INTERPRETAZIONI TRA STRUTTURE

CASO SPECIALE

- Interpretazioni unidimensionali e senza quozienti
  - Sia A una L-struttura e B una L'-struttura. Diciamo che A è interpretabile in B se esiste una famiglia I di L'-formule che definiscono se interpretate in B, una struttura B(I) tale che $A \simeq B(I)$
  - I consiste delle seguenti L'-formule:
    - $\Delta(x)$ detta dominio dell'interpretazione
    - $\Phi f(X,y)$ per ogni simbolo di funzione n-ario f in L
    - $\Phi P(X)$ per ogni simbolo di relazione n-ario P in L
    - chiamo X la n-upla $(x_1,\dots,x_n)$
  - I è tale che
    - $B(I) := \{b \in B \mid B \models \Delta(x)\}$
    - $\Gamma(f)=\{(b_1,\dots,b_n,b) \in B(I)^{n+1} \mid B \models \Phi f(b_1,\dots,b_n,b)\}$ è il grafico di $f(I): B(I)^n \to B(I)$
    - $P(I)=\{(b_1,\dots,b_n) \mid B \models \Phi P(b_1,\dots,b_n)\}$ definisce una relazione n-aria P(I) su B(I)
    - In questo modo A è isomorfa alla struttura che ha come dominio B(I), interpreta f con $f(I)$ e P con P(I) per ogni f,P in L
    - Chiamiamo B(I) la struttura così ottenuta e diremo che I è l'interpretazione della L-struttura $A \simeq B(I)$ in B
  - I simboli di costante sono pensati come simboli di funzione di arietà 0
    - f=c costante, allora Φf contiene solo la variabile y libera e $\Phi f(y)$ vale per un solo valore di y in B (l'interpretazione di c)
- Formule $\Phi(I)$
  - Data un'interpretazione I della L-struttura A nella L'-struttura B e una L formula Φ, definiamo induttivamente una L'-formula $\Phi(I)$
    - $(f(X)=y)(I)=\Phi f(X,y)$ per ogni simbolo di funzione f in L
    - $(P(X))(I)=\Phi P(X)$ per ogni simbolo di relazione P di L
    - $(x=y)(I)=x(I)=y(I)$
    - $(\alpha \vee \beta)(I)=\alpha(I) \vee \beta(I)$
    - $(\alpha \wedge \beta)(I)=\alpha(I) \wedge \beta(I)$
    - $(\neg\alpha)(I)=\neg\alpha(I)$
    - $(\forall y\alpha)(I)=\forall y(\Delta(y)\to\alpha(I))$
    - $(\exists y\alpha)(I)=\exists y(\Delta(y)\wedge\alpha(I))$
  - Le formule $\Phi(I)$ permettono di parlare della struttura interpretata entro la struttura interpretante
    - Data un'interpretazione I della L-struttura $A \simeq B(I)$ in una L'-struttura B e una L-formula $\Phi(x_1,\dots,x_n)$, per ogni $a_1,\dots,a_n \in B(I)$ si ha $B \models \Phi(I)(a_1,\dots,a_n) \iff B(I) \models \Phi(a_1,\dots,a_n)$
    - Sia $\tau: B(I)\to A$ l'isomorfismo tra strutture. Allora vale $A \models \Phi(\tau a_1,\dots,\tau a_n) \iff B(I) \models \Phi(a_1,\dots,a_n)$
    - In particolare per ogni formula chiusa vale $A \models \Phi \iff B \models \Phi(I)$
    - Si dimostra per induzione sulla complessità di Φ

ESEMPIO DI INTERPRETAZIONE UNIDIMENSIONALE SENZA QUOZIENTI

- Usando il fatto che un numero intero è ≥0 sse è somma di 4 quadrati la struttura (N,+,.,≤) è interpretabile in (Z,+,.)
  - $\Delta(x) = \exists y_1,y_2,y_3,y_4(x=y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$
  - $\Phi_+(x_1,x_2,y) = x_1+x_2=y$
  - $\Phi_.(x_1,x_2,y) = x_1.x_2=y$
  - $\Phi_\leq(x_1,x_2) = \exists y\,(\Delta(y)\wedge x_1+y=x_2)$

CASO GENERALE

- Sia k un intero positivo
  - Sia M una L-struttura e N una L'-struttura. Un'interpretazione k-aria di N in M è data da una famiglia di L-formule $I=(\Delta,E,\Phi f,\Phi P)$ al variare di f e P in L' e da una funzione surgettiva $\tau:\Delta^M \to N$ tali che
    - Δ è una L-formula in k-variabili libere e $\Delta^M=\{a \in M^k \mid M \models \Delta(a)\}$
    - E è una L-formula in 2k variabili libere che definisce una relazione di equivalenza su Δ^M tale che per ogni $a,b \in \Delta^M$, $M \models E(a,b)$ sse $\tau(a) = \tau(b)$
    - Sia P un simbolo di predicato di arietà n allora ΦP ha kn variabili libere e per ogni $a_1,\dots,a_n \in \Delta^M$ si ha $M \models \Phi P(a_1,\dots,a_n)$ sse $N \models P(\tau a_1,\dots,\tau a_n)$
    - Sia f un simbolo di funzione di arietà n allora Φf ha (k + 1)n variabili libere e per ogni $a_1,\dots,a_n,a_{n+1} \in \Delta^M$ si ha $M \models \Phi f(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})$ sse $N \models f(\tau a_1,\dots,\tau a_n) = \tau a_{n+1}$
    - Se $\tau(a_1,\dots,a_k) = b \in N$, diremo che $a_1,\dots,a_k$ sono le coordinate di b. Ogni elemento di N ha dunque delle coordinate in $\Delta^M \subseteq M^k$
  - Data un'interpretazione I la funzione $\tau : \Delta^M \to N$ induce una bigezione $\tau':\Delta^M/E^M \to N$ per passaggio al quoziente
    - Le formule Φf e ΦP definiscone delle relazioni su Δ^M che a loro volta inducono delle funzioni e relazioni $f(I)$ e P(I) su Δ^M/E^M per passaggio al quoziente
    - Definiamo M(I) come la L-struttura con dominio Δ^M/E^M in cui i simboli f,P vengono interpretati come $f(I)$,P(I)
    - Otteniamo un isomorfismo tra strutture dato dalla bigezione $\tau':M(I) \to N$
- Formule $\Phi(I)$
  - Come nel caso speciale, possiamo associare ad ogni L'-formula Φ una L-formula $\Phi(I)$. Associamo ad ogni variabile x di L' una k-upla di variabili $x_1,\dots,x_k$ di L, che indicheremo con X
    - $(f(x_1,\dots,x_n)=y)(I) = \Phi f(X_1,\dots,X_n,y)$ per ogni simbolo di funzione f in L
    - $(P(x_1,\dots,x_n))(I) = \Phi P(X_1,\dots,X_n)$ per ogni simbolo di relazione P di L
    - $(x=y)(I) = E(X,Y)$
    - $(\alpha \vee \beta)(I) = \alpha(I) \vee \beta(I)$
    - $(\alpha \wedge \beta)(I) = \alpha(I) \wedge \beta(I)$
    - $(\neg\alpha)(I) = \neg\alpha(I)$
    - $(\forall y\alpha)(I) = \forall Y(\Delta(Y)\to\alpha(I))$
    - $(\exists y\alpha)(I) = \exists Y(\Delta(Y)\wedge\alpha(I))$
  - Sia $I=(\Delta,E,\Phi f,\Phi P)_{f,P \in L'}$ una interpretazione $N \simeq M(I)$ in M con coordinate date da $\tau: \Delta^M \to N$. Per ogni $a_1,\dots,a_n \in \Delta^M$ si ha:
    - $M \models \Phi(I)(a_1,\dots,a_n) \iff M(I) \models \Phi([a_1],\dots,[a_n])$ ciascuna a_i è una k-upla $a_{i1},\dots,a_{ik}$ di elementi di M che verifica $\Delta(x_1,\dots,x_k)$ e $[a_i]$ è la sua classe di equivalenza modulo E^M
    - Poiché $N \simeq M(I)$ tramite un isomorfismo che manda $[a_i]$ in τa_i si ha: $M \models \Phi(I)(a_1,\dots,a_n) \iff N \models \Phi(\tau a_1,\dots,\tau a_n)$
    - Si dimostra per induzione sulla complessità di Φ
- Quando la E non è necessaria
  - Se la funzione τ è iniettiva (quindi bigettiva) e la relazione E è l'identità allora $\Delta^M/E^M=\Delta^M$ e non abbiamo bisogno di E

ESEMPI DI INTERPRETAZIONI K-DIMENSIONALI CON QUOZIENTE

- Il gruppo (Z,+) è interpretabile in (N,+)
  - La funzione τ: NxN → Z che manda la coppia (a,b) in a-b fornisce un'interpretazione
  - Come relazione di equivalenza prendiamo $E((a,b),(c,d)) \iff a-b=c-d$
  - Descriviamo la funzione +: $\Phi_+(x^1,x^2,y^1,y^2,z^1,z^2)=x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2$
- Il gruppo R/Z è interpretabile in (R,+,.,0,1)
  - Pensiamo R/Z come in gruppo delle rotazioni nel piano, rappresentate tramite matrici A=[a, -b; b, a] tali che $a^2+b^2=1$ che possiamo identificare come una coppia (a,b)
  - Il dominio dell'interpretazione è $x^2+y^2=1$ mentre l'operazione di gruppo è definita dalla moltiplicazione tra matrici
  - Otteniamo in questo modo una interpretazione bidimensionale del gruppo R/Z nel campo R
- (Q,+,.) è interpretabile in (Z,+,.)
  - Identifichiamo Q con Z x (Z x {0})/E dove (a, b)E(c, d) se e solo se ad = bc

INTERPRETAZIONI TRA TEORIE

INTUITIVAMENTE

- Presa una L-teoria T e una L'-teoria T' vogliamo definire un'interpretazione di T in T', come per le strutture
- Intuitivamente questa è data da una famiglia di L'-formule I che definiscono il dominio e i concetti primitivi di T in T', in modo tale che T' dimostri tutti gli assiomi di T tradotti nel suo linguaggio
- Una richiesta fondamentale è che per ciascun modello M di T', l'intepretazione I deve fornire un modello N = M(I) di T interpretabile in M e la stessa I deve funzionare per tutti gli M

DEFINIZIONE

- Un'interpretazione di una L-teoria T in una L'-teoria T' è data da una famiglia di L-formule $I=(\Delta, E, \Phi P, \Phi f)_{P,f\in L'}$ tale che, definendo $\Phi(I)$ come nel caso generale si abbia $T \vdash \Phi(I)$ per ogni assioma Φ di T'
- T deve dimostrare anche che i simboli di funzione $f \in L$ siano effettivamente intepretati come funzioni in tutti i modelli e che il dominio dell'interpretazione sia sempre non vuoto
  - $T \vdash (\forall X \exists ! y\, (f(X)=y))(I)$
  - $T \vdash \exists X \Delta(X)$

INTERPRETAZIONE DI PA IN ZF

INTERPRETAZIONE UNIDIMENSIONALE SENZA QUOZIENTI

PA è una teoria nel linguaggio L={0,s,+,.}
ZF è una teoria nel linguaggio L'={∈}

- ORDINALI: un ordinale è un insieme transitivo e bene ordinato da ∈; un ordinale è finito se non vi sono ordinali limite $\leq x$
  - INSIEME TRANSITIVO: tutti gli elementi sono anche parti dell'insieme
  - ORDINALE LIMITE: un ordinale che non è né della forma $s(y)=y \cup \{y\}$ né l'insieme vuoto
- DOMINIO: $\Delta(x)$ = "x è un ordinale finito" = $(y \in x \land \forall z \in y, z \in x) \land (\neg\exists y \in x\ (y=\emptyset \lor \exists z\ y=z \cup \{z\})\ y \leq x)$
- ZERO: lo zero si traduce con l'insieme vuoto = $\Phi 0(x)=\forall y (y \notin x)$
- SUCCESSORE: il successore di x è $x \cup \{x\}$ = $\Phi s(x,y)=\forall u (u \in y \leftrightarrow (u=x \lor u \in x))$
- SOMMA: "x+y=z" sse esiste una successione finita (a_i : $i \leq y$) con $a_0 =0$, $a_y =z$ e $a_{(i+1)} =a_i+1$ per ogni i
- PRODOTTO: "$x \cdot y = z$": esiste una successione finita (a_i :$i \leq y$) con $a_0 = 0$, $a_y = z$ e $a_{(i+1)} = a_i+x$

Formalizzando otteniamo $\Phi+(x, y, z)$ e $\Phi.(x, y, z)$

TRADURRE LE FORMULE

Data una formula Φ di PA definiamo induttivamente una formula Φ(I) di ZF

- $(x=0)(I) = \Phi 0(x)$
- $(s(x)=y)(I) = \Phi s(x,y)$
- $(x+y=z)(I) = \Phi+(x,y,z)$
- $(x.y=z)(I) = \Phi.(x,y,z)$
- $(x=y)(I) = x(I)=y(I)$
- $(\alpha \lor \beta)(I)=\alpha(I) \lor \beta(I)$
- $(\alpha \land \beta)(I)=\alpha(I) \land \beta(I)$
- $(\neg\alpha)(I)=\neg\alpha(I)$
- $(\forall y\alpha)(I)=\forall y(\Delta(y) \rightarrow \alpha(I))$
- $(\exists y\alpha)(I)=\exists y(\Delta(y) \land \alpha(I))$

ZF DIMOSTRA GLI ASSIOMI DI PA

Se I è come in definita in precedenza, ZF ⊢ PA(I), ovvero per ogni assioma Φ di PA, ZF dimostra Φ(I). ZF ⊢ Φ(I) per ogni teorema (e non solo per ogni assioma) di PA

RISULTATI

- **ESSENZIALMENTE INDECIDIBILE**
  - Una teoria T è decidibile se l'insieme delle codifiche dei suoi teoremi è ricorsivo, ed è indecidibile nel caso contrario
  - Una teoria T è essenzialmente indecidibile se ogni estensione coerente di T nello stesso linguaggio è indecidibile
- **Supponiamo che la L-teoria T sia interpretabile nella L'- teoria T'**
  - Se T' è coerente lo è anche T
    - Sia I l'interpretazione di T in T'. Se M è un modello di T' allora M(I) è un modello T
  - Supponiamo che T sia essenzialmente indecidibile. Allora T', se coerente, è essenzialmente indecidibile
    - Definiamo $S \supseteq T$, la L-teoria i cui assiomi sono gli enunciati θ tali che $T' \vdash \theta(I)$. Gli assiomi di S coincidono con i suoi teoremi, quindi $S \vdash \theta$ sse $T' \vdash \theta(I)$. Quindi S è coerente e se T' fosse decidibile lo sarebbe anche S. S non può essere decidibile perché estende T, quindi T' è indecidibile
    - S è deduttivamente chiusa: cioè $S \vdash \theta$ allora $\theta \in Ax(S)$, cioè $T' \vdash \theta(I)$. Da $S \vdash \theta$ segue che esiste un insieme finito di assiomi di S tale che $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rightarrow \theta$ è valida. Poiché $\sigma_i \in Ax(S)$ abbiamo $T' \vdash \sigma_i(I)$ per ogni i, e inoltre $T' \vdash \sigma_1(I) \wedge \ldots \wedge \sigma_n(I) \rightarrow \theta(I)$ e quindi ho la tesi
    - T' essenzialmente indecidibile: segue dal fatto che se T è interpretabile in T' allora è anche interpretabile in qualsiasi estensione di T'
- **Sia T una teoria essenzialmente indecidibile e finitamente assiomatizzata**
  - Se T è interpretabile in una estensione coerente S di una teoria T', allora T' è indecidibile
    - Sia I l'interpretazione di T in S. Allora S dimostra $\theta(I)$ per ogni assioma θ di T e che il dominio $\Delta(x)$ dell'interpretazione definisce un insieme non vuoto chiuso rispetto alla interpretazione delle funzioni di L(T)
    - L'insieme di queste formule è finito (T fin. ax.) e quindi per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di S a dimostrarle, quindi T è interpretabile in $S' \subseteq S$ e quindi anche in $T'+S'$ che è indecidibile, e siccome S' ha un numero finito di assiomi allora T' è indecidibile
- **RISULTATI SULLE TEORIE**
  - PA e ZF sono essenzialmente indecidibili
    - Q è interpretabile in PA (è contenuta) e PA è interpretabile in ZF
  - La teoria completa Th(Z, +, ·, 0, 1) è indecidibile
    - Th(N,+,·,0,1) è essenzialmente indecidibile, ed è interpretabile in Th(Z,+,·,0,1)
  - La teoria degli anelli commutativi è indecidibile
    - La teoria degli anelli commutativi è contenuta nella teoria di (Z, +, ·, 0, 1); Q è interpretabile in quest'ultima quindi possiamo concludere
  - La teoria completa Th(Q,+,·,0,1) è essenzialmente indecidibile
    - Si dimostra che la teoria Th(N, +, ·, 0, 1) è interpretabile in Th(Q,+,·,0,1) usando un risultato di Julia Robinson che mostra che l'insieme N è definibile in (Q, +, ·, 0, 1)
  - La teoria dei campi è indecidibile
    - Q è interpretabile in Th(N,+,·,0,1) che è interpretabile in Th(Q, +, ·, 0, 1). Quest'ultima è una estensione coerente della teoria dei campi
  - La teoria dei campi non è essenzialmente indecidibile
    - La teoria dei campi con 2 elementi è una estensione decidibile della teoria dei campi
- **TEOREMA DI CHURCH**
  - Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binaria. L'insieme degli L- enunciati logicamente validi non è decidibile
    - Il linguaggio di ZF contiene solamente il simbolo di appartenenza. Possiamo assumere che il linguaggio L dell'ipotesi sia il linguaggio di ZF
    - Sia T la L-teoria con l'insieme vuoto di assiomi. I modelli di T sono i grafi, ovvero gli insiemi con una relazione binaria. I teoremi di T sono gli enunciati logicamente validi nel linguaggio L, ovvero gli enunciati veri in tutti i grafi
    - La teoria Q è interpretabile in ZF, che è una estensione coerente di T. Ne segue che T è indecidibile