B,T}(id_V)$.

Dimostrazione. b) $A = \mathfrak{M}_{B,T}(id_V)$ significa che A è la matrice associata all'applicazione identità tra lo spazio V considerato con la base S e lo spazio V considerato con la base B; noi in pratica dobbiamo trovare l'isomofismo g che renda il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id_V} & V \\ g \big\downarrow ? & & \big\downarrow [\ ]_B \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Ma in realtà possiamo dedurre g dalle altre applicazioni: sarà infatti $g = L_A^{-1} \circ [\ ]_B$ e $g^{-1} = L_A \circ [\ ]_B^{-1}$: infatti vogliamo che il diagramma sia commutativo, quindi possiamo ricavare una freccia dalle altre tre. Ora abbiamo quindi un'isomorfismo (è composizione di isomorfismi), possiamo, per l'ultima osservazione, dire che esso può essere interpretato come un cambiamento di base: $\exists! S$ base di $V \mid [\ ]_S = g$; e a noi interessa proprio interpretare g come un cambiamento di base.
Sappiamo inoltre che i passaggi a coordinate mandano tutti i vettori della base in $e_1, \dots, e_n$, quindi avremo $S = \left\{g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n)\right\} = \left\{[L_A(e_1)]_B^{-1}, \dots, [L_A(e_n)]_B^{-1}\right\}$.

a) Come abbiamo fatto con la prima parte della proposizione, dobbiamo trovare l'isomorfismo f che rende commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id_V} & V \\ [\ ]_B \big\downarrow & & g \big\downarrow ? \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Possiamo dire $g = L_A \circ [\ ]_B$ e $g^{-1} = [\ ]_B^{-1} \circ L_A^{-1}$, poiché altrimenti il diagramma non sarebbe commutativo, cerchiamo ora T base di $V \mid [\ ]_T = g$, come prima utilizziamo il fatto che il passaggio a coordinate manda in e_i l'i-esimo vettore della base. Avremo quindi $T = \{g^{-1}(e_1), \ldots, g^{-1}(e_n)\} = \left\{ \left[L_A^{-1}(e_1)\right]_B^{-1}, \ldots, \left[L_A^{-1}(e_n)\right]_B^{-1} \right\}$.

Osservazione 7. Siano V, W degli spazi vettoriali, S, S' basi di V, T, T' basi di W e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Consideriamo ora $A = \mathfrak{M}_{S,T}(f)$, $A' = \mathfrak{M}_{S',T'}(f)$. Che legame c'è tra A e A'?
Consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V_S \arrow[r, "f", "A"'] & W_T \arrow[d, "M"', "id_W"] \\ V_{S'} \arrow[u, "id_V", "N"'] \arrow[r, "A'", "f"'] & W_{T'} \end{tikzcd}$$

Visto che il diagramma è commutativo abbiamo: $A' = M \cdot A \cdot N$. Il che significa: $\mathfrak{M}_{S',T'}(f) = \mathfrak{M}_{T,T'}(id_W) \circ \mathfrak{M}_{S,T}(f) \circ \mathfrak{M}_{S',S}(id_V)$.

Definizione 2 (SD-equivalenza)**.** Siano V, W spazi vettoriali e $f, g \in Hom(V, W)$. Si dice allora che f e g sono SD-equivalenti (e si scrive $f \underset{SD}{\equiv} g$) se $\exists h \in GL(W), \exists k \in GL(V) \mid g = h \circ f \circ\ k$.

Osservazione 8. - $\underset{SD}{\equiv}$ è chiaramente una relazione di equivalenza

- $f \underset{SD}{\equiv} g \Rightarrow rk(f) = rk(g)$ (il rango è un'invariante di SD-equivalenza); infatti gli isomorfismi mandano vettori indipendenti in vettori indipendenti.
- Si usa il termine SD-equivalenza anche con le matrici. Sia $\mathbb{K}$ campo e $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$; allora $A \underset{SD}{\equiv} B \Leftrightarrow \exists M \in GL(p), \exists N \in GL(n) \mid B = MAN$.
- Sia B una base di V, S una base di W, $f, g \in Hom(V, W)$ e $A = \mathfrak{M}_{B,S}(f)$, $B = \mathfrak{M}_{B,S}(g)$. Allora
$$f \underset{SD}{\equiv} g \Leftrightarrow A \underset{SD}{\equiv} B$$
Gli isomorfismi h, k possono infatti essere scritti come matrici invertibili e vivecersa.
- Se abbiamo $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e $B = MAN$ con M, N invertibili allora possiamo scrivere:
  - $A = \mathfrak{M}_{C,C}(L_A)$, con C base canonica.
  - $N = \mathfrak{M}_{S,C}(id_{\mathbb{K}^n})$.
  - $M = \mathfrak{M}_{C,T}(id_{\mathbb{K}^p})$.

  E quindi avremo: $B = \mathfrak{M}_{S,T}(L_A)$. Quindi due matrici sono SD-equivalenti se e solo se rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse.

Proposizione 9. *Siano V, W spazi vettoriali e $f, g \in Hom(V, W)$, allora $f \underset{SD}{\equiv} g \Leftrightarrow \exists B, B'$ basi di $V, \exists S, S'$ basi di $W \mid \mathfrak{M}_{B',S'}(f) = \mathfrak{M}_{B,S}(g)$*

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' Vedi osservazione precedente.

'$\Rightarrow$' Sia B una base di V e S una base di W. Per ipotesi $\exists h \in GL(W), \exists k \in GL(V) \mid g = h \circ f \circ k$. Consideriamo quindi il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{k} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{h} & W \\ \big\downarrow [\ ]_B & & \big\downarrow [\ ]_B & & \big\downarrow [\ ]_S & & \big\downarrow [\ ]_S \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[N]{} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{K}^p & \xrightarrow[M]{} & \mathbb{K}^p \end{array}$$

In questo diagramma abbiamo che N e M sono invertibili, perché associate, tramite cambiamento di base, ad isomorfismi. Inoltre la matrice associata a $\mathfrak{M}_{B,S}(g)$ è proprio MAN. A questo punto basta interpretare M, N come matrici di cambiamento di base:

- $\exists! B'$ base di $V \mid \mathfrak{M}_{B',B}(id_V) = N$.
- $\exists! S'$ base di $W \mid \mathfrak{M}_{S,S'}(id_W) = M$.

Abbiamo allora che: $\mathfrak{M}_{B',S'}(f) = \mathfrak{M}_{S,S'}(id_W) \circ \mathfrak{M}_{B,S}(f) \circ \mathfrak{M}_{B,B'}(id_V) = MAN = \mathfrak{M}_{B,S}(g)$.

Esercitazione

Riflessione 8. Siano V, W spazi vettoriali, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare.
Consideriamo $A = \mathfrak{M}_{B,C}(f)$, questa matrice è utile poiché, $\forall v \in V,\ [f(v)]_C = A \cdot [v]_B$. Per capire meglio cosa significa disegnamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V_S & \xrightarrow{f} & W_T \\ [\ ]_B \big\downarrow & & \big\downarrow [\ ]_C \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[L_A]{} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Poiché gli isomorfismi mandano vettori indipendenti in vettori indipendenti e hanno il Ker banale abbiamo che:

- $Ker\ L_A = [Ker\ f]_B$.
- $Imm\ L_A = [Imm\ f]_C$.

Abbiamo quindi anche $rk(f) = rk(L_A) = rk(A)$.

Esempio 1. Sia $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione lineare con la legge: $f\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right)\right) = [\alpha_{11} + \alpha_{22} - (\alpha_{12} + \alpha_{21})]\, x^2 + [\alpha_{11} + \alpha_{12} - (\alpha_{21} + \alpha_{22})]\, x + \alpha_{11} + \alpha_{21} - (\alpha_{12} + \alpha_{22})$. Sia $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ e $C = \{1, x, x^2\}$. Troviamo $A = \mathfrak{M}_{B,C}(f)$; sappiamo che $A^i = [f(v_i)]_C$.

- $[f((\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}))]_C = [x^2+x+1]_C = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}))]_C = [-x^2+x-1]_C = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}))]_C = [-x^2-x+1]_C = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}))]_C = [x^2-x-1]_C = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Quindi $A = \left(\begin{smallmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{smallmatrix}\right)$; scalinando A si ottiene: $\left(\begin{smallmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{smallmatrix}\right) \xrightarrow[A_3=A_3-A_1]{A_2=A_2-A_1} \left(\begin{smallmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&-2&-2\\0&0&2&2\end{smallmatrix}\right)$. Abbiamo quindi $3 = rk(A) = rk(f) \Rightarrow dim\ Imm\ f = 3 \Rightarrow f$ surgettiva $\Rightarrow dim\ Ker\ f = 1$. Una delle basi di $Imm\ f = \mathcal{C}_A$ è data dalle prime 3 colonne di A, quindi $\{x^2+x+1, -x^2+x-1, -x^2-x+1\}$ è una base di $Imm\ f$.

Il nucleo di L_A è formato dalle soluzioni di $AX=0$: $Ker\ L_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\t\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix}x-y+z-t=0\\y-z=0\\-z+t=0\end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\t\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \middle| x=y=z=t \right\} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$. Quindi $Ker\ f = Span\,(\{(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix})\})$.

Ripetiamo lo stesso esercizio con basi diverse: sia $B' = \{(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix})\}$ e $C' = \{x^2+x+1, x+1, 1\}$. Troviamo $A' = \mathfrak{M}_{B',C'}(f)$; sapendo che $A'^i = [f(v_i)]'_C$.

- $[f((\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}))]'_C = [0]'_C = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}))]'_C = [x^2+x+1]'_C = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}))]'_C = [x^2-x-1]'_C = \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\0\end{smallmatrix}\right)$.

- $[f((\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}))]'_C = [2]'_C = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$.

Quindi $A' = \mathfrak{M}_{B',C'}(f) = \left(\begin{smallmatrix}0&1&1&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&2\end{smallmatrix}\right)$. La prima colonna di zeri ci dice che il primo vettore appartiene al Ker, ma $dim\ Ker = 4 - dim\ Imm\ f = 4 - rk(f) = 4 - rk(A') = 1$ e noi abbiamo un vettore diverso da zero che vi appartiene: il primo vettore della nostra base; quindi $(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}) \in Ker\ f$, ma vale anche l'uguaglianza: $Ker\ f = Span\,(\{(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix})\})$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $U \subseteq V$, $Z \subseteq W$ dei sottospazi vettoriali e $T = \{f \in Hom(V,W) \mid U \subseteq Ker\ f, Imm\ f \subseteq Z\}$. Dimostrare che T è sottospazio vettoriale di $Hom(V,W)$.

Dimostrazione.

- $0_{Hom} \in T$: $Ker\ 0_{Hom} = V \Rightarrow U \subseteq Ker\ 0_{Hom}$; $Imm\ 0_{Hom} = \{0_W\} \Rightarrow Imm\ 0_{Hom} \subseteq Z$. Quindi $0_{Hom} \in T$.
- Dobbiamo dimostrare che T è chiuso per somma:
  - $\forall f, g \in T, \forall u \in U,\ f + g(u) = f(u) + g(u) = 0_W + 0_W = 0_W$.
  - $\forall f, g \in T, \forall v \in V,\ f + g(v) = f(v) + g(v) = z_1 + z + 2$ con $z_1, z_2 \in Z$.

- Dobbiamo dimostrare che T è chiuso per prodotto per scalari:
  - $\forall f \in T, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U,\ \lambda f(u) = \lambda 0_W = 0_W$.
  - $\forall f \in T, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V,\ \lambda f(v) = \lambda z_1 \in Z$ con $z_1 \in Z$.

Lezione 16

Teoria

Proposizione 10. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$ spazi vettoriali di dimensione n, p, sia $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare di rango r. Allora $\exists S$ base di V, $\exists T$ base di W | $\mathfrak{M}_{B,S}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.*

Dimostrazione. $dim\ Ker\ f = n - r$; inoltre vogliamo scegliere la base di partenza in modo che siano gli ultimi $n - r$ vettori di essa ad appartenere al nucleo.
Quindi, sia $R = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $Ker\ f$; possiamo completare R a base di V estraendo una base dall'unione di R e di una base nota; sia $S = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1} \dots, v_n\}$ questa base; visto che gli ulitmi $n-r$ vettori sono stati scelti per generare il nucleo di f, i primi r vettori ne genereranno l'immagine.
Quindi $Q = \{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ è una base di $Imm\ f$. Completiamo ora Q a base di W in un modo qualsiasi e sia $T = \{(v_1), \dots, f(v_r), w_{r+1}, \dots, w_n\}$ il completamento di Q a base di W.
Le due basi S, T sono state costruite per verificare la tesi.

Teorema 3. *Siano V, W degli spazi vettoriali e $f, g \in Hom(V, W)$. Allora $f \underset{SD}{\equiv} \Leftrightarrow rk(f) = rk(g)$. Cioè il rango è invariante completo per l'SD-equivalenza.*

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' Già dimostrato: Osservazione 8.

'$\Leftarrow$' Sia $r = rk(f) = rk(g)$. $\exists B, B'$ basi di V, $\exists S, S'$ basi di W tali che: $\mathfrak{M}_{B,S}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathfrak{M}_{B',S'}(f)$. E abbiamo detto che due applicazioni sono SD-equivalenti se e solo se, in opportune basi, sono rappresentati dalla stessa matrice.

Questo teorema ci permette di dire che per ogni rango c'è un classe di SD-equivalenza.

Vediamo ora le versioni matriciali delle cose appena viste.

Proposizione 11. *Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. $rk(A) = r \Rightarrow A \underset{SD}{\equiv} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.*

Teorema 4. *Siano $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Allora $A \underset{SD}{\equiv} B \Leftrightarrow rk(A) = rk(B)$.*

Corollario 9. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$; allora $rk(A) = rk(^\tau B)$.*

Dimostrazione. Sia $J_r(p,n) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$. Se $r = rk(A)$, allora $\exists M, N$ matrici invertibili e tali che $A = MJ_r(p,n)N$; dunque $^\tau A = {}^\tau N\, {}^\tau J_r(p,n)\, {}^\tau M$; ma $^\tau M$ e $^\tau N$ sono trasposte di matrici invertibili, quindi anch'esse invertibili e quindi:

$$^\tau A \underset{SD}{\equiv} J_r(p,n) \underset{SD}{\equiv} A \Rightarrow {}^\tau A \underset{SD}{\equiv} A$$

Definizione 3 (Sottomatrice e minore)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$. La matrice $S \in \mathcal{M}(m,q,\mathbb{K})$ (con $m \leq p$ e $q \leq n$) si dice sottomatrice di A se $\exists j_1,\ldots,j_m,h_1,\ldots,h_q \in \mathbb{N} \mid \forall x_1^m, \forall y_1^q\ [S]_{x,y} = [A]_{j_x,h_y}$.
In questo caso si scrive $S = \left(A_{j_1},\ldots,A_{j_m}\middle|\, A^{h_1},\ldots,A^{h_q}\right)$. In pratica una sottomatrice è fatta prendendo le intersezioni fra delle righe e delle colonne di A.
Una sottomatrice quadrata si dice minore (si dice ordine di un minore il numero delle sue righe).

Proposizione 12. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}(m,q,\mathbb{K})$ sottomatrice di A. Allora $rk(B) \leq rk(A)$.*

Dimostrazione. Sia $B = \left(A_{i_1},\ldots,A_{i_m}\middle|\, A^{j_1},\ldots,A^{j_q}\right)$; sia $C = \left(A_{i_1},\ldots,A_{i_m}\middle|\, A^1,\ldots,A^n\right)$.
La sottomatrice C è quindi fatta prendendo tutte le colonne di A e solo qualche riga, mentre invece la sottomatrice B è fatta prendendo tutte le righe di C ma solo qualche colonna.
Poiché $rk(A) = dim\ \mathcal{C}_A = dim\ \mathcal{R}_A$ è evidente che $rk(C) \leq rk(A)$ visto che $dim\ \mathcal{R}_C \leq dim\ \mathcal{R}_A$ (visto che abbiamo tolto dei vettori dai vettori generatori di $\mathcal{R}_A$ non possiamo di certo aver ottenuto uno spazio vettoriale di dimensione maggiore).
Ma $B = \left(C_1,\ldots,C_m\middle|\, C^{j_1},\ldots,C^{j_q}\right)$, dunque, per la stessa ragione, $dim\ \mathcal{C}_B \leq dim\ \mathcal{C}_A \Rightarrow rk(B) \leq rk(C) \leq rk(A)$.

Proposizione 13. *Sia $A \in \mathcal{M}(p,n)$ e $B \in \mathcal{M}(q)$ un minore di A invertibile (quindi di rango q). Sappiamo già che le righe e le colonne di B sono linearmente indipendenti; ma ora diciamo anche che le righe e le colonne di A che concorrono a formare B sono indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $B = \left(A_{i_1},\ldots,A_{i_q}\middle|\, A^{j_1},\ldots,A^{j_q}\right)$. $\alpha_1 A_{i_1} + \ldots + \alpha_q A_{i_q} = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_q B_q = 0_{\mathbb{K}^q}$ ma $B_1,\ldots,B_q$ sono linearmente indipendenti per ipotesi $\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0_{\mathbb{K}}$.

Teorema 5. *Sia $A \in \mathcal{M}(p,n)$. Il rango di A coincide con il massimo degli ordini dei suoi minori invertibili.*

Dimostrazione.

- Sia $B \in \mathcal{M}(\rho)$ un minore di A invertibile. Se è invertibile i suoi vettori sono linearmente indipendenti, ci sono quindi anche ρ righe (e colonne) linearmente indipendenti in A. Per la proposizione precedente allora $rk(A) \geq \rho$.

- Siano $A_{i_1},\ldots,A_{i_r}$ righe indipendenti in A. Considero la sottomatrice $B = \left(A_{i_1},\ldots,A_{i_r}\middle|\, A^1,\ldots,A^n\right)$, il rango di questa sottomatrice è r, poiché contiene r righe indipendenti. Ma $r = dim\ \mathcal{R}_B = rk(B) = dim\ \mathcal{C}_B$; quindi ci sono anche r colonne indipendenti; allora costruisco $M = \left(B_1,\ldots,B_r\middle|\, B^{j_1},\ldots,B^{j_r}\right)$ con $B^{j_1},\ldots,B^{j_r}$ linearmente indipendenti.
  Visto che $rk(M) = r$ e $M \in \mathcal{M}(r)$ abbiamo che:

- M è invertibile.
- M è minore di A.
- $rk(M) = rk(A)$.

Osservazione 9. Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, sappiamo che le righe (e le colonne) di questa matrice sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow rk(A) < n \Leftrightarrow A$ non è invertibile.
È quindi chiara l'importanza del determinare il rango di una matrice: ci serve a capire se essa induce un isomorfismo e a sapere la dimensione del Ker e dell'immagine della applicazione che induce.
Ci farebbe quindi piacere avere un'applicazione $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ tale che $D(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe (e quindi le colonne) di A sono linearmente dipendenti. Se avessimo questa applicazione potremmo lavorare più facilmente con le matrici.

Riflessione 9. Prima di cercare in generale questa misteriosa applicazione vediamo se riusciamo a trovarla per un caso particolare: le matrici $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$.
Prendiamo una generica matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Esaminiamo i vari casi:

- $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0 \Rightarrow D(A) = 0$.
- $\alpha_{11} \neq 0 \Rightarrow$ riduco a scalini. $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} \end{pmatrix}$. $rk(A) \leq 1 \Leftrightarrow \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$.
- $\alpha_{11} = 0 \wedge \alpha_{21} \neq 0$. $rk(A) \leq 1 \Leftrightarrow \alpha_{12} = 0$.

Quindi in definitiva $rk(A) < 2 \Leftrightarrow \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$. Potremmo dire quindi che $D(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Sintetizziamo quanto abbiamo detto dicendo che l'applicazione trovata è l'applicazione $\mathcal{M}(2, \mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ definita dalla legge: $D\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\right) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.
vediamo ora alcune caratteristiche di questa applicazione:

ι) D è lineare in ciascuna riga: ossia, date $B, C \in \mathcal{M}(1, 2, \mathbb{K})$,

- $D\left(\begin{pmatrix} \lambda B + \mu C \\ A_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda D\left(\begin{pmatrix} B \\ A_2 \end{pmatrix}\right) + \mu D\left(\begin{pmatrix} C \\ A_2 \end{pmatrix}\right)$.
- $D\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ \lambda B + \mu C \end{pmatrix}\right) = \lambda D\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ B \end{pmatrix}\right) + \mu D\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ C \end{pmatrix}\right)$.

Dimostrazione. Verifichiamo solo la prima delle due, l'altra è uguale.
$D\left(\begin{pmatrix} \lambda b_1 + \mu c_1 & \lambda b_2 + \mu c_2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\right) = (\lambda b_1 + \mu c_1)\,\alpha_{22} - (\lambda b_2 + \mu c_2)\,\alpha_{21} = \lambda\,(b_1\alpha_{22} - b_2\alpha 21) + \mu\,(c_1\alpha_{22} - c_2\alpha 21) = \lambda D\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\right) + \mu D\left(\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\right) = \lambda D\left(\begin{pmatrix} B \\ A_2 \end{pmatrix}\right) + \mu D\left(\begin{pmatrix} C \\ A_2 \end{pmatrix}\right)$.

$\iota\iota$) Se A ha due righe uguali, $rk(A) < 2 \Rightarrow D(A) = 0$.

$\iota\iota\iota$) $D\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

Esercitazione

Continuiamo l'esercizio iniziato alla fine dell'ultima lezione.

Esercizio 8. Avevamo $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n, m, B, C basi rispettivamente di V, W, $U \subseteq V$, $Z \subseteq W$ dei sottospazi vettoriali e $T = \{f \in Hom(V,W) \mid U \subseteq Ker\ f, Imm\ f \subseteq Z\}$. Abbiamo dimostrato che T è sottospazio vettoriale.

Consideriamo ora l'isomorfismo $Hom(V,W) \xrightarrow{\mathfrak{M}_{B,C}} \mathcal{M}(m,n,\mathbb{K})$. Visto che è isomorfismo abbiamo che $dim\ T = dim\ \mathfrak{M}_{B,C}(T)$. Proviamo a vedere quanto vale $dim\ \mathfrak{M}_{B,C}(T)$. Prendiamo le seguenti basi:

- $\widetilde{U} = \{u_1, \dots, u_h\}$ base di U.
- Completiamo $\widetilde{U}$ a base di V: $\widetilde{V} = \{u_1, \dots, u_h, v_{h+1}, \dots, v_n\}$.
- $\widetilde{Z} = \{z_1, \dots, z_k\}$ base di Z.
- Completiamo $\widetilde{Z}$ a base di W: $\widetilde{W} = \{z_1, \dots, z_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$.

Prendiamo ora $f \in T$, proviamo a vedere com'è fatta la matrice $F = \mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(f)$ considerando che $\widetilde{U}$ è una base di un sottospazio vettoriale del Ker tutti i suoi vettori sono mandati a 0.

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c} [f(u_1)]_{\widetilde{W}} & \dots & [f(v_n)]_{\widetilde{W}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & [f(v_{k+1})]_{\widetilde{W}} & \dots & [f(v_n)]_{\widetilde{W}} \end{array} \right)$$

Questo fino a quando non si considera che i vettori di arrivo sono solo i primi h: lo spazio delle immagini è sottospazio vettoriale dello spazio Z, quindi tutte le ultime $m-k$ righe della matrice sono vuote: se non fosse così avremmo dei vettori le cui immagini non sono contenute in Z. Quindi la matrice associata sarà più simile a:

$$F = \text{m}\left\{ \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{k}\{\ \overbrace{A}^{\text{n-h}} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}^{\text{n}} \right.$$

Quindi l'unica sottomatrice non nulla di F è $A \in \mathcal{M}(k, n-h, \mathbb{K})$. Quindi possiamo dire che $\mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(T) \subseteq H = \{M \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{K}) \mid M$ è nella forma di $F\}$. Chiaramente H è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(m,n,\mathbb{K})$ perché è isomorfo a $\mathcal{M}(k, n-h, \mathbb{K})$. Se riusciamo a dimostrare che $\mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(T) = H$ avremmo trovato la dimensione di $\mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(T)$ e altre sue caratteristiche.

Vediamo quindi l'altra inclusione. Sia $L \in H$ una matrice nella forma cercata; questa induce naturalmente un'applicazione lineare da V considerato con la base $\widetilde{V}$ a W considerato con la base $\widetilde{W}$. Quindi $\exists f \in Hom(V,W) \mid L = \mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(f)$; verifichiamo che $f \in T$. Dobbiamo provare $f(U) = \{0_W\}$. Ma $f(U) = Span\left(\{f(u_1), \cdots, f(u_h)\}\right) = Span$ delle prime h colonne di L, ma queste prime colonne sono nulle, perché $L \in H$.

Vediamo ora che $Imm\ f \subseteq V$: $Imm\ f = Span\left(\{f(u_1), \dots, f(u_h), f(v_{h+1}), \dots, f(v_n)\}\right) = Span\left(\{f(v_{h+1}), \dots, f(v_n)\}\right)$. Consideriamo che, per come è stata costruita la matrice, $\forall i_1^{n-h}, f(v_{h+i}) = A_1^i z_1 + \dots + A_k^i z_k + 0w_{k+1} + \dots + 0w_m = A_1^i z_1 +$

$\ldots + A^i_k z_k \in Z$.
Quindi ogni applicazione rappresentata da una matrice associata (con le basi scelte) in H è un'applicazione di T e viceversa. Quindi $\mathfrak{M}_{\widetilde{V},\widetilde{W}}(T) = H$ e quindi anche le loro dimensioni sono uguali.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n, m, $U \subseteq V$, $Z \subseteq W$ dei sottospazi vettoriali e $T' = \{f \in Hom(V, W) \mid f(U) \subseteq Z\}$. Dimostriamo che T' è sottospazio vettoriale e calcoliamone la dimensione.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che T' è un sottospazio vettoriale.

- $0_{Hom} \in T'$, infatti $f(U) = \{0_W\} \subseteq Z$.
- $\forall f, g \in T', \forall u \in U,\ f + g(u) = f(u) + g(u) = z_1 + z_2$ con $z_1, z_2 \in Z$.
- $\forall f \in T', \forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda f(u) = \lambda z$ con $z \in Z$

Proviamo adesso a trovare la dimensione di T' come nell'esercizio precedente: calcoliamo la dimensione di $\mathfrak{M}_{B,C}(T')$ scegliendo in modo furbo le basi B e C. Prendiamo come basi:

- $\widetilde{U} = \{u_1, \ldots, u_h\}$ base di U.
- Completiamo $\widetilde{U}$ a base di V: $B = \{u_1, \ldots, u_h, v_{h+1}, \ldots, v_n\}$.
- $\widetilde{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ base di Z.
- Completiamo $\widetilde{Z}$ a base di W: $C = \{z_1, \ldots, z_k, w_{k+1}, \ldots, w_m\}$.

Adesso, prendendo una generica $f \in T'$ vediamo com'è fatta la sua matrice associata $F' = \mathfrak{M}_{B,C}(f)$;

Sia $H' = \{M \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \mid M$ è nella forma di $F'\}$, possiamo vedere che $\mathfrak{M}_{B,C}(U) \subseteq H'$, infatti $\forall i_1^h, A^i$ avrà le ultime $m - k$ righe nulle, se infatti non fosse così esisterebbe un vettore di U che ha l'immagine non contenuta in Z; infatti $\forall i_1^h, A^i = [f(u_i)]_C$ e le prime k righe rappresentano i vettori di Z, le ultime $m-k$ rappresentano i vettori del completamento a base di Z. Per questo ultime $m - k$ righe devono essere vuote. Non possiamo invece dire nulla delle ultime $n - h$ colonne: non abbiamo alcuna garanzia per quanto riguarda l'immagine dei vettori non appartenenti ad U.
Vediamo ora l'inclusione inversa: sia $f \in Hom(V, W) \mid A = \mathfrak{M}_{B,C}(f) \in H'$. Allora $f(U) = Span\left(\{f(u_1), \ldots, f(u_h)\}\right)$, ma $\forall i_1^h,\ f(u_i) = A^i_1 z_1 + \ldots + A^i_k z_k + A^i_{k+1} w_{k+1} + \ldots + A^i_m w_m$; ma $A \in H' \Rightarrow f(u_i) = A^i_1 z_1 + \ldots + A^i_k z_k + 0 w_{k+1} + \ldots + 0 w_m = A^i_1 z_1 + \ldots + A^i_k z_k \in Z$. Quindi $f(U) \subseteq Z$
Da tutto questo possiamo dire che $dim\ T' = dim\ H' = kh + m(n - h)$.

Esercizio 10. Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n, m, $U, U' \subseteq V$, $Z, Z' \subseteq W$ dei sottospazi vettoriali e $T_2 = \left\{ f \in Hom(V, W) \middle| \substack{f(U) \subseteq Z \\ f(U') \subseteq Z'} \right\}$.
Dimostriamo che T' è sottospazio vettoriale e calcoliamone la dimensione.
Dimostrare che T_2 è un sottospazio vettoriale e trovarne la dimensione, proprio come si è fatto con gli ultimi due esercizi.

Esempio 2 (Matrice di cambiamento di base)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e B, B' basi di V. Allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"'] & V_{B'} \arrow[d, "{[\ ]_{B'}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

e A viene detta matrice del cambio di base da B a B'; quindi $A \cdot [v]_B = [v]_{B'}$.

Esempio 3. Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione n, m e B, B' basi di V, C, C' basi di W; sia inoltre $f \in Hom(V, W)$; allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"'] & W_C \arrow[d, "{[\ ]_C}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_B"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

con $B = \mathfrak{M}_{B,C}(f)$; inoltre il diagramma si può espandere al seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[rrr, "L_{B'}"] \arrow[ddd, "L_M"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ddd, "L_N"] \\ & V_{B'} \arrow[ul, "{[\ ]_{B'}}"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "M"', "id_V"] & W_{C'} \arrow[ur, "{[\ ]_C}"] \arrow[d, "id_W"', "N"] & \\ & V_B \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "{[\ ]_B}"] & W_C \arrow[dr, "{[\ ]_C}"'] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rrr, "L_B"'] & & & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

nel quale:

- $M = \mathfrak{M}_{B',B}(id_V)$
- $N = \mathfrak{M}_{C',C}(id_W)$
- $L_{B'} = L_N^{-1} \circ L_B \circ L_M$
- $B' = N^{-1}BM$

Esempio 4. Facciamo un esempio del diagramma appena visto. Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con la legge: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3x-z \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ e $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{s_1, s_2, s_3\}$, basi di $\mathbb{R}^3$, $T = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\} = \{w_1, w_2\}$ e $T' = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\} = \{t_1, t_2\}$ basi di $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo ora le matrici associate alle varie applicazioni:

-
$$\mathfrak{M}_{S,T}(f) = \left([f(v_1)]_T \middle| \dots \middle| [f(v_3)]_T \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

-
$$N^{-1} = \mathfrak{M}_{T,T'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \left([w_1]_{T'} \middle| [w_2]_{T'} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

-
$$M = \mathfrak{M}_{S',S}(id_{\mathbb{R}^3}) = \left([s_1]_S \middle| \dots \middle| [s_3]_S \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se il diagramma che abbiamo visto funziona dovremmo avere:

$$\mathfrak{M}_{S',T'}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che sia davvero così:

$$\mathfrak{M}_{S',T'}(f) = \left([f(s_1)]_{T'} \middle| \dots \middle| [f(s_3)]_{T'} \right) = \left(\left[f \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right]_{T'} \middle| \dots \middle| \left[f \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right]_{T'} \right) =$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{T'} \middle| \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{T'} \middle| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{T'} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Osservazione 10. Siano V, W degli spazi vettoriali, $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare e $B = \{v_1, \dots, v_n\}, C = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi rispettivamente di V e W. Supponiamo di conoscere $A = \mathfrak{M}_{B,C}(f) = \left(A^1 \middle| \dots \middle| A^n \right)$; date anche le basi $B' = \{v_2, v_1, \dots, v_n\}$, $C' = \{w_2, w_1, \dots, w_m\}$, $C_\lambda = \{\frac{1}{\lambda} w_1, \dots, w_m\}$ cerchiamo di capire come cambiano le matrici associate al cambiare della base.

- $\mathfrak{M}_{B',C}(f) = \left(A^2 \middle| A^1 \middle| \dots \middle| A^n \right)$

- $\mathfrak{M}_{B,C'}(f) = \begin{pmatrix} A_2 \\ \hline A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

- $\mathfrak{M}_{B,C_\lambda}(f) = \begin{pmatrix} \lambda A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

Esercizio 11. Siano $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \underset{SD}{\equiv} B$.

Dimostrazione. $A \underset{SD}{\equiv} B \Leftrightarrow \exists M, N \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ invertibili tali che $B = NAM \Leftrightarrow rk(A) = rk(B)$.
$B^3 = B^2 - B^1 \Rightarrow rk(B) \leq 2$ ma in particolare è 2 perché le tre colonne non sono l'una multiplo dell'altra.
La domanda iniziale è quindi equivalente a chiedersi per quali λ, $rk(A) = 2$.
Cerchiamo di trovare il minore invertibile di ordine massimo per vedere il rango (metodo in questo caso inefficiente)

- $\left(A_1^1\right)$ è un minore (ed è chiaramente invertibile); quindi $rk(A) \geq 1$.

- $\left(\begin{smallmatrix} A_1^1 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^3 \end{smallmatrix}\right)$ è un minore invertibile; quindi $rk(A) \geq 2$.

- Si deve ora vedere se l'unico minore di A di ordine 3 (A stessa) è invertibile o no; comunque avremo $rk(A) \geq 2$ per ogni λ. Per vedere se A è invertibile dobbiamo scalinarla.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3=A_3-A_2]{\substack{A_2=A_2-A_1 \\ A_3=A_3-A_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Se $\lambda = -1 \vee \lambda = 0$ allora $rk(A) = 2$; altrimenti $rk(A) = 3$.

Lezione 17

Teoria

Continuiamo il ragionamento della scorsa lezione: stavamo cercando un'applicazione lineare $\mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ tale che $D(A) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow$ le colonne (e quindi le righe) della matrice sono linearmente dipendenti. Abbiamo trovato un'applicazione con queste caratteristiche se $n = 2$ ma vorremmo trovarla in generale per qualsiasi n.

Definizione 4 (Multilineare)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Un'applicazione $\overbrace{V \times \ldots \times V}^{n \text{ volte}} \xrightarrow{f} W$ si dice multilineare se $\forall i_1^n$ e $\forall v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$, l'applicazione $V \xrightarrow{\widetilde{f}} W$ definita dalla legge $\widetilde{f}(x) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1} \ldots, v_n)$ è lineare.

Alla luce di questa definizione possiamo dire che la D che abbiamo trovato per $\mathcal{M}(2,\mathbb{K})$ è multilineare (per riga); infatti possiamo $\mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ e quindi potremmo intendere $D(A) = D(A_1, A_2)$; in questo senso D è multilineare.

Teorema 6. *Sia $\mathbb{K}$ campo; $\forall n \geq 1$ $\exists!\, \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ tale che:*

ι) *D è lineare per ogni riga. Cioè $\forall i_1^n, D(A_1, \ldots, \lambda B + \mu C, \ldots, A_n) = \lambda D(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \mu\lambda D(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n)$.*

$\iota\iota$) *Se A ha due righe uguali, $D(A) = 0_{\mathbb{K}}$.*

$\iota\iota\iota$) *$D(I_n) = 1$.*

Noi non sappiamo ancora che un'applicazione del genere esiste (non abbiamo dimostrato il teorema), possiamo però supporre che esista, chiamarla determinante, e vedere quali proprietà avrebbe; quali sono cioè le proprietà deducibili dalle tre che abbiamo richiesto, se le proprietà deducibili saranno interessanti troveremo poi esplicitamente l'applicazione (dopo aver dimostrato che esiste) e sapremo che verifica tutte le proprietà.

Proposizione 14 (Proprietà deducibili)**.** *Sia $\mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ un'applicazione che verifichi le tre proprietà del teorema; allora:*

a) Se A ha una riga nulla allora $D(A) = 0_{\mathbb{K}}$.

b) $D(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) = -D(\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots)$.

c) Se B è una matrice ottenuta da A sommando ad una riga una combinazione lineare delle altre righe allora $D(B) = D(A)$; cioè le operazioni elementari di terzo tipo non cambiano il determinante.

d) Se le righe di A sono linearmente dipendenti $D(A) = 0$.

e) Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, $D(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Dimostrazione. a) Sia $i \mid A_i = 0_{\mathbb{K}^n}$, allora $D(A) = D(A_1, \ldots, 0 \cdot B, \ldots, A_n) \stackrel{\iota)}{=} 0D(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) = 0$.

b) $0_{\mathbb{K}} \stackrel{\iota\iota)}{=} D(\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j + A_i, \ldots) \stackrel{\iota)}{=} D(\ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots) + D(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) + D(\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots) + D(\ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots) \stackrel{\iota\iota)}{=} D(\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots) + D(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots)$

c) Supponiamo che la riga che viene variata di A sia la prima. Allora $B_1 = A_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i$. Allora $D(B) = D\left(A_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i, A_2, \ldots, A_n\right) = D(A) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{D(A_i, A_2, \ldots, A_n)}^{0 \text{ per la } \iota\iota)} = D(A)$.

d) Supponiamo che la riga dipendente delle altre sia la prima, quindi $A_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i$. Allora $D(A) = D\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i, A_2, \ldots\right) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{D(A_i, A_2, \ldots)}^{0 \text{ per la } \iota\iota)} = 0$.

e) Per la linearità in ciascuna riga, $D(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot D(I_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

Proposizione 15 (Dimostrazione di unicità del determinante)**.** *Il teorema enunciato ha una dimostrazione molto lunga, la dividiamo quindi in tante piccole proposizioni in modo tale da riuscire a gestirla meglio. Dimostriamo innanzitutto che, se esiste un'applicazione che ha le tre proprietà richieste, questa è unica.*

Dimostrazione. Sia S a scalini ottenuta da A con operazioni elementari di primo e terzo tipo; quindi $D(A) = (-1)^m D(S)$ dove m = numero di scambi di riga fatti.
Ci sono due casi:

- S ha una riga nulla $\Rightarrow D(S) = 0 \Rightarrow D(A) = 0$.
- S ha n pivot: $p_1, \ldots, p_n$. In questo secondo caso, con sole operazioni di terzo tipo per riga (che non alterano D) portiamo S nella forma: $S' = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$; vale quindi $D(S) = D(S') = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Allora vale anche che $D(A) = (-1)^m p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Corollario 10. *Sia D un'applicazione che verifica le tre proprietà del Teorema 6; allora $D(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' Proposizione 14, punto d).

'$\Rightarrow$' Dimostriamo la contronominale: se le righe di A fossero linearmente indipendenti una ridotta a scalini S di A avrebbe n pivot; quindi avremmo $D(S) \neq 0$ e da questo $\exists m \in \mathbb{N} \mid \ D(A) = (-1)^m D(S) \neq 0$ (dimostrato nella proposizione precedente); quindi $D(A) \neq 0$.

Definizione 5 (Definizioni su permutazioni)**.** Si indica con:

- $J_n = \{1, \ldots, n\}$.
- $S_n = \{\text{bigezioni } J_n \longrightarrow J_n\}$.
- $\{S_n, \circ\}$ è un gruppo, detto gruppo simmetrico su n elementi.

Sia $c = (i_1, \ldots, i_k)$ un ciclo; si indica con:

- $l(c) = k$ indica la lunghezza del ciclo.
- $N(c) = l(c) - 1$.

Poiché $c^{-1} = (i_k, \ldots, i_1)$ abbiamo che $N(c^{-1}) = N(c)$. Inoltre $c = (i_1, i_k) \circ (i_1, i_{k-1}) \circ \ldots \circ (i_1, i_2)$. Quindi c è prodotto di $N(c)$ trasposizioni.

Teorema 7. *Se c è prodotto di t trasposizioni,*

$$t \equiv N(c) \ mod \ 2$$

Inoltre $\forall \sigma \in S_n$ σ si scrive in modo unico (a meno dell'ordine) come prodotto di cicli disgiunti.

Se $S_n \ni \sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_p$ cicli disgiunti, si pone $N(\sigma) \overset{def.}{=} N(c_1) + \ldots + N(c_p)$; allora σ è prodotto di $N(\sigma)$ trasposizioni e $N(\sigma^{-1}) = N(\sigma)$.

Definizione 6 (Permutazioni pari e segno)**.** Sia $\sigma \in S_n$, σ è detta permutazione pari se $N(\sigma)$ è pari.

$$sgn(\sigma) \overset{def.}{=} (-1)^{N(\sigma)}$$

è detto segno di σ.

Enunciamo ora una proposizione che vale come seconda prova dell'unicità del determinante.

Proposizione 16 (Formula di Leibniz)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo (e sia accettata la notazione $a_{i,j}$ per $[A]_{i,j}$ e I_k per indicare la riga di formato opportuno tutta nulla tranne per un 1 alla posizione k). Se $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{D} \mathbb{K}$ verifica le proprietà del Teorema 6 allora $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$*

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

Dimostrazione.

$$D(A) = D\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} I_{i_1} \\ \hline A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \displaystyle\sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} I_{i_2} \\ \hline A_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \ldots = \sum_{\substack{i_1 \in J_n \\ \cdots \\ i_n \in J_n}} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{i_n} \end{pmatrix}$$

Ma possiamo considerare nella somma solo gli addendi nei quali i vari i_j sono distinti, se infatti fosse $i_k = i_j$ avremmo $I_{i_k} = I_{i_j}$ quindi il determinante sarebbe zero perché avremmo due righe uguali; quindi, scartando questi casi abbiamo:

$$D(A) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}=J_n} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{i_n} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)} D\begin{pmatrix} I_{\sigma(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

Ma a questo punto si riporta la matrice $\begin{pmatrix} I_{\sigma(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ alla matrice identità con $N(\sigma)$ scambi di righe. Per cui abbiamo:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \overbrace{(-1)^{N(\sigma)}}^{sgn(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$$

Esempio 5. Vediamo ora alla pratica la proposizione appena dimostrata:

- Se $n = 2$, $S_n = \{id, (1,2)\}$; quindi, come già sapevamo, $D(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

- Se $n = 3$, $S_n = \{\overset{+}{id}, \overset{-}{(1,2)}, \overset{-}{(1,3)}, \overset{-}{(2,3)}, \overset{+}{(1,2,3)}, \overset{+}{(1,3,2)}\}$. Quindi $D(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$. La formula particolare con $n = 3$ si dice regola di Sarrus.

Con la seguente proposizione si dimostra l'esistenza di D_n l'applicazione (della quale abbiamo già dimostrato l'unicità) che rispetta le tre proprietà richieste dal Teorema 6.

Definizione 7 (Complemento algebrico)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, e $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$; si dice complemento algebrico di $[A]_{i,j}$ e si indica con $A_{i,j}$ la sottomatrice di A di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la riga A_i e la colonna A^j.

Proposizione 17 (Sviluppo di Laplace secondo la prima colonna)**.** *Sia* $\mathbb{K}$ *campo e* $\mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \xrightarrow{D_n} \mathbb{K}$ *l'applicazione definita da:*

- *Se* $n = 1$, $D_n(a) = a$.

- *Se* $n = 2$, $D_n\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$

- *Se $n \geq 2$, (ricordandoci il significato di $A_{i,j}$),*

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} D_{n-1}(A_{i,1})$$

In pratica quello che si fa è considerare la prima colonna, prendere il suo primo elemento e moltiplicarlo per il determinante del minore che si ottiene eliminando da A la prima riga e la prima colonna; poi gli si sottrae il secondo elemento della prima colonna moltiplicato per il determinante del minore che si ottiene eliminando da A la seconda riga e la prima colonna, e così via.
$D_n(A)$ è detto sviluppo di Laplace secondo la prima colonna.
Proviamo che D_n verifica le tre proprietà del Teorema 6. Il passo base non è necessario, poiché abbiamo già dimostrato (due volte) la validità del metodo per $n = 2$; dobbiamo quindi solo dimostrare i tre passaggi induttivi.

Dimostrazione. - D_n è lineare per ogni riga. Siano (considerando che nelle seguenti matrici le linee notevoli sono sempre la linea j-esima, con j che non cambia):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ \lambda B + \mu C \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ B \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ C \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Dobbiamo provare che $D_n(A) = \lambda D_n(A') + \mu D_n(A'')$. Osserviamo che:

$$\begin{cases} [A]_{i,1} = [A']_{i,1} = [A'']_{i,1} \text{ con } i \neq j \\ [A]_{j,1} = \lambda\, [A']_{j,1} + \mu\, [A'']_{j,1} \end{cases}$$

Inoltre, ricordandoci il significato di $A_{a,b}$, e ricordandoci che, per ipotesi induttiva D_{n-1} è multilineare per riga (e la j-esima riga di A è combinazione lineare delle j-esime righe di A' e A'').

$$\begin{cases} A_{j,1} = A'_{j,1} = A''_{j,1} \\ \forall i \neq j \quad D_{n-1}(A_{i,1}) = \lambda D_{n-1}(A'_{i,1}) + \mu D_{n-1}(A''_{i,1}) \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} D_n(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} D_{n-1}(A_{i,1}) \\ &= \sum_{i \neq j} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} D_{n-1}(A_{i,1}) + (-1)^{j+1} [A]_{j,1} D_{n-1}(A_{j,1}) \\ &= \sum_{i \neq j} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \left(\lambda D_{n-1}(A'_{i,1}) + \mu D_{n-1}(A''_{i,1})\right) + (-1)^{j+1} \left(\lambda\, [A']_{j,1} + \mu\, [A'']_{j,1}\right) D_{n-1}(A_{j,1}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, [A']_{i,1}\, D_{n-1}(A'_{i,1}) + \mu \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, [A'']_{i,1}\, D_{n-1}(A''_{i,1}) \\ &= \lambda D_n\,(A') + \mu D_n\,(A'') \end{aligned}$$

- Supponiamo che A abbia due righe uguali, ad esempio $A_j = A_h$ con $j < h$. Se $i \neq j$ e $i \neq h$ anche il minore $A_{i,1}$ ha due righe uguali e quindi, per ipotesi induttiva, $D_{n-1}(A_{i,1}) = 0$. Dunque $D_n(A) = (-1)^{j+1}[A]_{j,1}D_{n-1}(A_{j,1}) + (-1)^{h+1}[A]_{h,1}D_{n-1}(A_{h,1})$. Poiché $A_j = A_h$ abbiamo che $[A]_{j,1} = [A]_{h,1}$ inoltre i minori $A_{j,1}, A_{h,1}$ contengono le stesse righe in posizioni diverse; più precisamente se A'_m denota la riga A_m privata del primo elemento abbiamo che:

$$A_{j,1} = \begin{pmatrix} \dots \\ A'_{j-1} \\ A'_{j+1} \\ \dots \\ A'_h = A'_j \\ \dots \end{pmatrix} \qquad A_{h,1} = \begin{pmatrix} \dots \\ A'_j = A'_h \\ \dots \\ A'_{h-1} \\ A'_{h+1} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Allora $A_{j,1}$ può essere trasformata in $A_{h,1}$ con $h - j - 1$ scambi di riga; per cui abbiamo $D_{n-1}(A_{h,1}) = (-1)^{h-j-1}D_{n-1}(A_{j,1})$.
Dunque

$$\begin{aligned} D_n(A) &= (-1)^{j+1}[A]_{j,1}D_{n-1}(A_{j,1}) + (-1)^{h+1}[A]_{j,1}(-1)^{h-j-1}D_{n-1}(A_{j,1}) \\ &= [A]_{j,1}D_{n-1}(A_{j,1})\left[(-1)^{j+1} + (-1)^{2h-j}\right] = 0 \end{aligned}$$

- Si nota che l'unico contributo allo sviluppo di Laplace è dato da $[A]_{1,1} = 1$ e si noti che $A_{1,1} = I_{n-1}$; per ipotesi induttiva $D_{n-1}(I_{n-1}) = 1$ dunque $D_n(I_n) = 1$.

Definizione 8 (Determinante)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo; chiameremo determinante l'unica applicazione $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{D_n} \mathbb{K}$ che verifica le tre proprietà richieste dal teorema 6.
Abbiamo visto che:

- $D(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti.
- A è invertibile $\Leftrightarrow D(A) \neq 0$.

Esercitazione

Esercizio 12. Sia $\mathbb{K}$ campo, $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e $C_V = \{A \in V \mid AB = BA\ \forall B \in V\}$.
Dimostrare che:

- C_V è un sottospazio vettoriale.
- Provare che $C_V = Span(\{I\})$.

Dimostrazione. - Dimostriamo che C_V è sottospazio vettoriale.

  - $0_V \in C_V$; infatti $\forall B \in V, 0_V \cdot V = 0_V$.
  - $\forall A, B \in C_V, \forall C \in V,\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C = C \cdot A + C \cdot B = C \cdot (A + B)$.
  - $\forall A \in C_V, \forall C \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda A \cdot C = \lambda(A \cdot C) = \lambda(C \cdot A) = C \cdot \lambda A$.

- Dimostriamo la reciproca inclusione dei due insiemi.

  '$\supseteq$' Ovvio.

  '$\subseteq$' Sia $A \in C_V$, considero $\mathbb{K}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^n$. Sappiamo che $\forall f \in End(\mathbb{K}^n), L_A \circ f = f \circ L_A$; prendiamo allora un generico $f \in End(\mathbb{K}^n)$ e consideriamo $v \in Ker\ f$, sappiamo che $L_A(f(v)) = f(L_A(v))$, ma $L_A(0) = 0$; sappiamo quindi che il nucleo di f è L_A-invariante.
  Fissiamo $w \in \mathbb{K}^n$, allora $\exists f \in End(\mathbb{K}^n) \mid Ker\ f = Span(\{w\})$ (completando infatti a base $\{w\}$ esiste un'unica applicazione lineare tale che $f(w) = 0$, $f(w_1) = w_1, \ldots$ questa applicazione è un'applicazione che ha come Ker unicamente $Span(\{w\})$). Quindi il Ker della nostra applicazione è una retta; visto che $Ker\ f$ è L_A-invariante abbiamo che $L_A(w) = \lambda w$; quindi L_A moltiplica tutti i vettori della retta per un certo valore.
  Abbiamo quindi che $\forall z \in \mathbb{K}^n,\ \exists t \in \mathbb{K} \mid L_A(z) = tz$.
  Prendiamo allora $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti. Questi due vettori generano due rette incidenti; inoltre $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \mid L_A(v_1) = \lambda_1 v_1,\ L_A(v_2) = \lambda_2 v_2$. Completiamo questi due vettori a base di $\mathbb{K}^n$: $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Sappiamo che $\exists! g \in End(\mathbb{K}^n) \mid g(v_1) = v_2, g(v_2) = v_1, g(v_3) = 0, \ldots, g(v_n) = 0$. Abbiamo che: $L_A(g(v_1)) = g(L_A(v_1)) \Rightarrow L_A(v_2) = g(\lambda_1 v_1) \Rightarrow \lambda_2 v_2 = \lambda 1 v_2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$.
  Portando avanti questo ragionamento si può dire che $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \forall x \in \mathbb{K}^n, L_A(x) = \lambda x \Rightarrow L_A = \lambda id_{\mathbb{K}^n}$.

Vediamo un altro modo per fare l'esercizio. Sia $B = \{w, w_1, \ldots, w_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. Consideriamo l'applicazione $f \in End(\mathbb{K}^n)$ che manda tutti i vettori in loro stessi tranne w_1 che è mandato a zero. Avremo allora che $\mathfrak{M}_{B,B} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.
Ma abbiamo che che $\mathfrak{M}_{B,B}(L_A) = MAN^{-1}$ con $M = \mathfrak{M}(Can, B)(id) = N$ e quindi (considerando anche che A commuta con tutte le matrici) $\mathfrak{M}_{B,B}(L_A) = MAN^{-1} = MAM^{-1} = A$.

Esercizio 13. Sia $\mathbb{K}$ campo e $C_{GL(n,\mathbb{K})} = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \forall B \in GL(n, \mathbb{K})\}$. Dimostrare che $C_{GL(n,\mathbb{K})} = Span(\{I_n\}) - \{0\}$.

'$\supseteq$' Ovvio.

'$\supseteq$'

Lezione 18

Teoria

Osservazione 11. 1) Con la stessa dimostrazione che abbiamo utilizzato per la proposizione 17 si dimostra che lo sviluppo di Laplace si può effettuare su ogni colonna: il determinante si può trovare facendo lo sviluppo su una qualsiasi colonna:

$$\forall j_1^n, \quad D_n(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{i,j} D_{n-1}(A_{i,j})$$

Si dimostra che anche questa applicazione ha le proprietà richieste, ma visto che abbiamo dimostrato l'unicità del determinante, questo vuol dire che, qualsiasi riga utilizziamo per calcolarlo, il determinante è sempre lo stesso.

2) $\forall \lambda,\ D_n(\lambda A) = \lambda^n D(A)$.

Teorema 8 (di Binet)**.** *Sia* $\mathbb{K}$ *campo;* $\forall A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ *si ha che:*

$$D_n(A \cdot B) = D_n(A) D_n(B)$$

Dimostrazione. - $D_n(B) = 0 \Rightarrow rk(B) < n \Rightarrow rk(AB) < n \Rightarrow D(AB) = 0$.

- Sia quindi B invertibile. Consideriamo $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ definita da: $f(A) = \frac{D_n(AB)}{D_n(B)}$. Vediamo che verifica le tre proprietà (e quindi, per l'unicità del determinante, è il determinante).

  ι) Sia A_m una riga che è prodotto lineare di altre due righe B, C; ma allora anche AB_m è prodotto lineare delle due righe, visto che B è isomorfismo. Quindi f è lineare nelle righe.

  $\iota\iota$) Se $D_n(A) = 0$ allora (l'abbiamo visto nel primo caso) anche $D_n(AB) = 0$.

  $\iota\iota\iota$) $f(I) = \frac{D_n(B)}{D_n(B)} = 1$.

Corollario 11. $D_n(A^{-1}) = D_n(A)^{-1}$

Corollario 12. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo e* $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \ni M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ *con* $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ *e* $C \in \mathcal{M}(q, \mathbb{K})$*. Allora* $D_n(M) = D_p(A) + D_q(C)$*.*

Dimostrazione. $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) = M' \cdot M''$. Ma $D(M') = \overbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}^{p \text{ volte}} \cdot D_q(C)$ e $D(M') = \overbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}^{q \text{ volte}} \cdot D_p(A)$

Proposizione 18. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo;* $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$,

$$D_n(A) = D_n({}^{\tau}A)$$

Dimostrazione. $D({}^{\tau}A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \, [{}^{\tau}A]_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot [{}^{\tau}A]_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \, [A]_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot [A]_{\sigma(n),n}$. Sia $\tau = \sigma^{-1}$. Allora abbiamo che, se $\sigma(i) = j$, $\tau(j) = i$. Quindi $[A]_{\sigma(i),i} = [A]_{j,\tau(j)}$.
Quindi $[A]_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot [A]_{\sigma(n),n} = [A]_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot [A]_{n,\tau(n)}$. Poiché $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ abbiamo l'uguaglianza dei determinanti.

Corollario 13. *Il determinante può essere calcolato con lo sviluppo di Laplace su ogni riga, oltre che su ogni colonna.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} D_n(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{j,i} D_{n-1}(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [{}^{\tau}A]_{i,j} D_{n-1}\left({}^{\tau}(A_{j,i})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [{}^{\tau}A]_{i,j} D_{n-1}\left(({}^{\tau}A_{i,j})_{j,1}\right) = D_n({}^{\tau}A) \end{aligned}$$

Riflessione 10 (Interpretazione geometrica). Sia $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \ni A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Sia P il parallelogramma che ha vertici: $(0,0), (a,b), (c,d), (a+c, b+d)$. Possiamo supporre $a > 0$. Calcoliamo l'area di P.

- Primo caso: $b = 0, d > 0$; in questo caso abbiamo che: area $P = ad = D_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = D_2(A)$.
- Secondo caso: $b = 0, d < 0$; facciamo una riflessione rispetto all'asse delle x e vediamo che l'area non cambia: area $P = -ad = -D_2(A)$.

Sia P un generico parallelogramma con un vertice in $(0,0)$ allora si può ruotare P attorno all'origine fino a che uno dei lati non combacia con il semiasse positivo delle x. Si può dire che $P = R_\theta(P')$ dove R_θ è la rotazione attorno all'origine dell'angolo θ e dove P' è il parallelogramma che abbiamo detto con un lato sull'asse delle x. Vediamo come agisce R_θ su un punto: $R_\theta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
Allora $R_\theta \left(\begin{smallmatrix} a' \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ e $R_\theta \left(\begin{smallmatrix} c' \\ d' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$; quindi $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = R_\theta \left(\begin{smallmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)$.
Visto inoltre che $D_n(R_\theta) = 1$ abbiamo che $D_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = D_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\right) = D_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)\right) = a'd'$. Abbiamo quindi trovato l'area: area P=area $P' = \left| a'd' \right| = \left| D_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) \right|$

Teorema 9 (Regola di Cramer)**.** *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ *tale che* $D_n(A) \neq 0$*. Allora il sistema lineare* $AX = B$ *ha un'unica soluzione; questa soluzione è:* $(y_1, \ldots, y_n)$ *dove,* $\forall i_1^n$*,* $y_i = \frac{D_n(B_i)}{D_n(A)}$*, con* $B_i = \left(A^1, \ldots, A^{i-1}, B, \ldots, A^n\right)$.

Dimostrazione. $(y_1, \ldots, y_n)$ è soluzione di $AX = B \Leftrightarrow y_1 A^1 + \ldots + y_n A^n = B$.
Allora $D_n(B_i) = D_n \left(A^1, \ldots, A^{i-1}, \sum_{j=1}^{n} y_j A^j, \ldots, A^n \right) = \sum_{j=1}^{n} y_j D_n(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^j, \ldots) =$

$y_i D_n(A)$. L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che, se $j \neq i$ allora ci sono due colonne uguali nella matrice e quindi il determinante è zero.

Proposizione 19 (Calcolo dell'inversa)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ tale che $D_n(A) \neq 0$. Allora*

$$\left[A^{-1}\right]_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{D_{n-1}(A_{j,i})}{D_n(A)}$$

Dimostrazione. Vediamo che $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \ni B \mid [B]_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{D_{n-1}(A_{j,i})}{D_n(A)}$ è l'inversa di A.

$$[AB]_{h,k} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{h,i} [B]_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{h,i} \cdot \frac{D_{n-1}(A_{k,i})}{D_n(A)}$$

Se $h = k$ la sommatoria è quella degli elementi della riga h per i loro complementi algebrici. Il numeratore diventa quindi la formula di Laplace per riga, però ogni termine viene diviso per $D_n(A)$, quindi alla fine ho come numeratore la formula di Laplace per il determinante e al denominatore il determinante; ottengo quindi 1. Se invece $h \neq k$ creo una matrice che al posto della riga h ha la riga k, quindi il suo sviluppo secondo la k-esima riga è 0.

Esercitazione

Esercizio 14. Sia $\mathbb{K}$ campo; fissiamo $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e consideriamo l'applicazione $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{f_A} \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ con la legge: $f_A(X) = AX$.
Cerchiamo di trovare il rango di f_A e quindi anche la dimensione del Ker.

Dimostrazione. Cerchiamo di trovare una base buona: una base che ci permetta di trovare una matrice associata decente, in questo modo potremo velocemente calcolare la dimensione che ci serve.
Proviamo con $f_A(E_{i,j}) = A \cdot E_{i,j} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & A^i & 0 \end{array}\right)$ con A^i come j-esima colonna. Come risultato iniziale non sembra male; provo quindi a prendere come base di $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ $B = \{E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,n}\}$; ma facendo la matrice associata otteniamo:

$$\mathfrak{M}_{B,B}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1} & 0 & \\ 0 & a_{1,1} & * \\ 0 & \cdots & \\ \hline a_{2,1} & 0 & \\ 0 & a_{2,1} & * \\ 0 & \cdots & \end{array}\right)$$

Questa matrice (oltre ad essere qui scritta male) non è pratica per individuare il Ker, proviamo quindi a vedere se riusciamo a trovarne una più semplice. Proviamo con $B' = \{E_{1,1}, E_{2,1}, \ldots, E_{n,n}\}$. Abbiamo a questo punto che

$$\mathfrak{M}_{B',B'}(f_A) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata è fatta di n matrici A poste lungo la diagonale della matrice. A questo punto possiamo dire che $rk(\mathfrak{M}_{B',B'}(f_A)) = n \cdot rk(A)$. Quindi $dim\ Ker\ f = n^2 - nrk(A) = n(n - rk(A))$.

Vediamo un altro modo per fare l'esercizio:
Sia $X \in Ker\ f_A \Rightarrow AX = 0$, ma $AX = \left(AX^1 \middle| \dots \middle| AX^n \right) \Rightarrow X^1, \dots, X^n \in Ker\ L_A$. Quindi $Ker\ f_A = \left\{ X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \middle| \forall i_1^n,\ X^i \in Ker\ L_A \right\}$.
A questo punto cerchiamo una base di f_A. Sia $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base di L_A; allora $\forall i_1^i,\ X^i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} v_j \Rightarrow \left(0 \middle| X^i \middle| 0 \right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} \left(0 \middle| v_j \middle| 0 \right)$.
Quest'ultima matrice rappresenta un generico vettore della base di $Kerf_A$, abbiamo infatti una matrice vuota tranne per la i-esima colonna, occupata dal vettore v_j della base del Ker di L_A; sappiamo che ogni matrice nel $Ker\ f_A$ ha le colonne che sono combinazione lineare dei vettori della base del $Ker\ f_A$, per questo tutte le matrici della forma di quest'ultima, al variare di j_1^k e di i_1^n appartengono al $Ker\ L_A$ e inoltre lo generano, perché abbiamo anche visto che una matrice del $Ker\ L_A$ deve essere una matrice in questa forma. Ci chiediamo ora se queste matrici sono linearmente indipendenti.

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}} \alpha_{i,j} \left(0 \middle| v_j \middle| 0 \right) = 0_{\mathcal{M}(n,\mathbb{K})} \Rightarrow \left(\dots \middle| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} v_j \middle| \dots \right) \Rightarrow \forall i_1^n,\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} v_j = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \alpha i, j = 0\ \forall i_1^n, j_1^k$$

L'ultima implicazione è dovuta al fatto che i vari v_j sono linearmente indipendenti poiché sono base. Quindi $dim\ Ker\ f_A = nk = ndim\ Ker\ L_A$.

Esercizio 15. Sia $\mathbb{K}$ campo; abbiamo definito l'applicazione multilineare $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{D_n} \mathbb{K}$. Abbiamo visto che per calcolare D_n (scritto a volte anche det) si può utilizzare lo sviluppo di Laplace secondo una riga o una colonna:

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} [A]_{i,h} D_{n-1}(A_{i,h}) = D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} [A]_{h,i} D_{n-1}(A_{h,i})$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Verifichiamo che lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga e la prima colonna è uguale.

- Sviluppo secondo la prima riga.

$$D_3 \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 2 \quad -1} \\ -3 \quad 0 \quad 4 \\ 1 \quad -3 \quad 1 \end{pmatrix} = 2D_2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2D_2 \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1D_2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 24+14-9 = 29$$

- Sviluppo secondo la prima colonna.

$$D_3\left(\begin{array}{|c|cc} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = 2D_2\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 3D_2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 1D_2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 24-3+8 = 29$$

Ricordiamoci velocemente come le operazioni elementari per riga dell'algoritmo di Gauss influenzano il determinante.

- Scambio di righe, colonne $\longrightarrow$ Il determinante cambia segno.

- Moltiplicazione di riga o colonna per λ $\longrightarrow$ Il determinante viene moltiplicato per λ.

- Sommare a una riga/colonna una combinazione lineare delle altre righe/colonne $\longrightarrow$ Il determinante non cambia.

Proposizione 20 (Determinante di Vandermonde)**.**

$$D_n\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le j<i} (a_i - a_j)$$

Dimostrazione. Chiamiamo A la matrice in questione. L'idea è di sottrarre ad ogni riga la riga precedente, moltiplicata per a_1; queste operazioni non cambiano il determinante della matrice, visto che sono operazioni elementari di terzo tipo.

$$\begin{aligned} D_n(A) &= D_n\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_n(a_n-a_1) \\ \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{pmatrix} \\ &= 1D_{n-1}\begin{pmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_n(a_n-a_1) \\ \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{pmatrix} \\ &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)D_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui la tesi per ipotesi induttiva. Infatti $(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i}(a_i-a_j) = \prod_{1\le j<i}(a_i-a_j)$.

Esempio 6. Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ una matrice invertibile. Sappiamo che $\forall i_1^n, j_1^n$

$$\left[A^{-1}\right]_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{D_{n-1}A_{j,i}}{D_n(A)}$$

Vediamone un esempio.
Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ la matrice dell'Esercizio 15. Sappiamo già che $D_n(A) = 29$. Calcoliamo l'inversa.

- $\left[A^{-1}\right]_{1,1} = \frac{1}{29} D_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 12$

- $\left[A^{-1}\right]_{1,2} = -\frac{1}{29} D_2 \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$

- $\left[A^{-1}\right]_{1,2} = \frac{1}{29} D_2 \left(\begin{smallmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 7$

Gli altri sono conti, comunque si ottiene: $A^{-1} = \frac{1}{29} \left(\begin{smallmatrix} 12 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & -5 \\ 9 & 8 & 6 \end{smallmatrix}\right)$

Esempio 7. Vediamo adesso come trovare il rango di una matrice utilizzando l'ordine massimo dei minori invertibili. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & \lambda \\ -3 & -1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

Troviamone il rango.

- Esistono minori di ordine 1 invertibili?

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \boxed{1} & \lambda \\ -3 & 1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

  Si. Quindi $rk(A) \geq 1$.

- Esistono minori di ordine 2 invertibili?

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}} \\ -3 & \\ \lambda & 2\lambda \quad \lambda \end{pmatrix}$$

  Se $\lambda \neq -1$ il minore evidenziato è invertibile e quindi la matrice ha rango ≥ 2; se $\lambda = -1$ consideriamo il minore in basso a sinistra; quello è invertibile se $\lambda = -1$; quindi per ogni valore di λ c'è almeno un minore di ordine 2 invertibile.

- Esistono minori di ordine 3 invertibili? A questo punto dobbiamo calcolarci il determinante della matrice: c'è un unico minore invertibile.

$$\begin{aligned}
D_3(A) = D_3 \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & \lambda \\ -3 & -1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix} &= \lambda D_3 \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & \lambda \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda D_3 \begin{pmatrix} -1 & 1-2\lambda & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda D_2 \begin{pmatrix} -1 & 1-2\lambda \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \lambda(7-8\lambda)
\end{aligned}$$

Quindi $rk(A) = 3 \Leftrightarrow \lambda(7-8\lambda) \neq 0$.

Lezione 19

Teoria

Facciamo velocemente il punto della situazione; se dobbiamo analizzare applicazioni lineari possiamo analizzare le matrici che le inducono, in particolare, scegliendo accuratamente le basi, possiamo ottenere matrici associate abbiastanza decenti e a quel punto tutto si riduce a risolvere un sistema lineare. Anche per questo abbiamo un metodo risolutivo: considerare la matrice completa. Se abbiamo infatti il sistema $AX = B$ sappiamo che questo è risolubile solo se A e $A' = (\, A \vdots B \,)$ hanno lo stesso rango (lo stesso numero di pivot). In particolare se A è quadrata e il suo determinante è diverso da zero abbiamo un metodo efficace per trovare la soluzione. Quindi sappiamo come vedere se un sistema lineare è risolubile grazie al rango.
Il rango è il massimo ordine dei minori invertibili; resta il problema del 'massimo ordine' (e di trovare esplicitamente le soluzioni una volta provato che esistono). Supponiamo quindi che $rk(A) = rk(A') = r$; diciamo M un minore di A di ordine r invertibile; sappiamo che questo M esiste e, poiché è invertibile, tutte le sue righe e le sue colonne sono linearmente indipendenti; sappiamo anche che M ha il massimo numero di righe indipendenti: tutte le altre sono dipendenti da queste, poiché se ce ne fosse un'altra indipendente il rango della matrice sarebbe $> r$. Quindi le r righe che concorrono a formare r sono linearmente indipendenti e tutte le altre righe dipendono da esse. Quindi il sistema rappresentato da A è equivalente al sistema di r righe costituito dalle righe che concorrono a formare M.
Quindi i passaggi che vengono fatti sono: trovare il minore invertibile di ordine massimo, togliere dalla matrice le righe che non contribuiscono a formarlo, spostare a destra le colonne che non contribuiscono a formare M e considerarle come valori parametrici dipendenti da certe variabili e risolvere il sistema che ha M come matrice utilizzando Cramer.
In pratica il nostro problema maggiore adesso è trovare un minore invertibile di ordine massimo.

Definizione 9 (Orlato)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e M minore di A di ordine r; si dice orlato di M un minore M' di A di ordine $r + 1$ che abbia come sottomatrice M (cioè un minore di A ottenuto da M aggiungendo una riga e una colonna).

Teorema 10 (Criterio dei minori orlati)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ e B un minore di A di ordine n invertibile (sappiamo quindi solo che $rk(A) \geq n$). Se ogni orlato di B non è invertibile (ha determinante zero) allora $rk(A) = n$.*

Dimostrazione. Supponiamo che B occupi le prime n righe e le prime n colonne. Per ipotesi $D_n(B) \neq 0 \Rightarrow A_1, \ldots, A_n$ sono linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che $\forall i_{n+1}^{p} A_i \in Span\left(\{A_1, \ldots, A_n\}\right)$.
Sia $C_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ \ddots \\ A_n \\ A_i \end{pmatrix}$. Le colonne di B sono linearmente indipendenti per ipotesi, quindi anche le prime n colonne di C_i. Inoltre $\forall j_{n+1}^{q}$ abbiamo che $D_{n+1}\left(\begin{array}{c|c} B & C^j \\ \hline Ai & \end{array}\right)$ cioè il determinante di un orlato di B è uguale a zero, per ipotesi. Quindi abbiamo che tutte le altre colonne di C_i sono linearmente dipendenti dalle prime n; ma i era un numero qualsiasi; quindi per qualsiasi altra riga di A io voglia scegliere ho sempre che questa è linearmente dipendente dalle prime n; infatti la matrice che si viene a creare ha rango n e quindi ha solo n righe linearmente indipendenti. Quindi nessuna riga di A è linearmente indipendente dalle prime n e quindi il rango della matrice è effettivamente n.

Definizione 10 (Codimensione e funzionale)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e H un sottospazio vettoriale di V. Si dice codimensione di $H = dim\ V - dim\ H$.
Si dice funzionale un'applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}$.

Definizione 11 (Spazio duale)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ si dice spazio duale di V. Gli elementi di V^* sono detti funzionali lineari.

Definizione 12 (Delta di Kronecker)**.** Si dice Delta di Kronecker l'applicazione $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\delta_{i,j}} \mathbb{K}$ tale che: $\begin{cases} \delta_{i,j} = 0 \Leftrightarrow i \neq j \\ \delta_{i,j} = 1 \Leftrightarrow i = j \end{cases}$

Proposizione 21. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Sia $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ dove $\forall i_1^n,\ v_i^* = V \xrightarrow{v_i^*} \mathbb{K}$ con la legge $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$. Allora B^* è una base di V^*, detta base duale di B.*

Dimostrazione.

- Si dimostra intanto che $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti. $a_1 v_1^* + \ldots + a_n v_n^* = 0_{V^*} \Rightarrow \forall j_1^n,\ (a_1 v_1^* + \ldots + a_n v_n^*)(v_j) = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow a_1 v_1^*(v_j) + \ldots + a_n v_n^*(v_j) = 0_{\mathbb{K}}$. Ma l'unico temine che sopravvive è $a_j v_j^*(v_j) = a_j = 0_{\mathbb{K}}$, per come sono stati definiti i funzionali della base. Da questo deduciamo che $\forall j_1^n,\ a_j = 0_{\mathbb{K}}$, quindi abbiamo la tesi perché possiamo fare la stessa cosa $\forall j_1^n$.

- $v_1^*, \ldots, v_n^*$ generano V^*. Sia $f \in V^*$, devo cercare $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \mid f = a_1 v_1^* + \ldots + a_n v_n^*$ e quindi $\forall j_1^n,\ f(v_j) = (a_1 v_1^* + \ldots + a_n v_n^*)(v_j) = a_j$. Basta quindi prendere $a_1 = f(v_1), \ldots, a_n = f(v_n)$.
  Abbiamo quindi che $[f]_{B^*} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \cdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}$.

Esempio 8. Prendiamo il caso di $V = \mathbb{K}^n$ con la base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. $e_1^*(x_1, \ldots, x_n) = e_1^*(e_1 x_1, \ldots, e_1 x_n) = x_1$. $\forall i_1^n, e_i^*(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Definizione 13. Se B è base di V, $V \xrightarrow{\phi_B} V^*$ è l'unico isomorfismo tale che $\forall i_1^n\ \phi_B(v_i) = v_i^*$.

Esercizio 16. Determinare l'unico isomorfismo $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}(1,n,\mathbb{K})$ che rende commutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi_B} & V^* \\ {\scriptstyle [\ ]_B}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{M}_{B,\{1\}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M}(1,n) \end{array}$$

Dimostrazione. Sia $V \ni v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, allora $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_B$.
$\mathfrak{M}_{B,\{1\}}(\phi_B(v)) = \left(\phi_B(v)(v_1) \middle| \ldots \middle| \phi_B(v)(v_n) \right)$. Inoltre $\forall j_1^n$, $\phi_B(v)(v_j) = \phi_B(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n)(v_j) = (x_1v_1^* + \ldots + x_nv_n^*)(v_j) = x_j$.
Quindi $\mathfrak{M}_{B,\{1\}}(\phi_B(v)) = (x_1, \ldots, x_n) = {}^{\tau}X$.

Definizione 14 (Biduale)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. Si definisce spazio biduale di V: $V^{**} = (V^*)^* = Hom(V^*, \mathbb{K})$.

Riflessione 11. Se $dim\ V = n$ avremo allora che $dim\ V^* = n$ e quindi anche $dim\ V^{**} = n$. Quindi V e V^{**} sono isomorfi. Un modo di costruire un isomorfismo tra V e V^{**} è utilizzare una base di V; sia B una base di V, allora:

$$V \xrightarrow{\phi_B} V^* \xrightarrow{\phi_{B^*}} V^{**}$$

È un isomorfismo facile da trovare. Ma esiste un isomorfismo $V \longleftarrow V^{**}$ che non dipende dalla scelta di una base.

Teorema 11. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.*

1) *Si consideri l'applicazione $V \xrightarrow{\psi_V} V^{**}$ con la legge: $\psi_V(v) = V^* \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ (che va da g a $g(v)$). Allora ψ_V è un isomorfismo (canonico).*

2) *$\forall B$ base di V, $\phi_{B^*} \circ \phi_B = \psi_V$*

Dimostrazione. 1) Dimostriamo che ψ_V è un isomorfismo e che è canonico.

- $\forall v \in V$, $V^* \xrightarrow{\psi_V(v)} \mathbb{K}$ è lineare. Infatti $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in V$ abbiamo che:
  $\psi_V(v)(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v) = \lambda\psi_V(v)(f) + \mu\psi_V(v)(g)$.
- $V \xrightarrow{\psi_V} V^{**}$ è lineare. Quello che ci stiamo chiedendo è se è vero che $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V, \forall g \in V^*$, $\psi_V(a_1v_1 + a_2v_2)(g) = (a_1\psi_V(v_1) + a_2\psi_V(v_2))(g)$. Vediamo che è così.
  $\psi_V(a_1v_1+a_2v_2)(g) = g(a_1v_1+a_2v_2) = a_1g(v_1)+a_2g(v_2) = a_1\psi_V(v_1)(g)+ a_2\psi_V(v_2)(g) = (a_1\psi_V(v_1) + a_2\psi_V(v_2))(g)$.
- ψ_V è biunivoca. Poiché $dim\ V = dim\ V^{**}$ basta vedere che l'applicazione è iniettiva. Sia $v \in Ker\ \psi_V$, cioè $\psi_V(v) = 0_{V^{**}}$, allora $\forall g \in V^*$, $\psi_V(v)(g) = g(v) = 0_{\mathbb{K}}$, se fosse $v \neq 0_V$ troverei una contraddizione perché $\exists V \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ lineare tale che $g(v) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Dunque $Ker\ \psi_V = \{0_V\}$

2) Basta far vedere che $\forall i_1^n$, $(\phi_{B^*} \circ \phi_B)(v_i) = \psi_V(v_i)$. Si ha che $(\phi_{B^*} \circ \phi_B)(v_i) = \phi_{B^*}(\phi_B(v_i)) = \phi_{B^*}(v_i^*) = v_i^{**}$. Da cui $(\phi_{B^*} \circ \phi_B)(v_i)(v_j^*) = v_i^{**}(v_j^*) = \delta_{ij}$. Inoltre $\psi_V(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$.

Definizione 15 (Annullatore)**.** Sia V uno spazio vettoriale e $S \subseteq V$ un sottoinsieme (non obbligatoriamente sottospazio) di V. Si definisce annullatore di S l'insieme:

$$Ann\ S = \{f \in V^* \mid f|_S = 0\}$$

Proposizione 22. *1) $\forall S \subseteq V$ $Ann\ S$ è sottospazio vettoriale di V^*.*

2) Se $S \subseteq T$ allora $Ann\ T \subseteq Ann\ S$.

3) Se U è sottospazio vettoriale di V di dimensione k, allora $dim\ Ann\ U = n - k$.

4) $\forall f \in V^*$, $Ann\ f = \psi_V(Ker\ f)$.

5) $\forall U$ sottospazio vettoriale di V, $Ann(Ann\ U) = \psi_V(U)$.

Dimostrazione. 3) Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U. La completo a $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ base di V. Provo che $\{v_{k+1}^*, \dots, v_n^*\}$ è base di $Ann\ U$.

- Vediamo intanto che $v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \in Ann\ U$: $\forall j_{k+1}^n, \forall u \in U$, $u = x_1u_1 + \dots + x_ku_k$, $v_j^*(u) = x_1v_j^*(u_1) + \dots + x_kv_j^*(u_k) = 0$.
- $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti perché fanno parte della base duale.
- $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$ generano $Ann\ U$: $\forall f \in Ann\ U \subseteq V^*$, $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid f = a_1u_1^* + \dots + a_ku_k^* + a_{k+1}v_{k+1}^* + \dots + a_nv_n^*$.
  Poiché $f \in Ann\ U$, $f(u_i) = 0 \forall i_1^k$, quindi $\forall i_1^k$, $a_i = 0$; dunque $f = a_{k+1}v_{k+1}^* + \dots + a_nv_n^*$.

4) $Ann\ f = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0\} = \{\psi_V(x) \in V^{**} \mid \psi_V(x)(f) = f(x) = 0\} = \psi_V(\{x \in V \mid f(x) = 0\}) = \psi_V(Ker\ f)$.

5) $\psi_V(U) \subseteq Ann(Ann\ U)$, infatti $\forall x \in U$, $\psi_V(x)|_{Ann\ U} = 0$, perché $\forall f \in Ann\ U$, $\psi_V(x)(f) = f(x) = 0$.
Inoltre vale l'uguaglianza perché $dim\ \psi_V(U) = dim(U) = dim\ Ann(Ann\ U))$.

Esercitazione

Esercizio 17. Risolvere il sistema $AX = b$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Sappiamo che $D_3(A) = \frac{1}{29}$, quindi $rk(A) = 3$ e il sistema ha una soluzione unica. Abbiamo già trovato anche A^{-1}.

Dimostrazione. Per il Teorema di Cramer (9) sappiamo che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{D_3(A)} \begin{pmatrix} D_3(b \mid A^2 \mid A^3) \\ D_3(A^1 \mid b \mid A^3) \\ D_3(A^1 \mid A^2 \mid b) \end{pmatrix}$.

Abbiamo quindi che:

- $x = \frac{1}{29} D_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}(-5) D_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{29}$.

- $y = \frac{1}{29} D_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}(15) = \frac{15}{29}$.

- $z = \frac{11}{29}$.

Esercizio 18. Troviamo le soluzioni di $AX = b$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Questa matrice non è invertibile. Vediamo intanto se il sistema ha soluzioni vedendo se $rk(A) = rk(A \mid b)$. Si trova facilmente un minore di ordine 2 invertibile in A e si vede che il determinante di A è zero, quindi $rk(A) = 2 \Rightarrow dim\ Sol = 1$, sempre che le soluzioni ci siano. $rk(A \mid b) = rk \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) = 2$, si dice che il rango è due perché si vede che $D_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 0$.
Vediamo che l'ultima riga dipende dalle prime due; non ci dà quindi informazioni aggiuntive. Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ 2-z \end{pmatrix}$$

Facendo attenzione a cambiare il segno della z spostandola da sinistra a destra. A questo punto mi calcolo le soluzioni in funzione di z con Cramer. Infatti sappiamo che la dimensione delle soluzioni è uno e quindi devono essere in funzione di una variabile: z.

Esercizio 19. Sia $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cerchiamo di trovare v_1^*, v_2^*, v_3^*.
Concentriamoci intanto su v_1^*, sappiamo che $v_1^*(v_1) = 1,\ v_1^*(v_2) = v_1^*(v_3) = 0$, inoltre sappiamo che è lineare, quindi $v_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a - b + 2c = 1; v_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a + 2b - c = 0; v_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a - b + c = 0$. Dobbiamo quindi ora trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In questo modo troviamo $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = 1$. Si fa poi la stessa cosa con v_2^* e v_3^*.

Lezione 20

Teoria

Definizione 16. Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ lineare. $\forall g \in W^*$, $V \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{K}$ è lineare. Quindi è ben definita l'applicazione trasposta: $W^* \xrightarrow{{}^\tau f} V^*$ che associa a g il funzionale $g \circ f$.

Proposizione 23. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W, Z dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ lineare.*

1) *$W^* \xrightarrow{{}^\tau f} V^*$ è lineare.*

2) *${}^\tau({}^\tau f) = f$ a meno delle identificazioni $V \xrightarrow{\psi_V} V^{**}$ e $W \xrightarrow{\psi_W} W^{**}$. Ossia è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \psi_V \big\downarrow & & \big\downarrow \psi_W \\ V^{**} & \xrightarrow{{}^\tau({}^\tau f)} & W^{**} \end{array}$$

3) *Se $W \xrightarrow{h} Z$ è lineare allora ${}^\tau(h \circ f) = {}^\tau f \circ {}^\tau h$.*

4) *$Ker\ {}^\tau f = Ann(Imm\ f)$.*

5) *$Imm\ {}^\tau f = Ann(Ker\ f)$.*

6) *Se B è base di V e S è base di W allora*

$$\mathfrak{M}_{S^*,B^*}({}^\tau f) = {}^\tau(\mathfrak{M}_{B,S}(f))$$

Dimostrazione. 1) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $\forall g_1, g_2 \in W^*$ abbiamo che: ${}^\tau f(a_1 g_1 + a_2 g_2) = (a_1 g_1 + a_2 g_2) \circ f = a_1(g_1 \circ f) + a_2(g_2 \circ f) = a_1\, {}^\tau f(g_1) + a_2\, {}^\tau f(g_2)$.

2) Dobbiamo verificare che $\psi_W \circ f = {}^\tau({}^\tau f) \circ \psi_V$. Ossia che $\forall v \in V$, $(\psi_W \circ f)(v) = \left({}^\tau({}^\tau f) \circ \psi_V\right)(v)$. Quindi dobbiamo mostrare che, $\forall g \in W^*$, $(\psi_W \circ f)(v)(g) = \left({}^\tau({}^\tau f) \circ \psi_V\right)(v)(g)$.
Vediamo che entrambi sono uguali alla stessa cosa:

- $(\psi_W \circ f)(v)(g) = \psi_W(f(v))(g) = g(f(v)) = (g \circ f)(v)$.
- ${}^\tau({}^\tau f) \circ \psi_V(v)(g) = {}^\tau({}^\tau f)(\psi_V(v))(g) = (\psi_V(v) \circ {}^\tau f)(g) = \psi_V(v)({}^\tau f(g)) = \psi_V(v)(g \circ f) = (g \circ f)(v)$.

4) Mostriamo entrambe le inclusioni:

'$\subseteq$' Sia $g \in Ker\ {}^\tau f$, cioè ${}^\tau f(g) = g \circ f = 0$. Quindi $\forall f(x) \in Imm\, f,\ g(f(x)) = 0 \Rightarrow g \in Ann(Imm\ f)$.

'$\supseteq$' $g \in Ann(Imm\ f) \Rightarrow \forall x \in V,\ g(f(x)) = 0 \Rightarrow {}^\tau f(g) = 0 \Rightarrow g \in Ker\ {}^\tau f$.

5) Si deduce dal punto 4) applicato a ${}^\tau f$.

6) Siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $S = \{w_1, \dots, w_p\}$. Sia $A = \mathfrak{M}_{B,S}(f)$, $N = \mathfrak{M}_{S^*,B^*}({}^\tau f)$. Allora $N^j = \left[{}^\tau f(w_j^*)\right]_{B^*} = \begin{pmatrix} (w_j^* \circ f)(v_1) \\ \cdots \\ (w_j^* \circ f)(v_n) \end{pmatrix}$. Dunque $[N]_{ij} = (w_j^* \circ f)(v_i) = w_j^*(f(v_i))$. Ora $[f(v_i)]_S = A^i$; cioè $f(v_i) = [A]_{1i}w_1 + \dots + [A]_{pi}w_p$. Per questo possiamo concludere $w_j^*(f(v_i)) = [A]_{ji} = N_{ij}$.

Da questo possiamo trovare un'altra dimostrazione del fatto che $rk(A) = rk({}^\tau A)$. Infatti $rk({}^\tau A) = dim\ Imm({}^\tau f) = dim\ Ann(Ker\ f) = n - dim\ Ker\ f = rk(A)$.

Rappresentazioni cartesiane minimali

Sia $\mathbb{K}$ campo e W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione k. Possiamo rappresentare W in forma cartesiana, vedendolo come $Ker\ A$ con $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$.

Osservazione 12. - Posso intanto supporre $A \in \mathcal{M}(n-k, n, \mathbb{K})$, infatti $dim\ Ker\ A = k \Rightarrow rk(A) = n - k$. Quindi in A esiste un minore B invertibile di ordine $n-k$; se $\widetilde{A}$ è la matrice formata dalle $n-k$ righe di A che entrano in B allora i sistemi $AX = 0$ e $\widetilde{A}X = 0$ sono equivalenti e quindi $W = Ker\ \widetilde{A}$ con $\widetilde{A} \in \mathcal{M}(n-k, n, \mathbb{K})$.

- Supponiamo dunque $A \in \mathcal{M}(n-k, n, \mathbb{K})$. Ogni riga $A_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ determina il funzionale lineare di $(\mathbb{K}^n)^*$

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f_i} a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$$

Poiché le righe di A sono linearmente indipendenti anche i funzionali $f_1, \dots, f_{n-k}$ sono linearmente indipendenti. Inoltre $\forall i_1^{n-k},\ f_i\,|_W \equiv 0$ ossia $f_i \in Ann\ W$. Poiché $dim\ Ann\ W = n-k$ abbiamo che $\{f_1, \dots, f_{n-k}\}$ è una base di $Ann\ W$.
Da tutto questo possiamo concludere che per descrivere W in modo minimale servono $n-k$ equazioni.

Esempio 9. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ una retta passante per l'origine. r può essere rappresentata in forma cartesiana come sistema di due equazioni: $r = \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ con $f, g \in (\mathbb{R}^3)^*$. f, g sono linearmente indipendenti e formano una base di $Ann\ r$. In particolare $Ker\ f$ e $Ker\ g$ sono entrambi piani contenenti r.
Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ un piano di $\mathbb{R}^3$ contenente r. $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \phi(x,y,z) = 0 \right\}$ con

$\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$. $\phi \in Ann\ r \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\phi = \lambda f + \mu g$. La famiglia $\mathfrak{F}_r$ dei piani contenenti r è detta fascio di piani di centro r.
Dunque

$$\mathfrak{F}_r = \{\lambda f + \mu g = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}$$

Esempio 10. Sia r una retta di $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine, $P = (x_0, y_0, z_0) \in r$ e r_0 la giacitura di r. La rappresentazione cartesiana di r_0 abbiamo visto che è $r_0 = \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$, con $f, g \in (\mathbb{R}^3)^*$ quindi la rappresentazione cartesiana di r sarà $r = \begin{cases} f(x,y,z) = d_1 \\ g(x,y,z) = d_2 \end{cases}$.
Consideriamo ora un generico piano $r \subset H \subset \mathbb{R}^3$, che abbia come giacitura H_0. Allora $r_0 \subset H_0$ e quindi H_0 ha equazione $\lambda f + \mu g = 0$ per certi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Avremo quindi che, per un certo c, $H = \lambda f + \mu g = c$. Imponendo il passaggio per P_0 otteniamo: $c = \lambda f(x_0, y_0, z_0) + \mu g(x_0, y_0, z_0) = \lambda d_1 + \mu d_2$. Quindi H ha equazione $\lambda f + \mu g - (\lambda d_1 + \mu d_2) = 0$ che diventa $\lambda(f - d_1) + \mu(g - d_2) = 0$.

Esempio 11. Volendo generalizzare quanto visto negli esempi precedenti possiamo dire che se W è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n-2$ sappiamo che:

$$W = \begin{cases} \phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

con $\phi_1, \phi_2 \in (\mathbb{K})^*$. Allora tutti gli iperpiani di $\mathbb{K}^n$ contenenti W hanno equazione $\lambda\phi_1 + \mu\phi_2$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La famiglia di tali iperpiani è detta fascio di iperpiani di centro W.

Esercitazione

Esempio 12. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Sappiamo allora che $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ è una base di V^*. Sappiamo inoltre che $\forall v \in V,\ v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ abbiamo che $v_i^*(v) = a_i$. Quindi $[v]_B = \begin{pmatrix} v_1^*(v) \\ \cdots \\ v_n^*(v) \end{pmatrix}$. Inoltre sappiamo che, $\forall f \in V^*$, $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K} \mid f = \beta_1 v_1^* + \ldots + \beta_n v_n^*$. Abbiamo che $\forall i_1^n,\ f(v_i) = \beta_i$. Quindi $[f]_{B^*} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \cdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}$.

Esercizio 20. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V con $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Risolvendo un semplice sistema troviamo:

- $v_1^* \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \frac{-x+2y+3z}{3}$.
- $v_2^* \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \frac{x+y}{3}$.
- $v_3^* \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x - y - z$.

Abbiamo quindi che $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$, infatti $-\frac{1}{3}v_1+\frac{1}{3}v_2+v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Vediamo ora come trovare le coordinate di un funzionale. Sia $f \in V^*$ con la legge $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2x - y + z$. Sappiamo che $[f]_B = \begin{pmatrix}f(v_1)\\f(v_2)\\f(v_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$

Esercizio 21. Sia $V = \mathbb{R}^k[x]$, consideriamo l'applicazione $V \xrightarrow{val_a} \mathbb{R} \in V^*$ con la legge $val_a(p(x)) = p(a)$. Dimostriamo che $Span(\{val_a \mid a \in\mid a \in \mathbb{R}\}) = V^*$.

Dimostrazione. Dimostriamo intanto che $val_{a_1}, \ldots, val_{a_h}$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow a_1, \ldots, a_h$ sono diverse.

'$\Rightarrow$' Ovvia la contronominale.

'$\Leftarrow$' Sia $B = \{1, x, \ldots, x^k\}$ una base di V e $B' = \{1\}$ base di $\mathbb{R}$. Consideriamo l'isomorfismo $V^* \xrightarrow{\mathfrak{M}_{B,B'}} \mathcal{M}(1, k, \mathbb{R})$ con la legge: $\mathfrak{M}_{B,B'}(val_a) = (1, a, a^2, \ldots, a^{k-1})$. Sappiamo che $val_{a_1}, \ldots, val_{a_h}$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \mathfrak{M}_{B,B'}(val_{a_1}), \ldots, \mathfrak{M}_{B,B'}(val_{a_h})$. Quindi noi ci chiediamo se

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_h\\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_h^2\\ \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \ldots & a_h^{k-1}\end{pmatrix} = h$$

Questo è vero se e solo se

$$D_n\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2\\ \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1}\end{pmatrix} \neq 0$$

E noi sappiamo che è così perché il determinante di quella matrice è $\prod_{1\leq j<i} (a_i - a_j)$ e noi sappiamo per ipotesi che le varie a_i sono diverse tra di loro.

Esercizio 22. Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Sia $f \in V^*$, allora $dim\ Ker\ f = n$ se $f = 0_{V^*}$, altrimenti $dim\ Ker\ f = n-1$. Prendiamo un'altra $g \in V^*$, allora $Ker(g) \subseteq Ker(f) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{K} \mid f = \lambda g$.

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' Ovvio.

'$\Rightarrow$'
- Se $f = 0$ $\lambda = 0$ funziona.
- $f \neq 0 \Rightarrow dim\,Ker\,f = n-1 \Rightarrow dim\,Ker\,g = n-1 \Rightarrow Ker\,f = Ker\,g$. Prendiamo $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base di $Ker\ f = Ker\ g$ e completiamola a base di V con v_n. f e g differiscono tra di loro solamente sull'azione rispetto a un vettore: v_n. Quindi, visto che i due funzionali non sono nulli, abbiamo $f(v_n) \neq 0_{\mathbb{K}} \neq g(v_n)$; prendiamo allora $\lambda = \frac{f(v_n)}{g(v_n)}$. Abbiamo a questo punto $\forall i_1^{n-1} f(v_i) = \lambda g(v_i) = 0_{\mathbb{K}}$. Inoltre $f(v_n) = \lambda g(v_n)$. Quindi abbiamo l'uguaglianza tra i due funzionali.

Questo esercizio ci permette molto facilmente di dimostrare alcune interessanti proprietà.

Proposizione 24. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e $f, g \in V^*$. Allora*

- $Ker\ f = Ker\ g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f = \lambda g$.
- *f, g sono linearmente indipendenti* $\Leftrightarrow Ker\ f \neq Ker\ g \Leftrightarrow dim(Ker\ f \cap Ker\ g) = n - 2$.

Proposizione 25. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e $Y \subseteq V$ un generico sottoinsieme. Allora abbiamo definito*

$$Ann\ Y = \{f \in V^* \mid f(v) = 0,\ \forall v \in Y\} = \{f \in V^* \mid Y \subseteq Ker\ f\}$$

Alcune proprietà dell'annullatore:

1) $Ann\ Y = Ann\ (Span(Y))$.
2) *Sia* $f \in V^*$, $Ann(Ker\ f) = Span(\{f\})$.
3) *Siano U, W sottospazi vettoriali di V.*
   a) $Ann(U + W) = Ann\ U \cap Ann\ W$.
   b) $Ann(U \cap W) = Ann\ U + Ann\ W$.
4) *Sia Z sottospazio vettoriale di V^*;* $Z = Ann\left(\bigcap_{f \in Z} Ker\ f\right)$.
5) $f_1, \ldots, f_h \in V^*$ *sono linearmente indipendenti* $\Leftrightarrow dim\ (Ker\ f_1 \cap \ldots \cap Ker\ f_h) = dim\ V - h$. *Questo ci dice anche che $\{f_1, \ldots, f_n\}$ è base di V^* solo se l'intersezione dei loro Ker è $\{0\}$.*

Dimostrazione. 2) $f \neq 0 \Rightarrow dim\ Ker\ f = n - 1 \Rightarrow dim\ Ann(Ker\ f) = 1$; ma $f \in Ann(Ker\ f)$ ed è un vettore non nullo, quindi $Span(\{f\}) = Ann(Ker\ f)$.

a) Dobbiamo mostrare entrambe le inclusioni:
   '$\subseteq$' $U \subseteq U + W \supseteq W \Rightarrow Ann\ U \supseteq Ann(U + W) \subseteq W \Rightarrow Ann(U + W) \subseteq Ann\ U \cap Ann\ W$.
   '$\supseteq$' $f \in Ann\ U \cap Ann\ W \Rightarrow f(U) = \{0\} = f(W) \Rightarrow f(U + W) = f(U) + f(W) = \{0\} \Rightarrow f \in Ann(U + W)$.

b) La stessa cosa:
   '$\supseteq$' $U \supseteq U + W \subseteq W \Rightarrow Ann\ U \subseteq Ann(U + W) \supseteq W \Rightarrow Ann(U \cap W) \supseteq Ann(U) + Ann(W)$
   '$\subseteq$' Questa inclusione è falsa in dimensione infinita. $dim\ (AnnU + AnnW) = dim\ Ann\ U + dim\ Ann\ W - dim\ (Ann\ W \cap Ann\ U) = dim\ V - dim\ U + dim\ V - dim\ W - dim\ Ann(U + W) = dim\ V - dim\ (U \cap W) = dim\ Ann(U \cap W)$.

4) Siano $f_1, \ldots, f_k$ generatori di Z. $Z = Ann\left(\bigcap_{f \in Z} Ker\ f\right) = Ann\left(\bigcap_{i_1}^{k} Ker\ f_i\right) =$
$Ann\ Ker\ f_1 + \ldots + Ann\ Ker\ f_k = Span(f_1) + \ldots + Span(f_k) = Z.$

5) $dim\ \left(\bigcap_{i=1}^{k} Ker\ f_i\right) = dim\ V - h \Leftrightarrow dim\ Ann\left(\bigcap_{i=1}^{h} Ker f_i\right) = h \Leftrightarrow$
$dim\ Span(\{f_1, \ldots, f_h\}) = h \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_h$ linearmente indipendenti.

Lezione 21

Teoria

Coniugio e similitudine

Osservazione 13. Siano V, W degli spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f=L_A} W$, $V \xrightarrow{g=L_B} W$ delle applicazioni lineari. Abbiamo visto il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f", "L_A"'] & W \\ V \arrow[u, "h", "L_M"'] \arrow[r, "L_B", "g"'] & W \arrow[u, "L_N", "l"'] \end{tikzcd}$$

Sappiamo che $g \underset{SD}{\equiv} f \Leftrightarrow g = l^{-1} \circ f \circ h$ e questo nelle matrici si esprime in $A \underset{SD}{\equiv} B \Leftrightarrow B = N^{-1}AM$.
Ma cosa succede se $V = W$ e imponiamo che gli automorfismi di partenza e di arrivo siano gli stessi? Esaminiamo cioè la situazione in cui:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f", "L_A"'] & V \\ V \arrow[u, "h", "L_M"'] \arrow[r, "L_B", "g"'] & V \arrow[u, "L_M", "h"'] \end{tikzcd}$$

Definizione 17 (Coniugio e similitudine)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (di dimensione finita).

- $f, g \in End(V)$ si dicono coniugati (e si scrive $f \sim g$) se $\exists h \in Aut(V) \mid g = h^{-1} \circ f \circ h$.

- $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dicono simili (e si scirve $A \sim B$) se $\exists M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid B = M^{-1}AM$.

Osservazione 14. Coniugio e similitudine sono relazioni di equivalenza (un caso particolare di SD-equivalenza). Notiamo alcune cose:

a) $A \sim B \Leftrightarrow L_A \sim L_B$.

b) Siano $f, g \in End(V)$, allora sono equivalendi i seguenti fatti:

- $f \sim g$.
- $\forall B$ base di V, $\mathfrak{M}_B(f) \sim \mathfrak{M}_B(g)$.
- $\exists B, B'$ basi di $V \mid \mathfrak{M}_B(f) = \mathfrak{M}_{B'}(g)$.

c) $f \sim g \Rightarrow f \underset{SD}{\equiv} g \Rightarrow rk(f) = rk(g)$. Quindi il rango è un invariante per coniugio.

d) $A \sim B \Rightarrow A \underset{SD}{\equiv} B \Rightarrow rk(A) = rk(B)$. Il rango è anche un invariante per similitudine.

Abbiamo definito una relazione di equivalenza, sembra quindi sensato chiederci la natura di $End(V)/_\sim$ e di $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})/_\sim$. Per ora comunque continuiamo a cercare invarianti di queste relazioni, visto che la SD-equivalenza non è un sistema completo di invarianti né per la similitudine né per il coniugio.

Proposizione 26. *Sia $\mathbb{K}$ campo e $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$; $A \sim B \Rightarrow D_n(A) = D_n(B)$; cioè il determinante è un invariante per similitudine.*

Dimostrazione. $A \sim B \Rightarrow \exists M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \mid B = M^{-1}AM \Rightarrow D_n(B) = D_n(M^{-1})D_n(A)D_n(M) \Rightarrow D_n(B) = \frac{1}{D_n(M)}D_n(A)D_n(M) = D_n(A)$.

Corollario 14. *Se $\mathbb{K}$ è infinito ci sono anche infinite classi di similitudine, una per ogni valore del determinante.*

Definizione 18 (Determinante (applicazioni))**.** Sia V uno spazio vettoriale, B una sua base e $f \in End(V)$.

$$det(f) \overset{def.}{=} det\ \mathfrak{M}_B(f)$$

Questa definizione è ben posta, sia infatti S un'altra base di V, allora $\mathfrak{M}_B(f) \sim \mathfrak{M}_S(f) \Rightarrow det\ \mathfrak{M}_B(f) = det\ \mathfrak{M}_S(f)$.

Proposizione 27. *Sia V uno spazio vettoriale e $f, g \in End(V)$. Allora $f \sim g \Rightarrow det(f) = det(g)$ (il determinante è invariante (non completo) per coniugio).*

Dimostrazione. Sia B una base di V. $f \sim g \Rightarrow \mathfrak{M}_B(f) \sim \mathfrak{M}_B(g) \Rightarrow det(f) = det(g)$.

Sottospazi particolari: gli autospazi

Definizione 19 (Autovalore e autovettore)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale e $f \in End(V)$.
$\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore per f se $\exists v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$. v si dice autovettore di λ.

Definizione 20 (Spettro)**.** Si dice spettro di f e si scrive $Sp(f)$ l'insieme degli autovalori di f.

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ è autovalore di } f\}$$

La stessa definizione vale per le matrici: sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore di A se $\exists X \in \mathbb{K}^n,\ X \neq 0 \mid AX = \lambda X$.

Osservazione 15. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f \in End(V)$.

a) v autovettore per $f \Rightarrow f(Span(\{v\})) \subseteq Span(\{v\})$. Cioè v genera una retta f-invariante. Possiamo dire, più in particolare, che ci sono due casi:

- $\lambda \neq 0 \Rightarrow f(Span\,(\{v\})) = Span\,(\{v\}) \Rightarrow v \in Imm\ f$.
- $\lambda = 0 \Rightarrow f(Span\,(\{v\})) = \{0\} \Rightarrow v \in Ker\ f$.

b) Sia v autovettore di f. L'autovalore a cui v è relativo è unico. Infatti $f(v) = \lambda v = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu)v = 0 \Rightarrow \lambda = \mu \Leftarrow v \neq 0$.

c) v è autovettore relativo a $0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow v \in Ker\ f$. Inoltre $0_{\mathbb{K}} \in Sp(f) \Leftrightarrow Ker\ f \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ non è né iniettiva né surgettiva.

Definizione 21 (Autospazio)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f \in End(V)$. Preso $\lambda \in \mathbb{K}$ si definisce autospazio di λ:

$$V_\lambda = V_\lambda(f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \{\text{autovettori di } \lambda\} \cup \{0\}$$

la stessa definizione si estende anche alle matrici sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$: $V_\lambda(A) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\}$.

Osservazione 16. a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $V_\lambda(f)$ è sottospazio vettoriale di V. Infatti $V_\lambda(f) = Ker\ (f - \lambda\ id_V)$.

b) $V_\lambda(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in Sp(f)$.

c) $f(V_\lambda(f)) \subseteq V_\lambda(f)$ cioè $V_\lambda(f)$ è f-invariante (inoltre vale l'uguaglianza se $\lambda \neq 0$).

d) $f\,|_{V_\lambda} = \lambda\ id$.

Definizione 22 (Molteplicità geometrica)**.** Sia V uno spazio vettoriale $f \in End(V)$ e $\lambda \in Sp(f)$.

$$\mu_g(\lambda, f) = dim\ V_\lambda(f)$$

si dice molteplicità geometrica di λ.
Si definisce ugualmente per le matrici $\mu_g(\lambda, A) = dim\ Ker\ (A - \lambda I)$.

Proposizione 28. *Sia V uno spazio vettoriale e $f, g \in End(V)$, se $f \sim g$ allora:*

a) $Sp(f) = Sp(g)$

b) $\forall \lambda \in Sp(f),\ \mu_g(\lambda, f) = \mu_g(\lambda, g)$.

Cioè lo spettro e le molteplicità geometriche degli autovalori sono invarianti per coniugio.

Dimostrazione. $f \sim g \Rightarrow \exists h \in GL(V) \mid g = h^{-1} \circ f \circ h$.

a) Dimostriamo solo un'inclusione, l'altra è uguale sostituendo f e g. $\lambda \in Sp(f) \Rightarrow \exists v \in V,\ v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$. Sia $w = h^{-1}(v)$. Allora $g(w) = (h^{-1} \circ f \circ h)(h^{-1}(v)) = h^{-1}(f(v)) = h^{-1}(\lambda v) = \lambda h^{-1}(v) = \lambda w$. Inoltre sappiamo che $w \neq 0$ poiché $Ker\ h = Ker\ h^{-1} = \{0\}$.

b) $h^{-1}(V_\lambda(f)) \subseteq V_\lambda(g) \Rightarrow V_\lambda(f) \subseteq h(V_\lambda(g))$. Scambiando f e g si fa la stessa cosa per l'inclusione opposta. Quindi $V_\lambda(f) = h(V_\lambda(g))$; ma h è isomorfismo quindi $dim\ V_\lambda(f) = dim\ V_\lambda(g) \Rightarrow \mu_g(\lambda, f) = \mu_g(\lambda, g)$.

Proposizione 29. *Sia V uno spazio vettoriale, B una sua base, $f \in End(V)$ e $A = \mathfrak{M}_B\,(f)$.*

a) λ *autovalore di* $f \Leftrightarrow \lambda$ *autovalore di* A.

b) $V_\lambda(A) = [V_\lambda(f)]_B$.

Dimostrazione. a) $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \exists v \in V,\ v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \in V,\ v \neq 0 \mid [f(v)]_B = \lambda[v]_B$. Quindi $[v]_B$ è un autovettore di λ per A, perché $AX = [f(v)]_B = \lambda[v]_B = \lambda X$. Quindi $\lambda \in Sp(A)$.

b) '$\subseteq$' $X \in V_\lambda(A) \Rightarrow AX = \lambda X$. Sia v il vettore di coordinate X; allora $[f(v)]_B = AX = \lambda X = [\lambda v]_B \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow v \in V_\lambda(f)$.

'$\supseteq$' $v \in V_\lambda(f) \Rightarrow f(v) = \lambda v$. Allora sia $X = [v]_B$; $AX = [f(v)]_B \Rightarrow [\lambda v]_B = \lambda x \Rightarrow X = [v]_B \in V_\lambda(A)$.

Si possono quindi calcolare autovalori, autospazi e molteplicità geometriche per f utilizzando una matrice associata a f rispetto a una qualsiasi base di V (utilizzando la stessa base in partenza e in arrivo).

Sia $\mathbb{K}$ campo, e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$; come si calcola $Sp(A)$? Sappiamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $A \Leftrightarrow Ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow (A - \lambda I)$ non è invertibile $\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \dots \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Se il determinante di questa è 0 allora λ è autovalore.

Definizione 23 (Polinomio caratteristico)**.** Il polinomio $\mathbb{K}[t] = p_A(t) = det(A - tI)$ è detto polinomio caratteristico di A. Quindi $Sp(A) = \{$ radici in $\mathbb{K}$ del polinomio caratteristico$\}$.

Osservazione 17.

- $p_A(t) = \ldots + det(A)$.
- $p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \ldots$.
- $deg\ p_A(t) = n,\ \forall t$.

Osservazione 18. Sia $\mathbb{K}$ campo e $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ nella forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ con A, C quadrate. Allora $p_M(t) = p_A(t) p_C(t)$.

$$M - tI = \begin{pmatrix} A - tI & B \\ 0 & C - tI \end{pmatrix}$$

Esercitazione

Esempio 13. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V, $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di U e $B = \{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ un suo completamento a base di V. Consideriamo $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ una base di V^*; allora $\{v_{k+1}^*, \dots, v_n^*\}$ è una base di $Ann(U)$.
Infatti abbiamo che:

- $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$ sono vettori linearmente indipendenti poiché appartenenti ad una base.
- $\dim Ann(U) = n - k$ e i vettori che abbiamo sono appunto $n - k$.

- Dobbiamo solo notare che $\forall i_{k+1}^n, j_1^k \ v_i^*(v_j) = 0$ e quindi $v_i \in Ann(U)$.

Esempio 14. Siano V, W degli spazi vettoriali di basi rispettivamente B, C e $f \in Hom(V, W)$. Consideriamo l'applicazione $W^* \xrightarrow{^\tau f} V^*$ che associa al funzionale $g \in W^*$ il funzionale $g \circ f \in V^*$. Alcune considerazioni su questa applicazione:

- $Ker\ ^\tau f = Ann(Imm\ f)$.
- $Imm\ ^\tau f = Ann(Ker\ f)$.
- $\mathfrak{M}_{C^*,B^*}(^\tau f) = {}^\tau\mathfrak{M}_{B,C}(f)$.

Esempio 15. Consideriamo l'applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ con la legge: $f\left(\begin{smallmatrix} x_1-x_2+x_4 \\ -x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1-2x_2-x_3+x_4 \end{smallmatrix}\right)$. Chiamando C_3, C_4 le basi canoniche, rispettivamente, di $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ abbiamo che $\mathfrak{M}_{C_4,C_3}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = A$. Esaminiamo ora le basi degli spazi duali indotte dalle basi canoniche:

- $C_4^* = \{f_1, \ldots, f_4\}$ sapendo che $f_i\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = x_i$.
- $C_4^* = \{g_1, g_2, g_3\}$ con la legge: $g_i\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = x_i$.

Vediamo adesso che davvero $L = \mathfrak{M}_{C_3^*,C_4^*}(^\tau f) = \mathfrak{M}_{C_4,C_3}(f)$; costruiamo questa matrice una vettore alla volta:

- $L^1 = [^\tau f(g_1)]_{C_4^*} = [g_1 \circ f]_{C_4^*}$; $g_1 \circ f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = x_1 - x_2 + x_4 = f_1 - f_2 + f_4\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$.
- $L^2 = [^\tau f(g_2)]_{C_4^*} = [g_2 \circ f]_{C_4^*}$; $g_2 \circ f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = -x_1 + x_2 + x_3 = -f_1 + f_2 + f_3\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$.
- $L^3 = [^\tau f(g_3)]_{C_4^*} = [g_3 \circ f]_{C_4^*}$; $g_3 \circ f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2f_1 - 2f_2 - f_3 + f_4\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$.

Quindi avremo $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Passiamo adesso ad esaminare il Ker di questa applicazione: $Ker\ f = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix} x_1-x_2+x_4=0 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix} x_1=x_2+x_3 \\ x_4=-x_3 \end{smallmatrix}\right\} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$. Quindi $rk(f) = 4 - 2 = 2$, troviamo quindi due colonne indipendenti e diciamo $Imm\ f = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$.

Completiamo adesso i vettori del Ker a base di $\mathbb{R}^4$. Abbiamo quindi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; possiamo vedere che questi vettori sono linearmente indipendenti vedendo che il determinante della matrice che ha questi vettori come colonne è $-1 \neq 0$. Facciamo ora un'operazione un po' più complessa: consideriamo B^*; sarà formato chiaramente da 4 vettori: $h_1, \ldots, h_4$. Ci interessano particolarmente gli ultimi due vettori, che sono base dell'annullatore di $Ker\ f$, ma preoccupiamoci intanto di trovarli; consideriamo che abbiamo $h_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ dobbiamo quindi trovare questi valori. Sappiamo che h_3 manderà ad 1 solamente se stesso, infatti $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^*$; abbiamo quindi:

- $h_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a + b = 0;$
- $h_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a = 1;$
- $h_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a + c - d = 0;$
- $h_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d = 0.$

Possiamo imporre un sistema per vedere che $a = 1,\ b = c = -1,\ d = 0$; quindi abbiamo $h_3 = f_1 - h_2 - f_3$.
Facciamo gli stessi conti con h_4 fino a trovare $h_4 = f_3 + f_4$.
Abbiamo quindi che $Ann(Ker\ f) = Span\left(\{f_1 - f_2 - f_3, f_3 + f_4\}\right)$.

Cerchiamo adesso $Imm\ {}^{\tau}f$; visto che ${}^{\tau}f(g) = g \circ f$ consideriamo intanto che avremo $g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$. Abbiamo allora che ${}^{\tau}f(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha(x_1 - x_2 + x_4) + \beta(-x_1 + x_2 + x_3) + \gamma(2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4)$. Questo ci dice intanto che $Imm\ {}^{\tau}f = Span\left(\{f_1 - f_2 + f_4, -f_1 + f_2 + f_3, 2f_1 - 2f_2 - f_3 + f_4\}\right) = Span\left(\{f_1 - f_2 + f_4, -f_1 + f_2 + f_3\}\right)$.
Abbiamo che $Ann\ Ker(f) \subseteq Imm\ {}^{\tau}f$ e inoltre le dimensioni dei due spazi vettoriali sono le stesse, quindi vale l'uguaglianza dei due insiemi.

Vediamo inoltre che $Imm\ f = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$. Completiamo questi due vettori a base di $\mathbb{R}^3$ e otteniamo $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Consideriamo inoltre $C^* = \{l_1, l_2, l_3\}$ base di $\mathbb{R}^{3*}$ associata a C. Sappiamo che l_3 è base di $Ann(Imm\ f)$ per come abbiamo scelto i vettori; troviamo quindi le sue coordinate rispetto a C_3^*. Sappiamo che:

- $l_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma' y_3$; sappiamo quanto vale il funzionale sui vettori della base C:
- $l_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha' - \beta' + 2\gamma' y_3 = 0.$
- $l_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta' - \gamma' = 0.$
- $l_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma' = 1.$

Abbiamo quindi $l_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow l_3 = -g_1 + g_2 + g_3$.

Consideriamo adesso invece $g \in Ker\,^\tau f$, in generale abbiamo ancora $g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$, dobbiamo ancora trovare α, β, γ. Sappiamo però che $^\tau f(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha(x_1 - x_2 + x_4) + \beta(-x_1 + x_2 + x_3) + \gamma(2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4) = 0$; imponiamo tutti gli x_i nulli tranne prima x_1 e poi x_2, abbiamo allora il sistema: $\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$ che è equivalente a: $\begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$. Quindi $g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \gamma(-y_1 + y_2 + y_3) \Rightarrow Ker\,^\tau f = Span\,(\{g_1 + g_2 + g_3\})$.

Possiamo a questo punto vedere che $Ker\,^\tau f = Ann(Imm\ f)$.

Lezione 22

Teoria

Polinomio caratteristico e altri invarianti

Proposizione 30. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo e* $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$*;* $A \sim B \Rightarrow p_A(t) = p_B(t)$*.*

Dimostrazione. $\exists M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid B = M^{-1}AM$. $p_B(t) = det(B - tI) = det(M^{-1}AM - t(M^{-1}IM)) = det(M^{-1}(A - tI)M) = \frac{1}{det(M)} det(A - tI) det(M) = det(A - tI)$.

Quindi il polinomio caratteristico è invariante per similitudine, quindi in particolare sono invarianti tutti i suoi coefficienti, e abbiamo visto che tra i suoi coefficienti c'è la traccia. Quindi la traccia è invariante per similitudine.

Definizione 24 (Polinomio caratteristico (applicazione))**.** Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$, B base di V e $A = \mathfrak{M}_B(f)$, poniamo $p_f(t) \overset{def.}{=} p_A(t)$. Questa definizione è ben posta: sia S base di V, allora $\mathfrak{M}_S(f) \sim \mathfrak{M}_B(f)$ e quindi i loro polinomi caratteristici sono uguali.

Corollario 15. *Sia* V *uno spazio vettoriale e* $f, g \in End(V)$*. Allora* $f \sim g \Rightarrow p_f(t) = p_g(t)$*.*

Dimostrazione. Sia B base di V. $M = \mathfrak{M}_B(f) \sim \mathfrak{M}_B(g) = N \Rightarrow p_M(t) = p_N(t) \Rightarrow p_f(t) = p_g(t)$.

Quindi il polinomio caratteristico è invariante per coniugio.

Definizione 25 (Molteplicità algebrica)**.** Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$, $\lambda \in Sp(f)$. Definiamo $\mu_a(\lambda)$ la molteplicità di λ come radice di p_f; $\mu_a(\lambda)$ si dice molteplicità algebrica di λ.

Riflessione 12. Ricapitoliamo tutti gli invarianti per coniugio e similitudine che conosciamo.

1) Rango.
2) Determinante.
3) Spettro.
4) Polinomio caratteristico.
5) Molteplicità geometrica e algebrica.
6) Traccia.

Ma questa lista è ridondante: infatti il polinomio caratteristico implica il determinante, lo spettro, la molteplicità algebrica e la traccia; inoltre la molteplicità

geometrica implica il rango. Vediamo queste implicazioni:
il determinante è il termine noto del polinomio caratteristico, quindi l'uguaglianza dei polinomi impone l'uguaglianza dei determinanti, inoltre gli autovalori di f (che costituiscono lo spettro) sono le radici del polinomio, e uguali polinomi hanno uguali radici. Dimostriamo ora che se gli spettri e le molteplicità geometriche sono uguali allora anche il rango lo è:

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale, $f, g \in End(V)$ e sia $\forall \lambda \in Sp(f),\ \mu_g(\lambda, f) = \mu_g(\lambda, g)$. Allora $Sp(f) = Sp(g) \Rightarrow rk(f) = rk(g)$:

- $0 \notin Sp(f) = Sp(g) \Rightarrow rk(f) = rk(g)$.
- $0 \in Sp(f) = Sp(g) \Rightarrow \mu_g(0, f) = \mu_g(0, g) \Rightarrow dim\ Ker\ f = dim\ Ker\ g \Rightarrow n - rk(f) = n - rk(g)$.

Questo sistema di invarianti (questi due invarianti) non sono però completi. Vediamo ora due matrici che non sono simili ma hanno la stessa molteplicità geometrica e lo stesso polinomio minimo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso abbiamo $p_A = p_B = t^4 \Rightarrow Sp(A) = Sp(B) = \{0\}$. Inoltre $\mu_g(0, A) = dim\ Ker(A) = 4 - rk(A) = 2 = \mu_g(0, B)$. Ma $A \not\sim B$, infatti $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$ ma $B^2 = M^{-1}AMM^{-1}AM \Rightarrow B^2 = M^{-1}A^2M$. Ma $L_B^2 = 0 \Rightarrow B^2 = 0$; ma $A^2 \neq 0$, infatti $A^2(e_3) = A(e_2) = e_1$.

Osservazione 19. Abbiamo usato nell'ultima riflessione che $A \sim B \Rightarrow A^k \sim B^k$, questo è vero.

Esercitazione

Esercizio 23. Sia $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare indotta dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; abbiamo quindi $\mathfrak{M}_C(f) = A \Rightarrow p_f(t) = p_A(t)$. E inoltre sappiamo che: $V_\lambda(f) = Ker(f - \lambda id_V) = Ker(A - \lambda I) = V_\lambda A$.
Vediamo adesso di trovare $p_f(t) = p_A(t)$ che sappiamo essere uguale a:

$$\begin{aligned}
det(A - tI) = det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 & 1 \\ -5 & -t & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1-t & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} &\xrightarrow[A_3 = A_3 - A_4]{A^4 = A^4 + A^3} \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 & 0 \\ -5 & -t & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -t & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} \\
= (2-t) det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -5 & -t & 2 \\ -4 & 2 & -t \end{pmatrix} &\xrightarrow[A_2 = A_2 - A_3]{A^3 = A^3 + A^2} \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -2-t & 0 \\ -4 & 2 & 2-t \end{pmatrix} \\
= (2-t)^2 det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -2-t \end{pmatrix} &= (2-t)^2(t(2+t)+1) \\
= (2-t)^2(t+1)^2 &
\end{aligned}$$

Quindi $Sp(f) = \{2, -1\}$, e inoltre $\mu_a(2) = \mu_a(-1) = 2$, questo ci dice per esempio che f è isomorfismo, visto che $\{0\} \not\subset Sp(f)$; non ci sono infatti vettori non nulli che l'applicazione moltiplica per 0.
Una cosa molto importante: NON si deve fare Gauss sulla matrice A, infatti le operazioni elementari per riga non sono invarianti per coniugio.
Cerchiamo adesso di trovare $\mu_g(-1, f)$; sappiamo che $V_{-1}(f) = Ker(f + id) = Ker(A + I)$; quindi $\mu_g(-1) = dim\ V_\lambda(f) = 4 - rk(A + I)$; troviamo quindi il rango della matrice $A + I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \\ 2 & -1 & & \end{pmatrix}$$

Il minore evidenziato è chiaramente invertibile, quindi $rk(A+I) \geq 2$, inoltre vale anche $rk(A + I) < 4$ perché il determinante della matrice è zero. Procediamo quindi orlando il minore invertibile; ci basta trovare un orlato con determinante diverso da zero. Proviamo subito cercando:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Quindi $rk(A + I) = 3 \Rightarrow \mu_g(-1) = 1$. Ma ci potremmo chiedere chi è questo autospazio; per farlo dobbiamo trovare una base del nucleo della matrice $A + I$, sappiamo che per farlo è sufficiente considerare le ultime tre righe, visto che abbiamo appena dimostrato che la prima è linearmente dipendente da queste; sappiamo che $V_{-1}(f) = Ker(A + I)$ che sono uguali a:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{matrix} -5x+y+2z-2t=0 \\ -2x+y+2z+t=0 \\ 2x-y+z+2t=0 \end{matrix} \right. \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{matrix} x=-t \\ y=-t \\ t=-t \end{matrix} \right. \right\} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Quindi questo vettore della base di $V_{-1}(f)$ sarà mandato in se stesso moltiplicato per -1.

Facciamo adesso le stesse operazioni per l'altra radice del polinomio caratteristico: avremo $V_2(f) = Ker(f - 2id) = Ker(A - 2I)$; troviamo ora $\mu_g(2, f)$ e per farlo sappiamo di avere bisogno del rango di $A - 2I$, abbiamo che:

$$rk \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Abbiamo quindi che $\mu_g(2, f) = 4 - rk(A - 2I) = 4 - 2 = 2$. Troviamo inoltre il Ker di questa matrice per trovare una base di $V_2(f)$;

$$Ker(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{matrix} -2x+y-z+t=0 \\ -5x-2y+2z-2t=0 \end{matrix} \right. \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{matrix} x=0 \\ y=z-t \end{matrix} \right. \right\}$$
$$= Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Consideriamo adesso tutti insieme i vettori $\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix}$; questi vettori sono linearmente indipendenti, ipotizziamo che B sia un completamento a base di questi vettori; avremmo allora che:

$$\mathfrak{M}_B\left(f\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & * \\ 0 & 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dove l'ultimo -1 è dovuto al fatto che $det(A) = 4$ e $A \sim \mathfrak{M}_B\left(f\right)$, quindi le due matrici hanno lo stesso determinante, che in caso di matrici triangolari corrisponde al prodotto degli elementi sulla diagonale.

Proposizione 31. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n e $\mu, \lambda \in Sp(f)$ (autovalori diversi tra di loro). Allora:*

a) $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$.

b) $1 \le \mu_g(\lambda) \le \mu_a(\lambda) \le dim\ V$.

Dimostrazione. a) Sia $v \in V_\lambda(f) \cap V_\mu(f) \Rightarrow f(v) = \lambda v = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu) = 0$; ma visto che $\lambda \neq \mu$ per ipotesi abbiamo allora che $v = 0$.

b) Sia $d = \mu_g(\lambda) = dim\ V_\lambda(f)$ e sia $\{v_1, \ldots, v_d\}$ una base di V_λ; completiamola ora a B base di V, avremo che:

$$L = \mathfrak{M}_B\left(f\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & A \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Abbiamo quindi che $\forall i_1^d f(v_i) = \lambda v_i$; abbiamo inoltre che $p_f(t) = p_L(t) = p_{\lambda I}(t) \cdot p_C(t) = (\lambda - t)^d p_C(t) \Rightarrow \mu_a(\lambda) \ge d = \mu_g(\lambda)$.

In particolare questo secondo punto ci dice che $\mu_a(\lambda) = 1 \Rightarrow \mu_g(\lambda) = 1$.

Esercizio 24. Siano $A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&2&1\\0&0&3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$. Vediamo che $A \sim B$.

Dimostrazione. $p_A(t) = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t) \Rightarrow Sp(A) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \mu_a(1) = \mu_a(2) = \mu_a(3) = 1 \Rightarrow \mu_g(1) = \mu_g(2) = \mu_g(3) = 1$. Esisteranno quindi v_1, v_2, v_3 tali che (ponendo $f = L_A$):

- $V_1(f) = Span\left(\{v_1\}\right)$.
- $V_2(f) = Span\left(\{v_2\}\right)$.
- $V_3(f) = Span\left(\{v_3\}\right)$.

Questi vettori sono indipendenti a due a due; mostriamo infatti che $v_3 \notin Span\left(\{v_1, v_2\}\right)$. Infatti $v_3 \in Span\left(\{v_1, v_2\}\right) \Rightarrow v_3 = av_1 + bv_2 \Rightarrow f(v_3) = a(f(v_1)) + b(f(v_2)) \Rightarrow 3v_3 = 3av_1 + 3bv + 2 = av_1 + 2bv_2 \Rightarrow 3a = a, 2b = 3b \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow v_3 = 0$; ma v_3 genera una retta, quindi assurdo. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e abbiamo che $A \sim \mathfrak{M}_B\left(f\right) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 25. Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in Sp(f)$ degli autovalori distinti. Allora $(V_{\lambda_1}(f) \oplus V_{\lambda_2}(f)) \cap V_{\lambda_3}(f) = \{0\}$. Vediamo questa situazione nel caso delle matrici $\mathcal{M}(3, \mathbb{R})$.

- Sia $A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$, avremo che $p_A = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t)$, e queste sono tre radici distinte; ripercorrendo il ragionamento che abbiamo fatto nell'esercizio precendente troviamo che $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Riflessione 13. Cerchiamo ora di analizzare tutte le possibili situazioni in cui potremmo trovare lo spettro di una matrice $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$: $Sp(A) =$

'$\{\lambda_1, \lambda_2\}$' Chiaramente con $\lambda_1 \neq \lambda_2$; abbiamo allora che $p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \Rightarrow \mu_a(\lambda_1) = \mu_a(\lambda_2) = \mu_g(\lambda_1) = \mu_g(\lambda_2) = 1$. Abbiamo inoltre che $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}(A) = \mathbb{R}^2$. Visto che $\mu_g(\lambda_1) = \mu_g(\lambda_2) = 1$ abbiamo che $\exists v_1, v_2 \mid V_{\lambda_1} = Span(\{v_1\}), V_{\lambda_2} = Span(\{v_2\})$. Questi vettori sono linearmente indipendenti, visto che generano due spazi vettoriali in somma diretta, allora abbiamo che $B = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
Possiamo inoltre vedere che $\mathfrak{M}_B(L_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Abbiamo che $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $det(A) = \lambda_1 \lambda_2$; quindi possiamo dire che $p_A(t) = t^2 - tr(A) + det(A) = t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1 \lambda_2$.

'$\{\lambda\}$' $p_A(t) = (t - \lambda)^2 \Rightarrow \mu_a(\lambda) = 2 \Rightarrow \mu_g(\lambda) = 1 \vee \mu_g(\lambda) = 2$.

'$\mu_g(\lambda) = 2$' $V_\lambda(A) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow A = \lambda I$.

'$\mu_g(\lambda) = 1$' $dim\ V_\lambda(A) = 1$; non possiamo quindi avere una matrice diagonale. Abbiamo che $\exists v \in \mathbb{R}^2 \mid V_\lambda(A) = Span(\{v\})$; possiamo completare questo vettore a $B = \{v, v_2\}$ base di $\mathbb{R}^2$. Avremo che $A \sim \mathfrak{M}_B(L_A) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Sappiamo che $ast \neq 0 \forall v_2$, ma se scegliamo bene il vettore possiamo renderlo 1. Il λ della seconda colonna è dovuto al fatto che $det\ A = \lambda^2$.

'$\varnothing$' È il caso peggiore: non ci sono autovalori o autovettori. $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ v, Av$ sono linearmente indipendenti; riusciamo quindi molto facilmente a trovare una base. Sappiamo che A è invertibile e anche che $p_A(t) = t^2 - tr(A) + det(A)$ è tale che $\Delta(p_A(t)) < 0 \Rightarrow (tr(A))^2 - 4(det(A)) < 0$.
Possiamo scegliere come base di $\mathbb{R}^2$ $B = \{v, Av\}$ avremo quindi $\mathfrak{M}_B(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$; in cui $\beta = tr(A)$ e $\alpha = -det(A)$.

Lezione 23

Teoria

Somma diretta di spazi vettoriali

Proposizione 32. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W_1, \dots, W_k$ dei sottospazi vettoriali di V con basi $B_1, \dots, B_k$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1) $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ *è una base di* $W_1 + \dots + W_k$.

2) $\forall w_i \in W_i, \ w_1 + \dots + w_k = 0 \Rightarrow w_1 = \dots = w_k = 0$.

3) $\forall v \in W_1 + \dots + W_k, \ \exists! w_i \in W_i \mid v = w_1 + \dots + w_k$.

4) $dim(W_1 + \dots + W_k) = dim\ W_1 + \dots + dim\ W_k$.

Dimostrazione. Dimostriamo le varie coimplicazioni:

'1) $\Rightarrow$ 2)' $\forall i_1^k$ scriviamo w_i come combinazione lineare dei vettori della base B_i; a questo punto abbiamo scritto 0 come combinazione di elementi delle varie basi B_i e quindi come combinazione lineare dei vettori della base B, quindi questi vettori sono tutti nulli perché i coefficienti sono zero.

'2) $\Rightarrow$ 3)' Sia $v \in W_1 + \dots + W_k$, supponiamo $v = w_1 + \dots + w_k = w_1' + \dots + w_k' \Rightarrow (w_1 - w_1') + \dots + (w_k - w_k') = 0 \Rightarrow \forall i_1^k, \ w_i = w_i'$.

'3) $\Rightarrow$ 1)' Sappiamo già che B genera lo spazio vettoriale somma, dobbiamo solo dimostrare che i suoi vettori sono linearmente indipendenti. Sia $0 = CL_B$ combinazione lineare dei vettori di B. Abbiamo quindi $0 = CL_B = CL_{B_1} + \dots + CL_{B_k}$, ma zero può essere anche scritto come $0_{W_1} + \dots + 0_{W_k}$; ma per ipotesi ogni vettore può essere scritto in modo unico, ma allora i coefficienti per qualunque B_i sono nulli ($CL_{B_i} = 0$), quindi sono nulli anche i coefficienti di ogni vettore di ogni base B_i.

'1) $\Rightarrow$ 4)' Ovvio.

'4) $\Rightarrow$ 1)' Sappiamo che $B = \{B_1 + \dots + B_k\}$ genera $W_1 + \dots + W_k$. $\sharp B = \sum_{i=0}^{k} \sharp B_i = \sum_{i=0}^{k} dim\ W_i = dim\ (W_1 + \dots + W_k)$. Quindi i vettori generano lo spazio vettoriale e sono tanti quanti la sua dimensione; qusto vuol dire che sono linearmente indipendenti.

Definizione 26 (Somma diretta)**.** Se vale una delle precedenti 4 proprietà si dice che $W_1, \ldots, W_k$ sono in somma diretta e si scrive $W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

Proposizione 33. *Sia V uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$ con spettro $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Allora gli sutospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta.*

Dimostrazione. Dimostriamo che vale la 2). Per induzione su h dimostriamo che, con $v_i \in V_{\lambda_i}$, $v_1 + \ldots + v_h = 0 \Rightarrow v_1 = \ldots = v_h = 0$.

ι) $h = 1$. Ovvio.

$\iota\iota$) $h-1 \Rightarrow h$. $v_1 + \ldots + v_h = 0 \Rightarrow f(v_1 + \ldots + v_h) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_h v_h = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_h(-v_1 - \ldots - v_{h-1}) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_h)v_1 + \ldots + (\lambda_{h-1} - \lambda_h)v_{h-1} = 0 \overset{hyp.}{\Rightarrow} \forall i_1^{h-1} (\lambda_i - \lambda_h)v_i = 0 \Rightarrow v_i = 0$.

Nuove definizioni: diagonalizzabilità e triangolabilità

Definizione 27 (Diagonalizzabile)**.** Sia V uno spazio vettoriale. $f \in End(V)$ si dice diagonalizzabile se $\exists B$ base di V tale che $\mathfrak{M}_B(f)$ è diagonale.

Definizione 28 (Diagonalizzabile (matrici))**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$; A si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale.

Osservazione 20. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f \in End(V)$; f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \forall S$ base di V, $\mathfrak{M}_S(f)$ è diagonalizzabile.
Inoltre una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists B$ base di $\mathbb{K}^n$ tale che tutti i vettori della base siano autovettori.

Proposizione 34. *Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$ e $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. f diagonalizzabile $\Leftrightarrow V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$.*

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' Ovvio.

'$\Rightarrow$' Basta dimostrare l'inclusione $'\supseteq'$. Se B è una base di V di autovettori per f, allora $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ con $B_i \subseteq V_{\lambda_i}$; sappiamo che B genera V; quindi $V = Span(B_1) \oplus \ldots \oplus Span(B_k) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. Dove l'ultimo sottoinsieme è dovuto al fatto che ogni $Span(B_i) \subseteq V_{\lambda_i}$.

Osservazione 21. Sia V uno spazio vettoriale e $f, g \in End(V)$ due applicazioni lineari coniugate. Allora f diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ g diagonalizzabile. Infatti sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V formata da autovettori per f, sappiamo che $\exists h \in Aut(V) \mid g = h^{-1} \circ f \circ h$, ma allora $\{h^{-1}(v_1), \ldots, h^{-1}(v_n)\}$ è una base di V di autovettori per g.

Teorema 12 (di diagonalizzabilità)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f \in End(V)$ un'applicazione lineare con spettro $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \mu_a(\lambda_1) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) = n$ e $\forall i_1^n \mu_g(\lambda_i, f) = \mu_a(\lambda_i)$.*

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' Sia B una base di V tale che $\mathfrak{M}_B(f)$ sia diagonale, chiaramente sulla diagonale ci saranno i vari autovalori di f: supponiamo che siano, in ordine di riga, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Allora $p_f = D_n(\mathfrak{M}_B(f) - tI_n) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{d_i} \Rightarrow d_i = \mu_a(\lambda_i) \forall i_1^k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i = deg\ p_f(t) = n$.
B contiene d_i autovettori relativi a λ_i. Questi autovettori sono indipendenti; $\mu_g(\lambda_i, f) = dim\ V_{\lambda_i} \geq d_i = \mu_a(\lambda_i)$; ma sappiamo che $\mu_g \leq \mu_a$, quindi sono uguali.

'$\Leftarrow$' $dim\,(V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = n \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V.$

Osservazione 22. $\mu_a(\lambda_1) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) = deg\, p_f(t) \Leftrightarrow p_f(t) = (\lambda_1 - t)^{\mu_a(\lambda_1)} \ldots (\lambda_n - t)^{\mu_a(\lambda_n)}$. Cioè se e solo se il polinomio è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$. Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso tutti i polinomi sono completamente fattorizzabili.

Osservazione 23. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f \in End(V)$ un'applicazione lineare con spettro tale che $\sharp Sp(f) = n \Rightarrow \forall i,\ \mu_a(\lambda_i) = 1 \Rightarrow \forall i,\ \mu_g(\lambda_i) = 1 \Rightarrow f$ è diagonalizzabile.

Definizione 29 (Triangolabilità)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f \in End(V)$ un'applicazione lineare; f si dice triangolabile se $\exists B$ base di V *t.c.* $\mathfrak{M}_B\,(f)$ è una matrice triangolare.
N.B : serve che almeno il primo vettore della base sia un autovettore.

Definizione 30 (Triangolabilità (matrici))**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$; A si dice triangolabile se è simile a una matrice triangolare.

Osservazione 24. Se f è diagonalizzabile allora è triangolabile; f è triangolabile $\Leftrightarrow \forall B$ base di V, $\mathfrak{M}_B\,(f)$ è triangolabile.

Definizione 31 (Bandiera)**.** Sia V uno spazio vettoriale e $I = \{1, \ldots, n\}$; una bandiera per V è una famiglia $\{V_i\}_{i \in I}$ di sottospazi vettoriali di V tale che

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_n$$

e tali che $\forall i_1^n dim\ V_i = i$.

Osservazione 25. Sia V uno spazio vettoriale, ogni base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ induce una bandiera per V, considerando $V_i = Span\,(\{v_1, \ldots, v_i\})$. Inoltre ogni bandiera per V è indotta da una base.

Definizione 32 (Base a bandiera)**.** Sia V uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$. B base di V si dice base a bandiera per f se la bandiera indotta da B è f-invariante, cioè se $\forall i_1^n,\ f\,(Span\,(\{v_1, \ldots, v_i\})) \subseteq Span\,(\{v_1, \ldots, v_i\})$.

Osservazione 26. f è triangolabile se e solo se esiste una base a bandiera per f. Inoltre B base a bandiera per $f \Leftrightarrow \mathfrak{M}_B\,(f) = T$, con T triangolare.

Teorema 13 (di triangolabilità)**.** *Sia V spazio vettoriale e $f \in End(V)$.*

$$f \text{ è triangolabile } \Leftrightarrow p_f(t) \text{ è completamente fattorizzabile in } \mathbb{K}[t]$$

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' $\exists B$ base di V tale che $\mathfrak{M}_B\,(f)$ è triangolare con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nella diagonale; quindi $p_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$.

'$\Leftarrow$' Per induzione sulla dimensione dello spazio.

ι) Ovvio.

$\iota\iota$) Per ipotesi $Sp(f) \neq \varnothing$. Sia $\lambda_1 \in Sp(f)$ e v_1 autovettore di λ_1. Prendiamo questo vettore come primo vettore bella base. Completiamo v_1 a base di V: $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Allora avremo una matrice associata della forma:

$$\mathfrak{M}_S(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Sia $V_1 = Span(\{v_1\})$, $W = Span(\{v_2, \ldots, v_n\})$. A questo punto abbiamo $V = V_1 \oplus W$.
Chiamiamo $V \xrightarrow{\pi_{V_1}} V_1$, $V \xrightarrow{\pi_W} W$ le proiezioni date da $V_1 \oplus W$.
Consideriamo $\pi_W \circ f\ |_W \in End(W)$. Se il polinomio è completamente fattorizzabile abbiamo finito e utilizziamo l'induzione. Consideriamo $T = \{v_2, \ldots, v_n\}$ una base di W e sia $C = \mathfrak{M}_T(\pi_W \circ f\ |_W)$. Ma $p_f(t) = (\lambda_1 - t)p_C(t)$. Ma $p_f(t)$ completamente fattorizzabile $\Leftrightarrow p_C$ fattorizzabile.
Per ipotesi induttiva $\exists\{w_2, \ldots, w_n\}$ base a bandiera di W per $\pi_W \circ f\ |_W$. Allora $\{v_1, \ldots, w_n\}$ è a bandiera per f (lo dimostriamo adesso).

- $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Quindi ok.
- $f(W_i) = (\pi_{V_1} + \pi_W) f(w_i) = \pi_{V_1}(f(w_i)) + \pi_W(f(w_i)) \in Span(\{v_1, \ldots, w_i\})$.

Osservazione 27. Sia V campo e $f, g \in End(V)$; se $f \sim g$ allora f triangolabile (diagonalizzabile) $\Leftrightarrow g$ triangolabile (diagonalizzabile).

Osservazione 28. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Allora $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, A è triangolabile.

Esercitazione

Proposizione 35. *Sia V uno spazio vettoriale e $V_1, \ldots, V_k$ sottospazi vettoriali di V. $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \Leftrightarrow n = dim(V_1 + \ldots + V_k) = dim\ V_1 + \ldots + dim\ V_k$.*

Dimostrazione. Abbiamo infatti, per Grassmann,

$$\begin{aligned} n &= dim\ V_k + dim(V_1 + \ldots + V_{k-1}) - dim(V_k \cap (V_1 + \ldots + V_{k-1})) \\ &\overset{ind.}{=} dim\ V_k + dim\ V_{k-1} + dim(V_1 + \ldots + V_{k-2}) \\ &\qquad - dim(V_K \cap (V_1 + \ldots + V_{k-1})) - dim(V_{K-1} \cap (V_1 + \ldots + V_{k-2})) \\ &= dim\ V_k + \ldots + dim\ V_1 - (dim(V_1 \cap V_2) + dim(V_3 \cap (V_1 + V_2) + \\ &\qquad \ldots + dim(V_K \cap (V_1 + \ldots + V_{k-1})))) \end{aligned}$$

Quindi $n = dim\ V_1 + \ldots + dim\ V_k$ solamente se le intersezioni hanno dimensione zero, quindi se

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{0\} \\ V_3 \cap (V_1 + V_2) &= \{0\} \\ V_4 \cap (V_1 + V_2 + V_3) &= \{0\} \\ &\vdots \\ V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1}) &= \{0\} \end{aligned}$$

Osservazione 29. Sia V uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$, abbiamo visto che f diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists B$ base di V di autovettori per $f \Leftrightarrow V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V \Leftrightarrow p_f(t)$ completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[x]$ e $\forall \lambda,\ \mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

Da ora in poi scriveremo indifferentemente $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda$; sappiamo infatti che la somma diretta si può fare sempre, per ogni λ, e l'intersezione sarà comunque $\{0\}$.

Esercizio 26. Sia V uno spazio vettoriale e $f \in End(V) \mid f^2 = f$. Vediamo cosa possiamo dire di questa applicazione. Intanto $f^2 - f = 0 \Rightarrow V = V_0 \oplus V_1$ con $V_0 = Ker\ f$ e $V_1 = Imm\ f$. Consideriamo anche che $Ker(f - id_V) \subseteq V_0; Imm(f - id_V) \subseteq V_1$; abbiamo quindi (considerando che $f - (f - id_V) = id_V$) che $\forall v \in V\ v = \overbrace{f(v)}^{\in V_1} - \overbrace{(f - id_V)(v)}^{\in V_0}$.
Quindi $Sp(f) \subseteq \{0, 1\} \Rightarrow f$ è diagonalizzabile nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 27. Sia V uno spazio vettoriale e $f \in End(V) \mid f^2 = id_V$. Possiamo di certo dire che $f^2 - id_V = 0$, è vero anche che $(f - id_V) \circ (f + id_V) = 0$, quindi $V = V_1 \oplus V_{-1} \Rightarrow f$ è diagonalizzabile nella forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 28. Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. $A^4 = I \Rightarrow A^2 = I$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\exists M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid M^{-1}AM = D$. Allora $D^4 = (M^{-1}AM)^4 = M^{-1}A^4M = M^{-1}M = I$. Ma $D^4 = I \Rightarrow \forall i \lambda_i^4 = 1 \Rightarrow \lambda_i^2 = 1 \Rightarrow D^2 = I$. Ma vale anche $A^2 = MDM^{-1} = MD^2M^{-1} = I$.

Osservazione 30. Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e $\lambda \in Sp(A)$. Per ipotesi $\exists v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v$, ma è vero anche che $\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda^k \in Sp(A^k)$.

Riflessione 14. Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$ e $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale f-invariante di V.

$$f \text{ diagonalizzabile } \Leftrightarrow \begin{array}{l} f\mid_W \text{ diagonalizzabile } \wedge \\ [\exists U \text{ ssv. di } V \mid V = U \oplus W \wedge \\ f\mid_U, f\mid_W \text{ diagonalizzabili}] \end{array}$$

Dimostrazione. '$\Leftarrow$' $f\mid_U, f\mid_W$ diagonalizzabili $\Rightarrow \begin{array}{l}\exists B \text{ base di } U \text{ di autovettori per } f\mid_U \\ \exists B' \text{ base di } W \text{ di autovettori per } f\mid_W\end{array}$.

Quindi $B \cup B'$ base di autovettori per f.

'$\Rightarrow$' $\exists\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V di autovettori per f; $\forall i_1^n$ (supponendo che U esista) chiamiamo $u_i = \pi_U(v_i)$, $w_i = \pi_W(v_i)$; quindi $v_i = u_i + w_i$. Abbiamo che: $\lambda_i w_i = \lambda_i u_i = \lambda_i v_i = f(v_i) = f(u_i) + f(w_i)$. Abbiamo (visto che la somma è diretta e quindi la scrittura di vettori come somma di vettori ai sottospazi è unica) che $f(u_i) = \lambda u_i, f(w_i) = \lambda w_i$.
Abbiamo che $Imm\ \pi_U = U \Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ generano U. Da questi vettori possiamo estrarre una base di autovettori per $f\mid_U$; quindi certamente $f\mid_U$ è diagonalizzabile.
Mostriamo che tale U esiste.
Prendiamo $\{w_1, \ldots, w_m\}$, una base di W e completiamola a base di V usando $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di autovettori per f. Avremo quindi $\{w_1, \ldots, w_m, v_{j_i}, \ldots, v_{j_{m-n}}\}$.
Sia $U = Span\left(\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{m-n}}\}\right)$. Chiaramente abbiamo $V = U \oplus W$; ma sappiamo anche che $\forall i_1^{n-m}$, $\exists \lambda_i \mid f(v_{j_i}) = \lambda_i v_{j_i}$ visto che abbiamo scelto per il completamento un base di autovettori.

Esercizio 29. Sia V uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$ diagonalizzabile, W un V-sottospazio vettoriale f-invariante e $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. f diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$.
Consideriamo $\lambda \in Sp(f\mid_W)$; $\exists w \in W \mid f\mid_W (w) = \lambda w \Rightarrow \lambda \in Sp(f)$. Quindi abbiamo che $Sp(f\mid_W) \subseteq Sp(f)$.
I possibili autospazi per $f\mid_W$ sono i $V_\lambda\,(f\mid_W)$ con $\lambda \in Sp(f)$.
$V_\lambda\,(f\mid_W) = Ker(f\mid_W - \lambda id_W) = Ker(f - \lambda\lambda id_V\mid_W) = Ker(f - \lambda id_V) \cap W = V_\lambda(f) \cap W$. Questi sono gli autospazi di W rispetto a $f\mid_W$.
Basta vedere che $(V_{\lambda_1}(f) \cap W) \oplus \ldots \oplus (V_{\lambda_k}(f) \cap W) = W$ (cosa in generale falsa).

'$\subseteq$' Ovvio.

'$\supseteq$' $\forall w \in W, \forall i_1^k \exists! v_i \in V_{\lambda_i}(f) \mid w = \sum_{i=1}^{k} v_i$.
Vediamo ora che:

$$\begin{aligned} f(w) &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \\ f^2(w) &= \lambda_1^2 v_1 + \ldots + \lambda_k^2 v_k \\ &\vdots \\ f(w)^{k-1} &= \lambda_1^{k-1} v_1 + \ldots + \lambda_k^{k-1} v_k \end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{pmatrix} w \\ f(w) \\ f^2(w) \\ \\ f^{k-1}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ v_k \end{pmatrix}$$

Sappiamo che il determinante della matrice non è nullo, quindi la matrice è invertibile. $v_i \in Span\left(\{w, f(w), \dots, f^{k-1}(w)\}\right)$; ma W è f-invariante quindi abbiamo che $v_i \in V_{\lambda_i}(f) \cap W$.

Esercizio 30. Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ diagonalizzabili. Ci chiediamo quando esiste una base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per A e B? Cioè quando $\exists M \in GL(n,\mathbb{K}) \left| \begin{array}{l} M^{-1}AM = D \\ M^{-1}BM = D' \end{array} \right.$ diagonali?
Dimostriamo che questo succede se e solo se $AB = BA$.

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' $A = MDM^{-1}$, $B = MD'M^{-1}$. Abbiamo che $AB = MDM^{-1}MD'M^{-1} = MDD'M^{-1} \overset{D,D'\ diag.}{=} MD'DM^{-1} = MD'M^{-1}MDM^{-1} = BA$.

'$\Leftarrow$' Prendiamo $\lambda \in Sp(A)$, cosa possiamo dire di $B(V_\lambda(A))$? $v \in V_\lambda(A) \Rightarrow Av = \lambda v$. Ma allora $AB(v) = BA(v) = \lambda(Bv) \Rightarrow Bv \in V_\lambda A$. Cioè gli autospazi di A sono B-invarianti (e anche il contrario. Inoltre A diagonalizzabile $\Rightarrow V = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$. E ogni V_{λ_i} è f-invariante. Abbiamo quindi trovato una decomposizione di V in autospazi B- invarianti. Ma B è diagonalizzabile; allora $B|_{V_{\lambda_i}(A)}$ è diagonalizzabile. Quindi $\exists B_i$ base di $V_{\lambda_i}(A)$ di autovettori di B e anche di A. Consideriamo a questo punto $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ è una base di V di autovettori di A e di B.

Corollario 16. *Se due endomorfismi commutano, gli autospazi di ciascuno di loro sono sottospazi vettoriali invarianti per l'altro.*

Esercizio 31. Sia $A_\lambda = \begin{pmatrix} 3\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2-4\lambda & -2\lambda & 2-3\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$. Sappiamo che $p_{A_\lambda}(t) = det(A_\lambda - tI) = (\lambda - t)(1 - \lambda - t)(2 - \lambda - t)$. Le radici del polinomio sono: $Sp(A_\lambda) = \{\lambda, 1 - \lambda, 2 - \lambda\}$. Abbiamo a questo punto tre casi:

'$\lambda = 1 - \lambda$' In questo caso $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow Sp(A_{\frac{1}{2}}) = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ e abbiamo che $\mu_a(\frac{3}{2}) = 1, \mu_a(\frac{1}{2}) = 2$.

'$\lambda = 2 - \lambda$' In questo caso $\lambda = 1 \Rightarrow Sp(A_1) = \{1, 0\}$ e abbiamo che $\mu_a(0) = 1, \mu_a(1) = 2$.

'λ' Se λ è diverso abbiamo $\mu_a(\lambda) = \mu_a(1 - \lambda) = \mu_a(2 - \lambda) = 1$; anche le molteplicità geometriche valgono 1. In questo caso quindi la matrice è diagonalizzabile; $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Abbiamo quindi visto che se $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$ la matrice è sempre diagonalizzabile. Ma cosa succede in questi due casi? Dovremmo trovare la molteplicità geometrica, se questa è uguale a quella algebrica la matrice sarà diagonalizzabile, altrimenti no. Esaminiamo i due casi:

'$\lambda = \frac{1}{2}$' $A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\mu_g(\frac{1}{2}) = 3 - rk(A_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}I) = dim\ Ker(A - \frac{1}{2}) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Quindi $A_{\frac{1}{2}}$ non è diagonalizzabile poiché $\mu_g \neq \mu_a$.

'$\lambda = 1$' $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\mu_g(1) = 3 - rk(A_1) - I) = 3 -$

$rk \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$. Quindi A è diagonalizzabile, in quanto $\mu_a = \mu_g$.

E abbiamo che $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In qualunque caso, comunque, le matrici sono triangolabili: il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile nel campo.

Riflessione 15. Sappiamo che $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ triangolabile $\Leftrightarrow p_A(t)$ completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$; per trovare una base a bandiera di A.

1) Trovare $v_1 \in \mathbb{K}^n$ autovettore relativo a λ per A.

2) Considero $B = \{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. Avremo che

$$\mathfrak{M}_B(L_A) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Prendiamo $W = Span(\{w_2, \ldots, w_n\})$. Sappiamo che $\mathbb{K}^n = W \oplus Span(\{v_1\})$. Inoltre $C = \mathfrak{M}(\pi_W \circ f|_W)$. Abbiamo che $p_A(t) = p_C(t)(\lambda_1 - t)$.

3) Trovare la base di W a bandiera per $\pi_w \circ f|_W$.

Esempio 16. Consideriamo $\mathcal{M}(4, \mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Per trovare i vari autospazi di A dobbiamo prima di tutto trovare il polinomio caratteristico, quindi gli autovalori, per poi trovare gli autovettori che utilizzeremo come base degli autospazi. In questo caso $p_A(t) = (1-t)^4$; quindi $Sp(A) = \{1\}$; abbiamo che A non è diagonalizzabile, perché l'unica matrice con spettro $\{1\}$ diagonalizzabile è I. Però A è comunque triangolabile, poiché il suo polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}$. Quindi esiste una base a bandiera per A.

$dim\ V_1(A) = \mu_g(1) = 4 - rk(A - I) = 4 - rk\{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\} = 4 - 3 = 1$. Cerchiamo adesso di trovare questo autospazio. $V_1(A) = ker\ (A - I) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{smallmatrix} y=z=0 \\ x=-t \end{smallmatrix} \right\} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right) = Span(\{v_1\})$.

Quindi a questo punto considero $B_1 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), e_2, e_3, e_4\right\}$ base di $\mathbb{R}^4$. Troviamoci ora $\mathfrak{M}_{B_1}(L_A)$:

- $\left[A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right]_{B_1} = \left[\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right]_{B_1} = \left(\begin{smallmatrix} * \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

- $\left[A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{B_1}=\left[\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right]_{B_1}=\begin{pmatrix}*\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- $\left[A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{B_1}=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{B_1}=\begin{pmatrix}*\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$\mathfrak{M}_{B_1}(L_A)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&*&*&*\\\hline 0&0&-1&-1\\0&1&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$. Chiamiamo C il minore di ordine 3 di $\mathfrak{M}_{B_1}(L_A)$ che si trova in basso a destra. Sappiamo che $p_C(t)=(1-t)^3\Rightarrow Sp(C)=\{1\}$. Dobbiamo cercare un altro autovettore per 1. Sappiamo che $V_1(c)=Ker(C-I)=Ker\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|\begin{smallmatrix}y=0\\x+z=0\end{smallmatrix}\right\}=Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$. Stiamo parlando di $Span$, ma non ci dobbiamo dimenticare qual'è la base di cui stiamo parlando: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Quindi quando parliamo dello $Span$ lo intendiamo rispetto a questi vettori, in particolare prendiamo come nuovo vettore della base il vettore di coordinate $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ che, per come abbiamo scelto la base, è proprio il vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Abbiamo quindi $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Come abbiamo fatto prima dobbiamo cercare $\mathfrak{M}_{B_2}(L_A)$; facciamo gli stessi conti che abbiamo fatto prima e otteniamo:

$$\mathfrak{M}_{B_2}(L_A)=\left(\begin{array}{c|c}1&*\\\hline 0&\begin{array}{c|c}1&*\\\hline 0&\begin{array}{cc}1&0\\1&1\end{array}\end{array}\end{array}\right)$$

Chiamando C' il minore di ordine 2 in basso a destra, sappiamo che $P_{C'}=(1-t)^2$, quindi $Sp(C')=\{1\}$. Abbiamo che $V_1(C')=Ker(C'-C)=Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$. Quindi come prima prendiamo come vettore v_3 il vettore che ha come coordinate $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ nella base completata di prima. Avremo quindi $B_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},*\right\}$. Sappiamo che, $\forall *$, B_3 è una base a bandiera (se $*$ è indipendente).

Esercizio 32. Sia $A=\begin{pmatrix}0&2&-2&1\\-1&0&0&-1\\2&-1&3&0\\2&-1&2&1\end{pmatrix}$. Sappiamo come trovarci $p_A(t)=(1-t)^4$, quindi anche in questo caso abbiamo che $Sp(A)=\{1\}$. Inoltre troviamo $V_1(A)=Ker(A-I)=Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$. A questo punto si trovi una base di vettori a bandiera per A.

Proposizione 36. *Sia $A\in\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$. A è nilpotente $\Leftrightarrow Sp(A)=\{0\}$ e $\mu_a(0)=n$.*

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' $\exists p>0\mid A^p=0$. Consideriamo $p_A(t)\in\overline{\mathbb{K}}[t]$, dove $\overline{\mathbb{K}}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$. Sia $\lambda\in\overline{\mathbb{K}}$ una radice di $p_A(t)$. Sappiamo che λ

è autovalore per la matrice A in $\overline{\mathbb{K}}$. Ma il polinomio e il determinante della matrice A non cambiano in $\overline{\mathbb{K}}$ (anche se è possibile che abbia delle radici che prima vi erano). Abbiamo già visto che λ^p deve essere autovalore per A^p; ma $A^p = 0 \Rightarrow Sp(A^p) = 0$, quindi $\lambda^p = 0$, ma siamo in un campo, quindi doveva essere 0 sin dall'inizio. Quindi l'unica radice di $p_A(t)$ è $\lambda = 0$ e ha molteplicità n.

'$\Leftarrow$' $p_A(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t] \Rightarrow A$ è triangolabile $\Rightarrow A \sim T \Rightarrow A^p \sim T^p \Rightarrow A^p \sim 0 \Rightarrow A^p = 0$.

Possiamo quindi anche dire che l'indice di nilpotenza di una qualsiasi matrice nilpotente di $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ è $\leq n$.

Proposizione 37. *Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ triangolabili. $AB = BA \Rightarrow \exists$ base a bandiera contemporaneamente per A e per B. '$\Leftarrow$' è falso.*

Dimostrazione. Per induzione su n. Il caso $n = 1$ è banale.
Sappiamo che $p_A(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$. Esisterà allora $\lambda_1 \in Sp(A)$. Visto che $AB = BA$ possiamo dire che $V_{\lambda_1}(A)$ è B-invariante.
Consideriamo ora $B\,|_{V_{\lambda_1}(A)} \in End(V_{\lambda_1}(A))$, sappiamo che è triangolabile, (la restrizione di un'applicazione triangolabile è triangolabile) quindi $\exists\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $V_{\lambda_1}(A)$ a bandiera per $B\,|_{V_{\lambda_1}(A)}$ e v_1 autovettore di B e di A.
Consideriamo a questo punto $B = \{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. $W = Span\,(\{w_2, \dots, w_n\})$.
A questo punto possiamo applicare l'ipotesi induttiva a $\pi_W \circ A\,|_W$ e $\pi_W \circ B\,|_W \in End(W)$.
L'ipotesi induttiva però vale solo se queste due commutano. Quindi abbiamo finito se riusciamo a dimostrare che

$$\pi_W \circ A\,|_W \circ \pi_W \circ B\,|_W = \pi_W \circ B\,|_W \circ \pi_W \circ A\,|_W$$

$V = W \oplus Span(\{v_1\})$. $\forall v \in V \exists! w \in \alpha \in \mathbb{K} \mid v = w + \alpha w_1$. Quindi $\pi_W \circ A \circ \pi_W(w) = \pi_W A(w)$. Sapendo questo abbiamo che $A(v) = Aw + \alpha\lambda_1 v_1$, somma in cui il secondo membro va a zero nella proiezione; quindi $A(v) = Aw$.

Esiste quindi $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di W a bandiera per $\pi_W \circ A\,|_W$ e per $\pi_W \circ B\,|_W$. Abbiamo quindi trovato la base cercata: $\{v_1, \dots, v_n\}$.