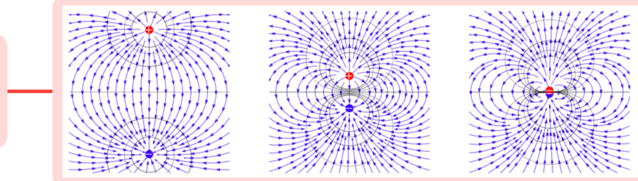
Dipolo

Idea

Un generico sistema di cariche di dimensione spaziale d e carica totale Q ≠ 0 sembra una carica Q puntiforme quando visto da grande distanza



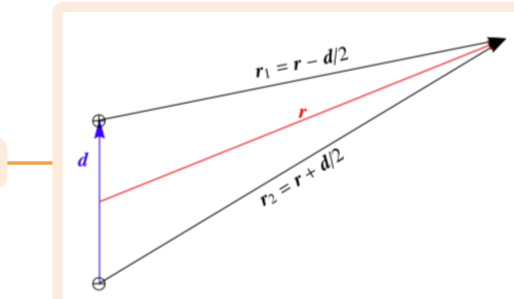
Potenziale di dipolo

TAYLOR

È possibile approssimare il campo elettrico a distanza r espandendolo in serie di Taylor per d/r ≪ 1
Q ≠ 0 -> monopolo termine dominante
Q = 0 -> dipolo termine dominante
Per calcolarlo analiticamente poniamo due cariche ±q a distanza d e approssimiamo in serie di Taylor al 1° ordine il potenziale delle due cariche

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1 r_2(r_1+r_2)} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{r_1 r_2(r_1+r_2)} \\ &\overset{r\gg d}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\end{aligned}$$

GEOMETRICO



MOMENTO DI DIPOLO

Il potenziale non dipende separatamente da q e da $\mathbf{d}$, ma sol dal loro prodotto detto momento di dipolo $\mathbf{p}$ = q$\mathbf{d}$

Campo di dipolo

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{2(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}}_{E_r}+\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})}{r^5}}_{E_\theta}\right]$$

La prima formula è più usata, la seconda può essere utile, nonostante il doppio prodotto vettore, in quanto i due termini sono le componenti Er ed Eθ del campo in coordinate polari (mentre Eϕ = 0)

$$E = \sqrt{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \propto \frac{1}{r^3}.$$

Il modulo di $\mathbf{E}$ non vale zero a nessun angolo θ e va a zero come $1/r^3$
(θ è l'angolo fra $\mathbf{p}$ ed il punto $\mathbf{r}$ in cui si calcola il campo elettrico (e quindi $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$ = pr cos θ)

Sistema di cariche generiche

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \overset{r\gg r_i}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i\left[\frac{1}{r}-\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}+\cdots\right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i\left[\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\cdots\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$Q = \sum_i q_i = \int dq = \int dV\,\rho.$$

Il momento di monopolo Q è la carica elettrica totale del sistema

$$\boldsymbol{p} = \sum_i q_i\boldsymbol{r}_i = \int dq\,\boldsymbol{r} = \int dV\,\rho\,\boldsymbol{r}$$

Q ≠ 0 -> dipende dalla scelta del punto attorno al quale viene espanso il termine dominante di monopolo
Q = 0 -> non dipende dalla scelta dell'origine del sistema di coordinate

Forza e momento su dipolo in $\mathbf{E}$ esterno

Siamo nel caso in cui il dipolo agisce su un campo elettrico esterno (fino ad ora abbiamo visto il caso in cui genera) ma prendiamo sempre due cariche ±q a distanza d

FORZA

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E}_q - \boldsymbol{E}_{-q}] \simeq q(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}.$$

viene fatta la derivata del campo elettrico lungo la direzione parallela al dipolo

assumendo che
① $\mathbf{p}$ sia costante
② $\mathbf{E}$ abbia rotore zero
si ottiene:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \qquad \text{dove} \qquad \boxed{U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = -pE\cos\theta}$$

Più intuitiva ma meno generale.
θ è l'angolo fra $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}$ nella posizione del dipolo

Non è valida quando:
① $\mathbf{p}$ è indotto dal campo esterno $\mathbf{E}$ ⇒ non è costante, e ci sono altre energie in gioco
② $\mathbf{E}$ è rotazionale